УДК 531.38

©2014. **М.Е. Лесина, Н.Ф. Гоголева**

НОВОЕ РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ О ДВИЖЕНИИ ДВУХ СФЕРИЧЕСКИ СИММЕТРИЧНЫХ ТЕЛ, СОЕДИНЕННЫХ НЕГОЛОНОМНЫМ ШАРНИРОМ

Найдено новое решение задачи о движении по инерции двух сферически симметричных тел S_0, S, соединенных неголономным шарниром. Момент количества движения системы тел перпендикулярен плоскости движения центра масс тела S_0. Записаны уравнения подвижных и неподвижных аксоидов, годографы тел в опорном базисе траектории центра масс тела S_0.

Ключевые слова: *система тел, неголономный шарнир, подвижный и неподвижный аксоиды, годограф, естественный базис.*

Конструкция неголономного шарнира предложена в [1]. Постановка задачи о движении по инерции двух гироскопов Лагранжа, соединенных неголономным шарниром, дана в [2]. В этой задаче получено семь решений в работах [2 – 8]. Алгоритм построения подвижных и неподвижных аксоидов для каждого из тел системы указан в [9].

1. Исходные соотношения. Для задачи о движении по инерции двух гироскопов Лагранжа S_0, S, соединенных неголономным шарниром, получено несколько форм уравнений движения [2]. Приведем одну из них:

$$\dot G_1 = \omega_3 G_2 - \omega_2 G_3, \qquad \dot G_2 = \omega_1 G_3 - \omega_3 G_1, \qquad \dot G_3 = \omega_2 G_1 - \omega_1 G_2; \tag{1}$$

здесь $\boldsymbol{g} = G_1\boldsymbol{e}_1 + G_2\boldsymbol{e}_2 + G_3\boldsymbol{e}_3$ – момент количества движения системы тел, $\boldsymbol{\omega} = \omega_1\boldsymbol{e}_1 + \omega_2\boldsymbol{e}_2 + \omega_3\boldsymbol{e}_3$ – угловая скорость полуподвижного базиса $O\boldsymbol{e}_1\boldsymbol{e}_2\boldsymbol{e}_3$, связанная с S (O – точка пересечения $O\boldsymbol{e}_3$ и $O\boldsymbol{e}_3^{(0)}$ – осей динамической симметрии тел):

$$\begin{gathered} G_1 = (A - N\cos\theta)\omega_1 + (A_0 - N\cos\theta)\Omega_1, \\ G_2 = (A - N\cos\theta)\omega_2 + (A_0\cos\theta - N)\Omega_2 - n_0\sin\theta, \\ G_3 = (A_0\Omega_2 - N\omega_1)\sin\theta + n + n_0\cos\theta, \end{gathered} \tag{2}$$

$\boldsymbol{\Omega}_1 = \Omega_1\boldsymbol{e}_1 + \Omega_2\boldsymbol{e}_2^0 + \Omega_3\boldsymbol{e}_3^0$ – угловая скорость полуподвижного базиса $O\boldsymbol{e}_1\boldsymbol{e}_2^0\boldsymbol{e}_3^0$, связанного с телом S_0, который повернут на угол θ относительно $O\boldsymbol{e}_1\boldsymbol{e}_2\boldsymbol{e}_3$:

$$\boldsymbol{e}_2^0 = \boldsymbol{e}_2\cos\theta + \boldsymbol{e}_3\sin\theta, \qquad \boldsymbol{e}_3^0 = -\boldsymbol{e}_2\sin\theta + \boldsymbol{e}_3\cos\theta. \tag{3}$$

Величины Ω_i и ω_i связаны соотношениями

$$\Omega_1 = \omega_1 + \dot\theta, \tag{4}$$

$$\Omega_2 = \omega_2 \cos\theta + \omega_3 \sin\theta, \tag{5}$$

$$\Omega_3 = -\omega_1 \sin\theta + \omega_3 \cos\theta. \tag{6}$$

Угловые скорости тел S и S_0 таковы

$$\boldsymbol{\omega}_* = \omega_1 \boldsymbol{e}_1 + \omega_2 \boldsymbol{e}_2 + (\omega_3 + \dot\varphi)\boldsymbol{e}_3, \tag{7}$$

$$\boldsymbol{\Omega}_* = \Omega_1 \boldsymbol{e}_1 + \omega_2 \boldsymbol{e}_2 + (\Omega_3 + \dot\Phi)\boldsymbol{e}_3^0, \tag{8}$$

$\dot\varphi$ и $\dot\Phi$ – скорости собственных вращений тел вокруг осей динамической симметрии $\boldsymbol{e}_3$ и $\boldsymbol{e}_3^0$, которые пересекаются в точке O:

$$\frac{n}{I} = \omega_3 + \dot\varphi, \tag{9}$$

$$\frac{n_0}{I_0} = \Omega_3 + \dot\Phi. \tag{10}$$

Здесь I, I – .... (?) .

Величины n и n_0 изменяются во времени:

$$\dot n = L\cos\theta, \tag{11}$$

$$\dot n_0 = -L. \tag{12}$$

Взаимодействие тел S и S_0 в неголономном шарнире обеспечивает момент $\mathbf{L} = -L\boldsymbol{e}_3^0$, характеризующий действие через этот шарнир тела S_0 на S.

