УДК 531.381+517.93

©2014. **М.П. Харламов, Х.М. Яхья**

РАЗДЕЛЕНИЕ ПЕРЕМЕННЫХ В ОДНОМ ЧАСТНОМ СЛУЧАЕ ДВИЖЕНИЯ ГИРОСТАТА В ДВОЙНОМ ПОЛЕ

Динамически симметричный гиростат в двойном поле при условиях типа Ковалевской обладает полным инволютивным набором первых интегралов, однако, в общем случае эта задача к квадратурам не сведена. В настоящей работе для частного случая, когда двойное поле допускает одномерную симметрию, выполнено понижение порядка по Раусу. Выбраны значения интегральных постоянных, при которых приведенная система не имеет гироскопических сил. В этой натуральной системе с двумя степенями свободы указано разделение переменных, приводящее к гиперэллиптическим уравнениям Абеля – Якоби. Нециклические комбинации углов Эйлера выражены через переменные разделения.

Ключевые слова: *гиростат, двойное поле, разделение переменных.*

Введение. В работах [1, 2] для задачи о движении гиростата вокруг неподвижной точки при условиях типа Ковалевской был указан первый интеграл, независимый с интегралом энергии и обобщающий интеграл Ковалевской. В общем случае двойное поле не обладает группой симметрий, в силу чего дополнительный интеграл момента не существует. Однако в [1, 2] был указан частный случай, в котором имеется одномерная группа преобразований конфигурационного пространства, сохраняющая потенциал, и, как следствие, для этого случая был найден третий независимый интеграл, находящийся в инволюции с обобщенным интегралом Ковалевской и делающий систему вполне интегрируемой. Понижение порядка по Раусу (факторизация по группе симметрий) приводит к однопараметрическому семейству интегрируемых систем с двумя степенями свободы, в которых функция Рауса квадратична по обобщенным скоростям, но содержит и линейные по этим скоростям слагаемые, т. е. приведенная система содержит гироскопические силы. В достаточно общей задаче, допускающей такую симметрию, функция Рауса вычислена в [3] (см. также [4]). В настоящей работе мы выпишем приведенную систему в интегрируемом случае [1, 2], укажем условия, при которых в ней гироскопические силы отсутствуют, и при этих условиях выполним разделение переменных. В основе этого результата лежит установленная в [3] аналогия класса задач о движении гиростата в двойном поле с задачами о движении гиростата в осесимметричном поле при нулевой постоянной площадей, а также метод нахождения разделения переменных, предложенный в [5, 6], и построенное этим методом алгебраическое разделение переменных в случае Д.Н. Горячева [7, 8].

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (грант № 14-01-00119).

1. Уравнения и интегралы. Уравнения Эйлера–Пуассона движения гиростата в двойном поле в общем случае имеют вид

$$\begin{gathered}\dot{\mathbf{M}} = \mathbf{M} \times \boldsymbol{\omega} + \mathbf{c}_1 \times \boldsymbol{\alpha} + \mathbf{c}_2 \times \boldsymbol{\beta}, \\ \dot{\boldsymbol{\alpha}} = \boldsymbol{\alpha} \times \boldsymbol{\omega}, \quad \dot{\boldsymbol{\beta}} = \boldsymbol{\beta} \times \boldsymbol{\omega},\end{gathered} \tag{1}$$

где $\boldsymbol{\omega}$ – угловая скорость, $\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}$ – характеристические векторы силовых полей (например, сила тяжести и напряженность магнитного поля), $\mathbf{c}_1, \mathbf{c}_2$ – векторы, направленные из неподвижной точки O в центры приложения сил. Все объекты отнесены к подвижным осям. Вектор кинетического момента $\mathbf{M}$ связан с угловой скоростью зависимостью

$$\mathbf{M} = \boldsymbol{\omega}\mathbf{I} + \boldsymbol{\lambda},$$

где $\mathbf{I}$, $\boldsymbol{\lambda}$ – тензор инерции в точке O и вектор гиростатического момента, постоянные в подвижной системе отсчета. Компоненты векторов в выбранной подвижной системе $O\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2\mathbf{e}_3$ главных осей тензора инерции $\mathbf{I}$ записываем в строки, что объясняет необычный порядок объектов в записи $\mathbf{M}$. Известно [9], что, не изменяя плоскости $O\mathbf{c}_1\mathbf{c}_2$ в теле, можно пару векторов $\mathbf{c}_1, \mathbf{c}_2$ сделать ортонормированной. Предположим, что гиростат динамически симметричен $\mathbf{e}_1\mathbf{I} \cdot \mathbf{e}_1 = \mathbf{e}_2\mathbf{I} \cdot \mathbf{e}_2$, $\boldsymbol{\lambda} = \{0, 0, \lambda\}$ и центры приложения полей лежат в экваториальной плоскости $\mathbf{c}_1 \cdot \mathbf{e}_3 = 0$, $\mathbf{c}_2 \cdot \mathbf{e}_3 = 0$. В этом случае (см. [10, 11]) заменой переменных можно неподвижные в пространстве векторы $\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}$ сделать взаимно ортогональными. При этом, после перехода к ортонормированной паре $\mathbf{c}_1, \mathbf{c}_2$, модули векторов $\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}$ несут в себе всю скалярную информацию о воздействии полей на гиростат (например, для силы тяжести модуль соответствующего вектора равен произведению веса гиростата на расстояние от центра масс до неподвижной точки). Поэтому векторы $\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}$ называем интенсивностями силовых полей. В силу динамической симметрии любая ортонормированная пара векторов в экваториальной плоскости является главной для тензора инерции, поэтому считаем также, что $\mathbf{c}_1 = \mathbf{e}_1$, $\mathbf{c}_2 = \mathbf{e}_2$.

Пусть тензор инерции удовлетворяет условиям Ковалевской

$$\mathbf{I} = \operatorname{diag}\{I_1, I_1, I_3\}, \qquad I_1 = I_2 = 2I_3 \tag{2}$$

и интенсивности полей после ортогонализации одинаковы

$$\boldsymbol{\alpha}^2 = \boldsymbol{\beta}^2 = a^2, \qquad \boldsymbol{\alpha} \cdot \boldsymbol{\beta} = 0 \qquad (a > 0). \tag{3}$$

В дальнейшем единицы измерения выберем так, что $I_3 = 1$ и $a = 1$.

Как показано в работе [1], при условиях (2), (3) уравнения (1) в дополнение к интегралу энергии

$$H = \omega_1^2 + \omega_2^2 + \frac{1}{2}\omega_3^2 - \alpha_1 - \beta_2$$

обладают первыми интегралами

$$\begin{aligned}K = {} & (\omega_1^2 - \omega_2^2 + \alpha_1 - \beta_2)^2 + (2\omega_1\omega_2 + \alpha_2 + \beta_1)^2 + \\ & + 2\lambda[(\omega_3 - \lambda)(\omega_1^2 + \omega_2^2) + 2(\alpha_3\omega_1 + \beta_3\omega_2)], \\ G = {} & 2\omega_1\gamma_1 + 2\omega_2\gamma_2 + (\omega_3 + \lambda)(\gamma_3 - 1).\end{aligned}$$

Здесь вектор $\boldsymbol{\gamma} = \boldsymbol{\alpha}\times\boldsymbol{\beta}$ дополняет пару $\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}$ до неподвижного в пространстве ортонормированного триэдра. В частности, матрица направляющих косинусов имеет вид

$$Q = \begin{pmatrix} \boldsymbol{\alpha} \\ \boldsymbol{\beta} \\ \boldsymbol{\gamma} \end{pmatrix}.$$

Рассмотрим действие на $SO(3)$ подгруппы $\{g_\tau\}$ матриц

$$g_\tau = \begin{pmatrix} \cos\tau & \sin\tau & 0 \\ -\sin\tau & \cos\tau & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

внутренними автоморфизмами

$$Q \;\mapsto\; Q(\tau) = g_\tau Q g_\tau^{-1}.$$

Это действие не свободно – подгруппа $\{g_\tau\}$ является стационарной подгруппой каждого своего элемента. При этом, даже если всю подгруппу $\{g_\tau\}$ отождествить в одну точку, получив расслоение $SO(3)$ над двумерной сферой, оно не будет локально-тривиальным [12]. Поэтому такую группу симметрий называют сингулярной.

Интеграл G является циклическим, порожденным действием $\{g_\tau\}$. Действительно, “мгновенная угловая скорость движения” $Q(\tau)$ при $\tau = 0$ равна $\boldsymbol{\gamma} - \mathbf{e}_3 = (\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3 - 1)$, поэтому G – соответствующий интеграл момента.