Наличие неголономного шарнира связывает угловые скорости собственного вращения тел

$$\dot\Phi = \dot\varphi\cos\theta. \tag{13}$$

Исключив L из уравнений (11), (12), получим

$$\dot n = -\dot n_0 \cos\theta. \tag{14}$$

Подставив (6), (13) в (10) и исключив $\dot\varphi$ из (9), (10), получим соотношение

$$\omega_2 \sin\theta = \frac{n}{I}\cos\theta - \frac{n_0}{I_0}. \tag{15}$$

В работе [2] найдены интегралы уравнений движения системы

$$G_1^2 + G_2^2 + G_3^2 = g^2, \tag{16}$$

$$A(\omega_1^2+\omega_2^2) + A_0(\Omega_1^2+\Omega_2^2) - 2N(\Omega_1\omega_1\cos\theta + \Omega_2\omega_2) + \frac{n^2}{I} + \frac{n_0^2}{I_0} + 2\Pi(\theta) = 2h. \tag{17}$$

Здесь $\Pi(\theta)$ – потенциальная энергия упругого элемента.

2. Инвариантное соотношение. Зададим инвариантное соотношение в виде

$$G_3 = 0, \tag{18}$$

тогда из интеграла (16) следует

$$G_1 = g\cos\alpha, \qquad G_2 = g\sin\alpha. \tag{19}$$

Подстановка (18), (19) в уравнения (1) приводит к равенствам

$$\dot\alpha = -\omega_3, \tag{20}$$

$$\omega_1 = \sigma\cos\alpha, \qquad \omega_2 = \sigma\sin\alpha. \tag{21}$$

Внесем (21), (4), (5) в (2), (15), получим

$$\dot\theta = \frac{g-(A+A_0-2N\cos\theta)\sigma}{A_0-N\cos\theta}\cos\alpha, \tag{22}$$

$$(A-N\cos\theta)\sigma\sin\alpha+(A_0\cos\theta-N)(\sigma\sin\alpha\cos\theta-\dot\alpha\sin\theta)-n_0\sin\theta = g\sin\alpha, \tag{23}$$

$$A_0(\sigma\sin\alpha\sin\theta-\dot\alpha\sin\theta)\sin\theta-N\sigma\sin\theta\sin\alpha+n+n_0\cos\theta=0,$$

$$\sigma\sin\theta\sin\alpha-\frac{n}{I}\cos\theta+\frac{n_0}{I_0}=0. \tag{24}$$

Таким образом, для определения зависимости величин $\sigma, n, n_0, \alpha, \theta$ от времени t имеем пять уравнений (14), (22)–(24). Из линейной относительно $\sigma, \dot\alpha, n_0$ системы уравнений (23), (24) определим

$$\sigma = -\Big\{(A_0-N\cos\theta)\frac{n}{I}\cos\theta+\frac{1}{I_0}\big[A_0 g\sin\theta\sin\alpha+(A_0\cos\theta-N)n\big]\Big\}\frac{\sin\theta}{\Delta}, \tag{25}$$

$$\begin{aligned}\dot\alpha = -\Big\{&g\sin\theta\sin\alpha\Big[\frac{1}{I_0}(A_0\cos\theta-N)-\cos\theta\Big]+\big[A-N\cos\theta+\\ &+(A_0\cos\theta-N)\cos\theta\big]\frac{n}{I_0}+n\sin^2\theta+\\ &+\big[(A-N\cos\theta)\cos\theta+A_0\cos\theta-N\big]\frac{n}{I}\cos\theta\Big\}\frac{\sin\alpha}{\Delta},\end{aligned} \tag{26}$$

$$n_0 = \Big[(A_0\cos\theta-N)n+A_0 g\sin\theta\sin\alpha-\frac{AA_0-N^2}{I}n\cos\theta\Big]\frac{1}{\Delta}\sin^2\theta\sin\alpha, \tag{27}$$

где

$$\Delta = -\big[A_0-N\cos\theta+(AA_0-N^2)/I_0\big]\sin^2\theta\sin\alpha. \tag{28}$$

С помощью (22) перейдем в (26) к дифференцированию по θ:

$$\alpha' = f_1(\alpha, n, \theta). \tag{29}$$

Продифференцируем (27) по θ и подставим результат и (29) в уравнение

$$n' = -n_0' \cos\theta \tag{30}$$

(следствие (14)):

$$n' = f_1(\alpha, n, \theta). \tag{31}$$

Так как эти уравнения громоздки, ограничимся частным случаем

$$N = 0 \tag{32}$$

(точка O совпадает с центром масс одного из тел системы). При этом условии неконкретизированные уравнения (31), (29) примут вид

$$\Big(1 + \frac{A}{I_0}\Big)\frac{n'}{\cos\theta} = \Big(1 - \frac{A}{I}\Big)(n\cos\theta)' + g(\sin\theta\sin\alpha)', \tag{33}$$

$$\alpha' = \frac{[(A_0 - I_0)g\sin\theta\cos\theta\sin\alpha + (1 + \frac{I_0}{I})(A + A_0)n\cos^2\theta + (A + I_0)n\sin^2\theta]\sin\alpha}{\{(A + I_0)g\sin\theta\sin\alpha - (A + A_0)[(1 + \frac{I_0}{I})n\cos\theta + g\sin\theta\sin\alpha]\}\sin\theta\cos\alpha}. \tag{34}$$