2. Редукция по циклической переменной. Введем углы Эйлера θ, φ, ψ ($0 \leqslant \theta \leqslant \pi$, $0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi$, $0 \leqslant \psi \leqslant 2\pi$), полагая θ углом между $\mathbf{e}_3$ и $\boldsymbol{\gamma}$:

$$\begin{aligned}&\alpha_1 = \cos\varphi\cos\psi - \sin\varphi\sin\psi\cos\theta, \quad \alpha_2 = -\sin\varphi\cos\psi - \cos\varphi\sin\psi\cos\theta, \\ &\beta_1 = \cos\varphi\sin\psi + \sin\varphi\cos\psi\cos\theta, \quad \beta_2 = -\sin\varphi\sin\psi + \cos\varphi\cos\psi\cos\theta, \\ &\alpha_3 = \sin\psi\sin\theta, \quad \beta_3 = -\cos\psi\sin\theta, \\ &\gamma_1 = \sin\varphi\sin\theta, \quad \gamma_2 = \cos\varphi\sin\theta, \quad \gamma_3 = \cos\theta, \\ &\omega_1 = \dot\psi\sin\varphi\sin\theta + \dot\theta\cos\varphi, \quad \omega_2 = \dot\psi\cos\varphi\sin\theta - \dot\theta\sin\varphi, \\ &\omega_3 = \dot\varphi + \dot\psi\cos\theta.\end{aligned}$$

Функция Лагранжа, отвечающая системе (1), имеет вид

$$\begin{aligned}L = {} & \frac{1}{2}\dot\varphi^2 + \dot\theta^2 + \frac{1}{4}(3 - \cos 2\theta)\dot\psi^2 + \dot\varphi\dot\psi\cos\theta + \lambda(\dot\varphi + \dot\psi\cos\theta) + \\ & + \cos(\varphi + \psi)(1 + \cos\theta).\end{aligned}$$

Выполним подстановку

$$\varphi = \Phi - \Psi, \qquad \psi = \Psi, \qquad \theta = 2\Theta.$$

При этом $\Theta \in [0, \pi/2]$, а углы Φ, Ψ можно считать по-прежнему изменяющимися в пределах $[0, 2\pi]$, так как матрица замены $(\varphi, \psi) \mapsto (\Phi, \Psi)$ целочисленна с определителем единица. Очевидно, Ψ будет циклической координатой, которой соответствует интеграл G. В новых переменных он имеет вид

$$G = \frac{\partial L}{\partial \dot{\Psi}} = 2\big[(3 + \cos 2\Theta)\dot{\Psi} - \dot{\Phi} - \lambda\big] \sin^2 \Theta,$$

поэтому его константу естественно обозначить через $2g$. Из уравнения циклического интеграла находим

$$\dot{\Psi} = \frac{(\dot{\Phi} + \lambda)\sin^2 \Theta + g}{D \sin^2 \Theta}.$$

Здесь и далее обозначено

$$D = 3 + \cos 2\Theta = 2(2 - \sin^2 \Theta).$$

Исключение циклической координаты приводит к системе, в которой роль лагранжиана играет функция Рауса

$$R = \dot{\Theta}^2 + \frac{\cos^2 \Theta}{2D}\dot{\Phi}^2 + \frac{2\lambda \cos^2 \Theta - g}{2D}\dot{\Phi} + \frac{1}{2}\cos \Phi \cos^2 \Theta - \frac{(g + \lambda \sin^2 \Theta)^2}{4D \sin^2 \Theta}.$$

Линейное по $\dot{\Phi}$ слагаемое не влияет на уравнения Лагранжа, если

$$0 \equiv \frac{\partial}{\partial \Theta}\left(\frac{2\lambda \cos^2 \Theta - g}{2D}\right) = -\frac{2\lambda + g}{D^2}\sin 2\Theta,$$