Преобразуем (34) к такому уравнению:

$$(\sin\theta\sin\alpha)' = -\frac{(A + I_0)n\sin^2\theta\sin\alpha}{(A_0 - I_0)g\sin\theta\sin\alpha + 1 + \frac{I_0}{I}(A + A_0)n\cos\theta}. \tag{35}$$

Заменой

$$\chi = \sin\theta\sin\alpha \tag{36}$$

приведем систему (35), (33) к следующей:

$$\chi' = \frac{-(A + I_0)n\chi\sin\theta}{(A_0 - I_0)g\chi + (A + A_0)(1 + \frac{I_0}{I})n\cos\theta}, \tag{37}$$

$$\Big[1 + \frac{A}{I_0}(\frac{A}{I} - 1)\cos^2\theta\Big]n' = \Big(\frac{A}{I} - 1\Big)n\sin\theta\cos\theta -$$
$$-\frac{(A + I_0)n\chi g\sin\theta\cos\theta}{(A_0 - I_0)\chi g + (A + A_0)(1 + \frac{I_0}{I}n\cos\theta)}. \tag{38}$$

Вместо θ введем переменную

$$u = \cos\theta \tag{39}$$

и перейдем в уравнениях (37), (38) от дифференцирования по θ к дифференцированию по u. Тогда эти уравнения запишем так:

$$\frac{d\chi}{du} = \frac{(A + I_0)n\chi}{(A_0 - I_0)g\chi + (A + A_0)(1 + \frac{I_0}{I})nu}, \tag{40}$$

$$\left[1+\frac{A}{I_0}(\frac{A}{I}-1)u^2\right]\frac{dn}{du}=-\left(\frac{A}{I}-1\right)nu+\frac{(A+I_0)gn\chi u}{(A_0-I_0)g\chi+(A+A_0)(1+\frac{I_0}{I}nu)}. \quad (41)$$

Эти уравнения существенно упрощаются, если тензор инерции тела S_0 шаровой:

$$A_0=I_0, \quad (42)$$

при этом уравнение (40), принимающее вид $\dfrac{d\chi}{du}=\dfrac{I\chi}{(I+I_0)u}$, имеет общий интеграл

$$\chi(u)=c_*u^\lambda, \quad (43)$$

где вместо параметра I_0 введен параметр λ :

$$\lambda=\frac{I}{I+I_0}. \quad (44)$$

Отметим, что $\lambda\in(0;1)$,

$$I_0=\frac{1-\lambda}{\lambda}I. \quad (45)$$

Из (36), (39), (43) следует, что

$$\sin\alpha(u)=\frac{c_*u^\lambda}{\sqrt{1-u^2}}. \quad (46)$$

Внесем условие (42), обозначение (44), функцию (46) в уравнение (41):

$$\left[1+\frac{A}{I_0}+\left(\frac{A}{I}-1\right)u^2\right]\frac{dn}{du}+\left(\frac{A}{I}-1\right)nu=c_*g\lambda u^\lambda.$$

Общее решение этого линейного дифференциального уравнения таково:

$$n(u)=\frac{1}{\sqrt{1+\frac{A}{I_0}+(\frac{A}{I}-1)u^2}}(c_1+c_2\lambda g)\int\frac{u^\lambda du}{\sqrt{1+\frac{A}{I_0}+(\frac{A}{I}-1)u^2}}. \quad (47)$$

При $\lambda=\dfrac{1}{2}$ имеем эллиптический интеграл, для остальных значений $\lambda\in(0;1)$ интеграл в правой части по теореме Чебышева относится к "неберущимся". Поэтому дополнительно к условию (42) потребуем, чтобы

$$A=I, \quad (48)$$

тогда (47) представим так: $n(u)=c_1+c_2g\dfrac{\lambda(1-\lambda)}{1+\lambda}u^{\lambda+1}$. Полагая постоянную интегрирования $c_1=0$, ограничимся частным решением

$$n(u)=c_*g\frac{\lambda(1-\lambda)}{1+\lambda}u^{1+\lambda}. \quad (49)$$

При условиях (42), (48), обозначениях (39), (44) и функциях (43), (49) из (30)–(34), (20) получаем

$$\sigma(u) = \frac{g\lambda}{I(1+\lambda)}\big[(1-\lambda)u^2 + 1 + \lambda\big], \tag{50}$$

$$\dot{\alpha}(u) = -\omega_3(u) = \frac{g\lambda}{I(1+\lambda)}\big[(1-\lambda)u^2 + \lambda\big]c_* u^{1+\lambda}, \tag{51}$$

$$\dot{u} = -\dot{\theta}\sqrt{1-u^2} = \frac{g\lambda}{I(1+\lambda)}u^2\sqrt{1-u^2-c_*^2u^{2\lambda}}, \tag{52}$$