т. е. при

$$g = -2\lambda \tag{4}$$

приведенная система является натуральной механической системой. В дальнейшем рассматриваем случай (4). Уравнение для $\dot{\Psi}$ примет вид

$$\dot{\Psi} = \frac{\dot{\Phi}}{D} - \frac{\lambda}{2\sin^2 \Theta}, \tag{5}$$

а приведенная система такова:

$$\begin{aligned}
\ddot{\Phi} &= \frac{4 \operatorname{tg} \Theta}{D}\dot{\Phi}\dot{\Theta} - \frac{D \sin \Phi}{2}, \\
\ddot{\Theta} &= -\frac{\sin 2\Theta}{2D^2}\dot{\Phi}^2 + \frac{1}{4}\left(\lambda^2 \frac{\cos \Theta}{\sin^3 \Theta} - \cos \Phi \sin 2\Theta\right).
\end{aligned}$$

3. Разделение переменных. Покажем, что при условии (4) переменные в приведенной системе разделяются. Удобно перейти от H, K к новым интегралам

$$\tilde{H} = \frac{1}{4}(H + \frac{\lambda^2}{2}), \qquad \tilde{K} = \frac{1}{4}(K + 2\lambda^2 H),$$

постоянные которых обозначим через h и k соответственно. В развернутом виде получим

$$\tilde{H} = \dot{\Theta}^2 + \frac{\cos^2\Theta}{2D}\dot{\Phi}^2 - \frac{1}{2}\cos\Phi\cos^2\Theta + \frac{\lambda^2}{4\sin^2\Theta}, \tag{6}$$

$$\begin{aligned}\tilde{K} = 4\dot{\Theta}^4 &+ \frac{\sin^4 2\Theta}{4D^4}\dot{\Phi}^4 + \frac{2\sin^2 2\Theta}{D^2}\dot{\Phi}^2\dot{\Theta}^2 + \frac{8\sin\Phi\cos\Theta\sin^3\Theta}{D}\dot{\Phi}\dot{\Theta} + \\ &+ 2\left[\frac{\lambda^2}{\sin^2\Theta} + 2\cos\Phi\sin^2\Theta\right]\dot{\Theta}^2 + \frac{2\cos^2\Theta}{D^2}\left[\lambda^2 - 2\cos\Phi\sin^4\Theta\right]\dot{\Phi}^2 + \\ &+ \frac{\lambda^4}{4\sin^4\Theta} + \sin^4\Theta.\end{aligned} \tag{7}$$

Сформулируем основной результат. Рассмотрим двузначные функции одного переменного z

$$p(z) = \sqrt{\lambda^2 + k - z^2}, \qquad q(z) = \sqrt{\lambda^2 - k + z^2},$$
$$r(z) = \sqrt{(2h - z)\lambda^2 - k + z^2}.$$

Введем переменные z_1, z_2 как корни квадратного уравнения

$$z^2\sin^2\Theta - \lambda^2 z + 2\lambda^2\left(\dot{\Theta}^2 + \frac{\sin^2 2\Theta}{4D^2}\dot{\Phi}^2\right) - k\sin^2\Theta + \frac{\lambda^4}{2\sin^2\Theta} = 0$$

и обозначим

$$p_i = p(z_i), \qquad q_i = q(z_i), \qquad r_i = r(z_i). \tag{8}$$

Теорема. *На совместном уровне интегралов*

$$\tilde{H} = h, \qquad \tilde{K} = k$$

углы Φ, Θ выражаются через переменные z_1, z_2 по формулам ($\mathrm{i}^2 = -1$)

$$\begin{aligned}&\sin\Theta = \frac{\lambda}{\sqrt{z_1+z_2}}, \qquad \cos\Theta = \frac{\sqrt{z_1+z_2-\lambda^2}}{\sqrt{z_1+z_2}},\\ &\sin\frac{\Phi}{2} = \frac{p_2q_1r_1 - p_1q_2r_2}{\lambda(z_1-z_2)\sqrt{2(z_1+z_2)}\sqrt{z_1+z_2-\lambda^2}},\\ &\cos\frac{\Phi}{2} = \mathrm{i}\frac{p_1q_2r_1 - p_2q_1r_2}{\lambda(z_1-z_2)\sqrt{2(z_1+z_2)}\sqrt{z_1+z_2-\lambda^2}},\end{aligned} \tag{9}$$

а зависимости z_1, z_2 *от времени определяются дифференциальными уравнениями*

$$\lambda(z_1 - z_2)\dot{z}_1 = -\sqrt{Z(z_1)}, \qquad \lambda(z_1 - z_2)\dot{z}_2 = \sqrt{Z(z_2)}, \tag{10}$$

где $Z(z)$ – *многочлен шестой степени, заданный как*

$$Z(z) = p^2(z)q^2(z)r^2(z).$$

Замечание. *Дифференциальные уравнения для вспомогательных переменных можно, очевидно, записать в виде уравнений Абеля – Якоби*

$$\frac{dz_1}{\sqrt{Z(z_1)}} + \frac{dz_2}{\sqrt{Z(z_2)}} = 0, \qquad \frac{z_1 dz_1}{\sqrt{Z(z_1)}} + \frac{z_2 dz_2}{\sqrt{Z(z_2)}} = -\frac{1}{\lambda}dt.$$

Их решения выражаются в гиперэллиптических функциях.

Доказательство. Обозначим

$$U = \frac{1}{\sin^2\Theta}\left(\dot{\Theta}^2 + \frac{\sin^2 2\Theta}{4D^2}\dot{\Phi}^2\right). \tag{11}$$

Из условий

$$z_1 + z_2 = \frac{\lambda^2}{\sin^2\Theta}, \qquad z_1 z_2 = 2\lambda^2 U - k - \frac{\lambda^4}{2\sin^4\Theta}$$

найдем

$$\sin\Theta = \frac{\lambda}{\sqrt{z_1 + z_2}}, \qquad U = \frac{2k - (z_1^2 + z_2^2)}{4\lambda^2}. \tag{12}$$

Отсюда следует и выражение для $\cos\Theta$ в (9).

Для упрощения выкладок введем переменную V, полагая

$$\dot{\Theta} = \frac{V}{2\sqrt{z_1 + z_2}}, \tag{13}$$

тогда, исключая U из уравнений (11), (12), получим

$$\dot{\Phi} = \frac{[\lambda^2 - 2(z_1^2 + z_2^2)]\sqrt{2k - (z_1^2 + z_2^2) - V^2}}{\lambda\sqrt{z_1 + z_2}\sqrt{z_1 + z_2 - \lambda^2}}. \tag{14}$$

Подстановка найденных выражений для $\sin\Theta, \cos\Theta, \dot{\Theta}, \dot{\Phi}$ в уравнения первых интегралов дает два уравнения для определения V и $\cos\Phi$ как функций от z_1, z_2:

$$\begin{gathered}
4\lambda^4 V^4 + 4\lambda^2\{\lambda^2(z_1^2 + z_2^2 - 2k) + [(k - z_1^2)(k - z_2^2) + \lambda^4]\cos\Phi\}V^2 + \\
+[k^2 + \lambda^4 + z_1^2 z_2^2 + \lambda^2(z_1^2 + z_2^2)\cos\Phi - k(2\lambda^2\cos\Phi + z_1^2 + z_2^2)]^2 = 0, \\
(z_1 + z_2 - \lambda^2)V^2 + \lambda^2(z_1 + z_2 - \lambda^2)\cos\Phi + k[\lambda^2 - 2(z_1 + z_2)] + \\
+\frac{z_1^4 - z_2^4}{z_1 - z_2} - \lambda^2\frac{z_1^3 - z_2^3}{z_1 - z_2} + 2h\lambda^2(z_1 + z_2) = 0.
\end{gathered}$$

Из этой системы находим

$$
\begin{aligned}
V^2 = {} & [(z_1+z_2-\lambda^2)(z_1-z_2)^2(z_1+z_2)]^{-1}\left\{-2p_1q_1r_1p_2q_2r_2+2k^3-\right.\\
& -k^2[\lambda^2(4h-z_1-z_2)+3(z_1^2+z_2^2)]+k[3(z_1^4+z_2^4)+\\
& +4h\lambda^2(z_1^2+z_2^2)-2\lambda^2(z_1^3+z_2^3)-2\lambda^4]+\lambda^6(4h-z_1-z_2)+\\
& \left.+\lambda^4(z_1^2+z_2^2)+\lambda^2[z_1^5+z_2^5-2h(z_1^4+z_2^4)]-(z_1^6+z_2^6)\right\},\\
\cos\Phi = {} & [(z_1+z_2-\lambda^2)(z_1-z_2)^2(z_1+z_2)]^{-1}\left\{2p_1q_1r_1p_2q_2r_2+\right.\\
& \left.+[\lambda^4-(k-z_1^2)(k-z_2^2)][2k-\lambda^2(4h-z_1-z_2)-(z_1^2+z_2^2)\right\}.
\end{aligned}
$$