$$n_0(u) = -g(1-\lambda)c_* u^{\lambda}. \tag{53}$$

Компоненты угловой скорости $\omega_1, \omega_2, \dfrac{n}{I}$ тела S в полуподвижном базисе $\boldsymbol{O}\boldsymbol{e}_1\boldsymbol{e}_2\boldsymbol{e}_3$ получим из (21), (49), подставив в них (50), (46):

$$\omega_1(u) = \frac{g\lambda}{I(1+\lambda)}\big[(1-\lambda)u^2 + 1 + \lambda\big]\sqrt{1 - \frac{c_*^2u^2}{1-u^2}}, \tag{54}$$

$$\omega_2(u) = \frac{g\lambda}{I(1+\lambda)}\big[(1-\lambda)u^2 + 1 + \lambda\big]\frac{c_* u^{\lambda}}{\sqrt{1-u^2}}, \tag{55}$$

$$\frac{n(u)}{I} = \frac{g\lambda}{I(1+\lambda)}(1-\lambda)c_* u^{1+\lambda}. \tag{56}$$

Компоненты угловой скорости $\omega_1^*(u), \omega_2^*(u)$ тела S в неизменно связанном с ним базисе $\mathbf{O}\ \boldsymbol{e}_1^*\boldsymbol{e}_2^*\boldsymbol{e}_3^*$ связаны с компонентами ω_1, ω_2 соотношениями [9]:

$$\omega_1^*(u) = \omega_1(u)\cos\varphi(u) + \omega_2(u)\sin\varphi(u), \tag{57}$$

$$\omega_2^*(u) = -\omega_1(u)\sin\varphi(u) + \omega_2(u)\cos\varphi(u). \tag{58}$$

Для определения $\dot{\varphi}(u)$ подставим (56), (51) в (9):

$$\dot{\varphi}(u) = \frac{g\lambda}{I(1+\lambda)}\frac{c_* u^{1+\lambda}}{1-u^2} \tag{59}$$

и учтем (52):

$$\varphi(u) - \varphi_0 = \int\limits_{u_0}^{u} \frac{c_* u^{1-\lambda}du}{(1-u^2)\sqrt{1 + \frac{A}{I_0} + (\frac{A}{I} - 1)u^2}}. \tag{60}$$

Аналогично для тела S_0 вначале запишем компоненты $\Omega_1, \Omega_2, \dfrac{n_0}{I_0}$ в его полуподвижном базисе, для этого внесем в (4), (5), (53) величины (51), (52), (54), (55), (45):

$$\Omega_1(u) = \frac{g\lambda}{I(1+\lambda)}(-\lambda u^2 + 1 + \lambda)\sqrt{1 - \frac{c_*^2u^{2\lambda}}{1-u^2}},$$

$$\Omega_2(u) = \frac{g\lambda}{I(1+\lambda)} \frac{c_* u^{1+\lambda}}{\sqrt{1-u^2}}\,, \tag{61}$$

$$\frac{n_0(u)}{I_0} = -\frac{g\lambda}{I} c_* u^\lambda.$$

Компоненты угловых скоростей $\Omega_1^*(u), \Omega_2^*(u)$ в неизменно связанном с телом S_0 базисе $O\boldsymbol{e}_1^{0*}\boldsymbol{e}_2^{0*}\boldsymbol{e}_3^{0*}$ находим из соотношений [9]:

$$\Omega_1^*(u) = \Omega_1(u)\cos\Phi(u) + \Omega_2(u)\sin\Phi(u), \tag{62}$$

$$\Omega_2^*(u) = -\Omega_1(u)\cos\Phi(u) + \Omega_2(u)\sin\Phi(u). \tag{63}$$

Угол $\Phi(u)$ находим из условия неголономности шарнира (13) с учетом (59), (52)

$$\Phi(u) - \Phi_0 = \int\limits_{u_0}^{u} \frac{c_* u^\lambda du}{(1-u^2)\sqrt{1-u^2-c_*^2 u^2}}. \tag{64}$$

Зависимость вспомогательной переменной $u = \cos\theta$ от времени t находим обращением квадратуры (52):

$$\frac{I(1+\lambda)}{g\lambda}(t-t_0) = t_* = \int \frac{du}{u^2\sqrt{1-u^2-c_*^2 u^{2\lambda}}}. \tag{65}$$

Для завершения построения решения необходимо указать потенциальную энергию $\Pi(u)$ упругого элемента и величину момента L в неголономном шарнире. Учтем условия (29), (42), (48), внесем (54)–(56), (61) в интеграл (17) и получим

$$2\Pi(u) = 2h - \frac{g^2\lambda}{I} - \frac{g^2\lambda^2(1-\lambda)}{I(1+\lambda)^2}\big(u^4 + c_*^2 u^{2(\lambda+1)}\big). \tag{66}$$

Величину момента L определим из (12), подставив в него (53), (52):

$$L(u) = \frac{g^2\lambda^2(1-\lambda)}{I(1+\lambda)} c_* u^{\lambda+1}\sqrt{1-u^2-c_*^2 u^{2\lambda}}. \tag{67}$$

Таким образом, решение задачи определено соотношениями (52)–(67).

3. Аксоиды тела S. Подвижный аксоид тела S [9]

$$\boldsymbol{\xi} = \mu\frac{\boldsymbol{\omega}_*}{\omega^*} + \frac{\boldsymbol{\omega}_\times \boldsymbol{v}}{\omega_*^2} \tag{68}$$

представлен сначала в полуподвижном базисе: $\boldsymbol{\xi} = \xi_1\boldsymbol{e}_1 + \xi_2\boldsymbol{e}_2 + \xi_3\boldsymbol{e}_3$. Условие (32) запишем в виде $(m+m_0)aa_0 = 0$. Из двух вариантов $a = 0$ или $a_0 = 0$ выберем второй

$$a_0 = 0 \tag{69}$$

(центр тела S_0 совпадает с точкой O).

Для вектора $\boldsymbol{r}_* = C_*O$ (C_* – центр масс системы тел) в [9] получено выражение $\boldsymbol{r}_* = -a\boldsymbol{e}_3 - a_0\boldsymbol{e}_3^0$, которое, вследствие (69), таково

$$\boldsymbol{r}_* = -a\boldsymbol{e}_3. \tag{70}$$

Скорость и ускорение точки O с учетом (69) таковы:

$$\boldsymbol{v} = \dot{\boldsymbol{r}}_* = -a(\omega_2\boldsymbol{e}_1 - \omega_1\boldsymbol{e}_2), \tag{71}$$

$$\boldsymbol{w} = \dot{\boldsymbol{v}} = a[-(\dot{\omega}_1 + \omega_3\omega_1)\boldsymbol{e}_1 + (\dot{\omega}_1 - \omega_1\omega_3)\boldsymbol{e}_2 + (\omega_1^2 + \omega_2^2)\boldsymbol{e}_3]. \tag{72}$$

Внесем (71) в (68) и получим

$$\boldsymbol{\xi} = a\boldsymbol{e}_3 + F(u,\mu)\boldsymbol{\omega}_*, \tag{73}$$

$$\xi_1(u) = F(\mu,u)\omega_1(u), \qquad \xi_2(u) = F(\mu,u)\omega_2(u), \tag{74}$$

$$\xi_3(u) = a + F(\mu,u)\frac{n(u)}{I}, \tag{75}$$

где

$$F(\mu,u) = \frac{\mu}{\omega_*(u)} - \frac{an(u)}{\omega_*^2(u)}, \qquad \omega_*^2(u) = \omega_1^2(u) + \omega_2^2(u) + \frac{n^2(u)}{I^2}.$$

С учетом (54)–(56) имеем

$$\omega_*^2(u) = \frac{g^2\lambda^2}{I^2(1+\lambda)^2}\widetilde{\omega}_*^2(u) = \frac{g^2\lambda^2}{I^2(1+\lambda)^2}\Big\{\big[(1-\lambda)u^2 + 1 + \lambda\big]^2 + (1-\lambda)^2c_*^2u^{2\lambda+2}\Big\}. \tag{76}$$

В неизменно связанном с телом S базисе аксоид (73) имеет разложение $\boldsymbol{\xi} = \xi_1^*(\mu,u)\boldsymbol{e}_1^* + \xi_2^*(\mu,u)\boldsymbol{e}_2^* + \xi_3(\mu,u)\boldsymbol{e}_3$, которое получаем с учетом (57), (58):

$$\begin{aligned} \xi_1^*(\mu,u) &= F(\mu,u)(\omega_1(u)\cos\varphi(u) + \omega_2(u)\sin\varphi(u)), \\ \xi_2^*(\mu,u) &= F(\mu,u)(-\omega_1(u)\sin\varphi(u) + \omega_2(u)\cos\varphi(u)). \end{aligned} \tag{77}$$

Подставив в (77), (76) соотношения (54)–(56), (60), получим явные зависимости от u компонент подвижного аксоида.

Неподвижный аксоид тела $\boldsymbol{S}$**.** Зная скорость (71) и ускорение (72) точки O, определим кривизну и кручение [10] траектории точки. Бинормаль

$$\mathbf{B} = \boldsymbol{v} \times \boldsymbol{w} = B_1\boldsymbol{e}_1 + B_2\boldsymbol{e}_2 + B_3\boldsymbol{e}_3,$$

как следует из (71), (72), такова:

$$\mathbf{B} = a^2(\omega_1^2 + \omega_2^2)(\omega_1\boldsymbol{e}_1 + \omega_2\boldsymbol{e}_2). \tag{78}$$

($\mathbf{B}$ коллинеарен $\boldsymbol{g}$, а следовательно, сохраняет направление в пространстве).