В выражениях $\sqrt{\frac{1}{2}(1+\cos\Phi)}$, $\sqrt{\frac{1}{2}(1-\cos\Phi)}$ и $\sqrt{V^2}$ можно избавиться от двойных радикалов. Для синуса и косинуса половинного угла результат запишется в виде (9), а величину V представим так:

$$
V = \frac{p_1q_1r_1-p_2q_2r_2}{(z_1-z_2)\sqrt{z_1+z_2}\sqrt{z_1+z_2-\lambda^2}}.
$$

Заметим, что на этом этапе формальные знаки у найденных величин могут быть выбраны произвольно, так как однозначно определены (как функции от z_i, p_i, q_i, r_i) лишь $\cos^2\Theta, V^2, \cos\Phi$. Сделанный нами выбор в используемых формулах предопределяет выбор знаков в последующих аналитических выражениях.

Подставляя значение V в равенства (13), (14), найдем выражения $\dot\Theta, \dot\Phi$ через z_1, z_2:

$$
\dot\Theta = \frac{p_1q_1r_1-p_2q_2r_2}{2(z_1^2-z_2^2)\sqrt{z_1+z_2-\lambda^2}}, \quad \dot\Phi = \mathrm{i}\frac{[2(z_1+z_2)-\lambda^2](p_1q_1r_2-p_2q_2r_1)}{\lambda(z_1^2-z_2^2)(z_1+z_2-\lambda^2)}.
$$

С другой стороны, обозначая $\mathrm{D}_t = \dot z_1\partial_{z_1}+\dot z_2\partial_{z_2}$, из уравнений (9) вычислим $\dot\Theta = (\mathrm{D}_t\sin\Theta)/\cos\Theta$ и $\dot\Phi = 2(\mathrm{D}_t\sin\frac{\Phi}{2})/\cos\frac{\Phi}{2}$. Совпадение найденных значений обобщенных скоростей приводит к системе уравнений

$$
\begin{aligned}
& C_1\dot z_1 - C_2\dot z_2 = \frac{\left[2(z_1+z_2)-\lambda^2\right](p_2q_2r_1-p_1q_1r_2)}{\lambda},\\
& \dot z_1+\dot z_2 = \frac{p_2q_2r_2-p_1q_1r_1}{\lambda(z_1-z_2)},
\end{aligned}
$$

где

$$
\begin{aligned}
& C_1 = \frac{r_2}{r_1}(2z_1-\lambda^2)(z_1+z_2)-2z_1(z_1+z_2-\lambda^2)\frac{p_2q_2}{p_1q_1},\\
& C_2 = \frac{r_1}{r_2}(2z_2-\lambda^2)(z_1+z_2)-2z_2(z_1+z_2-\lambda^2)\frac{p_1q_1}{p_2q_2}.
\end{aligned}
$$

Отсюда, после необходимых упрощений, получаем уравнения (10). □

Таким образом, в приведенной системе, отвечающей условию (4) на постоянную циклического интеграла, построено разделение переменных, причем тригонометрические функции нециклических комбинаций углов Эйлера представлены в виде дробно-рациональных выражений от переменных разделения и радикалов (8). Для циклической переменной (угла Ψ) в таком виде можно представить соответствующую обобщенную скорость. Действительно, из (5) с учетом найденных выражений для $\dot{\Theta}, \dot{\Phi}$ получим

$$\dot{\Psi} = -\frac{1}{2\lambda}\left[(z_1+z_2)+\mathrm{i}\frac{p_2q_2r_1-p_1q_1r_2}{(z_1+z_2-\lambda^2)(z_1-z_2)}\right].$$

В заключение отметим, что, как видно из представленных формул, получено разделение переменных лишь при условии $\lambda \neq 0$. В частности, для волчка Ковалевской в S^1-симметричном двойном поле аналога этому решению нет. Однако при $\lambda = 0$ (а тогда и при нулевой постоянной циклического интеграла) в функции Рауса и первых интегралах приведенной системы сингулярных слагаемых нет. Такая задача имеет аналогию с решением С.А. Чаплыгина [13], и разделение переменных также существует.