Кривизна $\varkappa = \dfrac{B}{v^3}$ траектории точки O, вследствие (78), (71), равна

$$\varkappa = \frac{1}{a}. \tag{79}$$

Для определения кручения траектории

$$\varkappa^0 = \frac{\dot{\boldsymbol{w}} \cdot \mathbf{B}}{B^2} \tag{80}$$

находим из (72) вектор $\dot{\boldsymbol{w}}$:

$$\dot{\boldsymbol{w}} = a\Big\{\boldsymbol{e}_1\big[-(\dot\omega_2 + \omega_3\omega_1)^{\bullet}\omega_3\dot\omega_1 + \omega_2\omega_*^2\big] + \boldsymbol{e}_2\big[(\dot\omega_1 - \omega_2\omega_3)^{\bullet}\omega_3\dot\omega_2 - \omega_1\omega_*^2\big] +$$
$$+3\boldsymbol{e}_3(\omega_1\dot\omega_1 + \omega_2\dot\omega_2)\Big\}. \tag{81}$$

Подставив (81), (78) в (80), находим, что

$$\varkappa^0 = 0. \tag{82}$$

Условия (79), (82) определяют окружность радиуса a в плоскости, перпендикулярной бинормали. Выберем неподвижный базис $C_*\mathbf{E}_1\mathbf{E}_2\mathbf{E}_3$. Вектор $\mathbf{E}_3$ с вершиной в центре масс системы направим по бинормали. Введем угол ψ между $\mathbf{E}_1$ и $\boldsymbol{r}_* = \boldsymbol{C}_*\mathbf{O}$, тогда

$$\boldsymbol{r}_* = a(\mathbf{E}_1 \cos\psi + \mathbf{E}_2 \sin\psi), \tag{83}$$

$$\boldsymbol{v} = \dot{\boldsymbol{r}}_* = a\dot\psi(-\mathbf{E}_1 \sin\psi + \mathbf{E}_2 \cos\psi), \qquad \mathbf{B} = B\mathbf{E}_3. \tag{84}$$

Для определения $\dot\psi$ используем (84), (71), (21)

$$\dot\psi = \sigma(u), \tag{85}$$

т. е.

$$\boldsymbol{v} = a\sigma(-\mathbf{E}_1 \sin\psi + \mathbf{E}_2 \cos\psi). \tag{86}$$

Для установления связи между полуподвижным $C_*\boldsymbol{e}_1\boldsymbol{e}_2\boldsymbol{e}_3$ и неподвижным базисами представим орты векторов $\boldsymbol{r}_*, \boldsymbol{v}, \mathbf{B}$ в обоих базисах:

$$-\boldsymbol{e}_1 = a(\mathbf{E}_1 \cos\psi + \mathbf{E}_2 \sin\psi), \quad -\boldsymbol{e}_1 \sin\alpha + \boldsymbol{e}_2 \cos\alpha = -\mathbf{E}_1 \sin\psi + \mathbf{E}_2 \cos\psi,$$
$$\boldsymbol{e}_1 \cos\alpha + \boldsymbol{e}_2 \sin\alpha = \mathbf{E}_3. \tag{87}$$

Отсюда получаем

$$\boldsymbol{e}_1 = \mathbf{E}_1 \sin\alpha \sin\psi - \mathbf{E}_2 \sin\alpha \cos\psi + \mathbf{E}_3 \cos\alpha,$$

$$\boldsymbol{e}_2 = -\mathbf{E}_1 \cos\alpha \sin\psi + \mathbf{E}_2 \cos\alpha \cos\psi + \mathbf{E}_3 \sin\alpha, \tag{88}$$

$$
\begin{gathered}
\boldsymbol{e}_3 = -\mathbf{E}_1 \cos\psi - \mathbf{E}_2 \sin\psi; \\
\mathbf{E}_1 = \boldsymbol{e}_1 \sin\alpha \sin\psi - \boldsymbol{e}_2 \cos\alpha \sin\psi - \boldsymbol{e}_3 \cos\psi, \\
\mathbf{E}_2 = -\boldsymbol{e}_1 \cos\alpha \sin\psi + \boldsymbol{e}_2 \cos\alpha \cos\psi + \boldsymbol{e}_3 \sin\alpha, \\
\mathbf{E}_3 = \boldsymbol{e}_1 \cos\alpha + \boldsymbol{e}_2 \sin\alpha.
\end{gathered} \tag{89}
$$

Угловую скорость $\boldsymbol{\omega}_* = \sigma(\boldsymbol{e}_1 \cos\alpha + \boldsymbol{e}_2 \sin\alpha) + \dfrac{n}{I}\boldsymbol{e}_3$ тела S, вследствие (88), можно представить в неподвижном базисе: $\boldsymbol{\omega}_* = p_1\mathbf{E}_1 + p_2\mathbf{E}_2 + p_3\mathbf{E}_3$,

$$
p_1 = -\frac{n}{I}\cos\psi, \quad p_2 = -\frac{n}{I}\sin\psi, \quad p_3 = \sigma. \tag{90}
$$

Неподвижный аксоид тела S имеет вид [9]

$$
\boldsymbol{\zeta} = \boldsymbol{r}_* + \mu\frac{\boldsymbol{\omega}_*}{\omega_*} + \frac{\boldsymbol{\omega}_* \times \boldsymbol{v}}{\omega_*^2}.
$$