1. *Yehia H.M.* New integrable cases in the dynamics of rigid bodies // Mechanics Research Communications. – 1986. – **13**, 3. – P. 169–172.
2. *Яхъя Х.М.* Новые интегрируемые случаи задачи о движении гиростата // Вестник Моск. ун-та. Сер. 1. – 1987. – № 4. – С. 88–90.
3. *Yehia H.M.* Equivalent problems in rigid body dynamics-II // Celestial Mechanics. – 1988. – **41**. – P. 289–295. `doi:10.1007/BF01238765`.
4. *Yehia H.M.* Geometric transformations and new integrable problems of rigid body dynamics // J. of Phys. A: Math. & Gen. – 2000. – **33**. – P. 4393–4399. `doi:10.1088/0305-4470/33/23/313`.
5. *Kharlamov M.P.* Separation of variables in the generalized 4th Appelrot class // Regular and Chaotic Dynamics. – 2007. – **12**, 3. – P. 267–280. `arXiv:0803.1024`. `doi:10.1134/S1560354707030021`.
6. *Харламов М.П.* Обобщение 4-го класса Аппельрота: аналитические решения // Механика твердого тела. – 2008. – Вып. 38. – С. 20–30.
7. *Рябов П.Е.* Явное интегрирование и топология случая Д.Н. Горячева // Докл. РАН. – 2011. – **439**, 3. – С. 315–318. `doi:10.1134/S1064562411040193`.
8. *Рябов П.Е.* Фазовая топология одного частного случая интегрируемости Д.Н. Горячева в динамике твердого тела // Мат. сб. – 2014. – **205**, 7. – С. 115–134. `doi:10.1070/SM2014v205n07ABEH004408`.
9. *Борисов А.В., Мамаев И.С.* Динамика твердого тела. – Ижевск: Изд-во РХД, 2001. – 384 с.
10. *Харламов М.П.* Критическое множество и бифуркационная диаграмма задачи о движении волчка Ковалевской в двойном поле // Механика твердого тела. – 2004. – Вып. 34. – С. 47–58.
11. *Kharlamov M.P.* Bifurcation diagrams and critical subsystems of the Kowalevski gyrostat in two constant fields // Hiroshima Math. J. – 2009. – **39**, 3. – P. 327–350. `arXiv:0803.0371`. `ProjectEuclid:1257544212`
12. *Савушкин А.Ю., Харламова И.И.* Бифуркационные диаграммы интегральных отображений волчка с сингулярной симметрией // Механика твердого тела. – 2009. – Вып. 39. – С. 110–120. `arXiv:1310.0770`.
13. *Чаплыгин С.А.* Новое частное решение задачи о движении твердого тела в жидкости // Тр. отд-я физ. наук общества любителей естествознания. – 1903. – **11**, 2. – С. 7–10.

M.P. Kharlamov, H.M. Yehia

Separation of variables in one partial case of motion of a gyrostat in a double field

Dynamically symmetric gyrostat in a double field on conditions of the Kowalevski type possesses a complete involutive set of first integrals. However, in general case this problem is not reduced to quadratures. In this paper for a partial case when the double field admits a one-dimensional symmetry, the reduction is given according to the Routh method. The values of integral constants are chosen in such a way that the reduced system does not have gyroscopic forces. In this natural system with two degrees of freedom the separation of variables leading to hyperelliptic Abel–Jacobi equations is indicated. Non-cyclic combinations of the Euler angles are expressed in terms of separation variables.

Keywords: *gyrostat, double field, separation of variables.*

М.П. Харламов, Х.М. Яхья

Розділення змінних в одному окремому випадку руху гіростата в подвійному полі

Динамічно симетричний гіростат в подвійному полі за умов типу Ковалевської володіє повним інволютивним набором перших інтегралів, проте, у загальному випадку квадратури не знайдені. У поданій статті для окремого випадку, коли подвійне поле допускає одновимірну симетрію, виконано пониження порядку за Раусом. Вибрано значення інтегральних постійних, при яких зведена система не має гіроскопічних сил. У цій натуральній системі з двома степенями вільності указано розділення змінних, що приводить до гіпереліптичних рівнянь Абеля–Якобі. Нециклічні комбінації кутів Ейлера виражено через змінні розділення.

Ключові слова: *гіростат, подвійне поле, розділення змінних.*

Волгоградский филиал РАНХиГС, Россия
Университет г. Мансура, Египет
`mharlamov@vags.ru, hyehia@mans.edu.eg`

Получено 05.03.14