С учетом (68), (73), (70) его можно представить, как

$$
\boldsymbol{\zeta}(\mu, u) = F(\mu, u)\boldsymbol{\omega}_*(u),
$$

а так как вектор $\boldsymbol{\omega}_*(u)$ в неподвижном базисе имеет компоненты (90), то неподвижный аксоид $\boldsymbol{\zeta}(\mu, u) = \zeta_1(\mu, u)\mathbf{E}_1 + \zeta_2(\mu, u)\mathbf{E}_2 + \zeta_3(\mu, u)\mathbf{E}_3$ имеет компоненты

$$
\begin{gathered}
\xi_1(\mu, u) = -F(\mu, u)\frac{n(u)}{I}\cos\psi(u), \\
\xi_2(\mu, u) = -F(\mu, u)\frac{n(u)}{I}\sin\psi(u), \\
\xi_3(\mu, u) = F(\mu, u)\sigma(u).
\end{gathered} \tag{91}
$$

Зависимость $\psi(u)$ находим квадратурой из (85) с учетом (50), (52)

$$
\psi(u) - \psi_0 = \int\limits_{u_0}^{u} \frac{[(1-\lambda)u^2 + 1 + \lambda]du}{u^2\sqrt{1 - u^2 - c_*^2 u^{2\lambda}}}. \tag{92}
$$

Векторы $\boldsymbol{\omega}_*$ и $\boldsymbol{v}$ ортогональны, так как их скалярное произведение, вследствие (90), (84), равно нулю.

При движении тела S его подвижный аксоид (75)–(77) катится без скольжения ($v_c = \dfrac{\boldsymbol{\omega}_* \cdot \boldsymbol{v}}{\omega_*} = 0$) по неподвижному (91), (92) аксоиду.

4. Аксоиды тела $\mathbf{S_0}$. Неподвижный аксоид тела S_0 представим разложением в неподвижном базисе: $\boldsymbol{\zeta}^0 = \zeta_1^0\mathbf{E}_1 + \zeta_2^0\mathbf{E}_2 + \zeta_3^0\mathbf{E}_3$. Так как векторы (83), (84) в этом базисе известны, необходимо найти $\boldsymbol{\Omega}_* = q_1\mathbf{E}_1 + q_2\mathbf{E}_2 + q_3\mathbf{E}_3$. Для этого в (8) внесем (3), (10), (61), (88):

$$
\boldsymbol{\Omega}_* = \mathbf{E}_1\Omega_\rho \cos\psi + \mathbf{E}_2\Omega_\rho \sin\psi + \mathbf{E}_3\Omega_\nu, \tag{94}
$$

где
$$\Omega_\rho(u) = \frac{g\lambda^2}{I(1+\lambda)} c_* u^{1+\lambda}, \qquad \Omega_\nu(u) = \frac{g\lambda}{I(1+\lambda)}(-\lambda u^2 + 1 + \lambda). \tag{95}$$

Подставив (3), (10), (61), (88) в (93), получим компоненты $\zeta_i^0(\mu, u)$:
$$\begin{gathered}\zeta_1^0(\mu,u) = \big[a + F_0(\mu,u)\big]\cos\psi(u),\\ \zeta_2^0(\mu,u) = \big[a + F_0(\mu,u)\big]\sin\psi(u),\\ \zeta_3^0(\mu,u) = F_*(\mu,u),\end{gathered} \tag{96}$$

где
$$\begin{gathered}F_0(\mu,u) = \mu\frac{\Omega_\rho(u)}{\omega_*(u)} - \frac{a\sigma(u)\Omega_\nu(u)}{\Omega_*^2(u)},\\ F_*(\mu,u) = \mu\frac{\Omega_\nu(u)}{\Omega_*(u)} + \frac{a\sigma(u)\Omega_\rho(u)}{\Omega_*^2(u)},\end{gathered} \tag{97}$$
$$\Omega_*^2(u) = \Omega_1^2(u) + \Omega_2^2(u) + \frac{n_0^2(u)}{I_0^2} = \frac{g^2\lambda^2}{I^2(1+\lambda)^2}\widetilde{\Omega}_*^2(u).$$

Вследствие (95), (50), (61) из (97) имеем
$$\begin{gathered}F_0(\mu,u) = \frac{\mu}{\widetilde{\Omega}_*(u)}\lambda c_* u^{\lambda+1} - \frac{a}{\widetilde{\Omega}_*^2(u)}\big[(1-\lambda)u^2 + 1 + \lambda\big](-\lambda u^2 + 1 + \lambda),\\ F_*(\mu,u) = \frac{\mu}{\widetilde{\Omega}_*(u)}(-\lambda u^2 + 1 + \lambda) + \frac{a}{\widetilde{\Omega}_*^2(u)}\big[(1-\lambda)u^2 + 1 + \lambda\big]\lambda c_* u^{\lambda+1},\end{gathered} \tag{98}$$
$$\widetilde{\Omega}_*^2(u) = (-\lambda u^2 + 1 + \lambda)^2 + \lambda^2 c_*^2 u^{2\lambda+2}. \tag{99}$$

Подвижный аксоид $\boldsymbol{\xi}^0 = \mu\dfrac{\boldsymbol{\Omega}_*}{\Omega_*} + \dfrac{\boldsymbol{\Omega}_*\times\boldsymbol{v}}{\Omega_*^2}$ тела S_0 уже имеет разложение в базисе $\mathbf{OE}_1\mathbf{E}_2\mathbf{E}_3$:
$$\boldsymbol{\xi}_0 = F_0(\mathbf{E}_1\cos\psi + \mathbf{E}_2\sin\psi) + F_*\mathbf{E}_3,$$
которое, с учетом (87), представим в виде $\boldsymbol{\xi}_0 = F_*(\boldsymbol{e}_1\cos\alpha + \boldsymbol{e}_2\sin\alpha) - F_0\boldsymbol{e}_3$. Учтем связь (33) между базисами $O\boldsymbol{e}_1\boldsymbol{e}_2\boldsymbol{e}_3$ и $O\boldsymbol{e}_1\boldsymbol{e}_2^0\boldsymbol{e}_3^0$ и получим разложение $\boldsymbol{\xi}^0 = \xi_1^0\boldsymbol{e}_1 + \xi_2^0\boldsymbol{e}_2^0 + \xi_3^0\boldsymbol{e}_3^0$, где
$$\xi_1^0 = F_*\cos\alpha, \qquad \xi_2^0 = F_*\cos\theta\sin\alpha - F_0\sin\theta, \qquad \xi_3^0 = -F_*\sin\theta\sin\alpha - F_0\cos\theta,$$
которые, с учетом (39), (46), таковы
$$\xi_1^0(\mu,u) = F_*(\mu,u)\sqrt{1 - \frac{c_*^2u^{2\lambda}}{1-u^2}},$$

$$\xi_2^0(\mu,u)=F_*(\mu,u)\frac{c_* u^{\lambda+1}}{\sqrt{1-u^2}}-F_0(\mu,u)\sqrt{1-u^2},$$

$$\xi_3^0(\mu,u)=-F_*(\mu,u)c_*^2u^\lambda-uF_0(\mu,u)$$

(зависимости $F(\mu,u),F_*(\mu,u)$ указаны соотношениями (98)). Компоненты этого аксоида в неизменно связанном с телом S_0 базисе $O\boldsymbol{e}_1^{0*}\boldsymbol{e}_2^{0*}\boldsymbol{e}_3^0$ получим по аналогии с (62), (63): $\boldsymbol{\xi}_0=\xi_1^{0*}\boldsymbol{e}_1^{0*}+\xi_2^{0*}\boldsymbol{e}_2^{0*}+\xi_3^0\boldsymbol{e}_3^0$,

$$\xi_1^{0*}(\mu,u)=\xi_1^0(\mu,u)\cos\Phi(u)+\xi_2^0(\mu,u)\sin\Phi(u),$$

$$\xi_2^{0*}(\mu,u)=-\xi_1^0(\mu,u)\sin\Phi(u)+\xi_2^0(\mu,u)\cos\Phi(u), \tag{100}$$

$$\xi_3^{0*}(\mu,u)=-F_*(\mu,u)c_*u^\lambda-uF_0(\mu,u).$$

При движении тела S_0 его подвижный аксоид (100) катится по неподвижному (96). Это движение происходит без скольжения, так как скорость скольжения v_c^0, как следует из (84), (94), равна нулю.

5. Движение тел в естественном базисе. Движение точки O известно – это движение по окружности радиуса a со скоростью $\boldsymbol{v}$. Введем на этой траектории естественный базис [11]

$$\text{э}_1=\frac{\boldsymbol{v}}{v},\qquad \text{э}_2=\frac{\mathbf{B}\times\boldsymbol{v}}{Bv},\qquad \text{э}_3=\frac{\mathbf{B}}{B}. \tag{101}$$

Орты векторов $\mathbf{B}$ и $\boldsymbol{v}$ имеют разложение (87), поэтому

Угловая скорость $\boldsymbol{\omega}^0=(\varkappa^0\ \text{э}_1+\varkappa\ \text{э}_3)v$ естественного базиса [11], вследствие (79), (82), такова:

$$\boldsymbol{\omega}^0=\sigma\ \text{э}_3\ . \tag{102}$$

По отношению к естественному базису тело S имеет угловую скорость $\widetilde{\boldsymbol{\omega}}=\boldsymbol{\omega}_*-\boldsymbol{\omega}^0$, которую с учетом (7), (9), (21), (101), (102) представим в виде

$$\widetilde{\boldsymbol{\omega}}=\frac{n}{I}\ \text{э}_3=\widetilde{\omega}_2\ \text{э}_2\ .$$

Таким образом, тело S вращается вокруг оси $\boldsymbol{e}_3$, которая является нормалью к траектории, с угловой скоростью $\dfrac{n(u)}{I}$ и движется по окружности.

Тело S_0 по отношению к естественному базису имеет угловую скорость

$$\widetilde{\boldsymbol{\Omega}}=\boldsymbol{\Omega}_*-\boldsymbol{\omega}^0. \tag{103}$$

Из представления (94) $\Omega_*=\Omega_\rho(\mathbf{E}_1\cos\psi+\mathbf{E}_2\sin\psi)+\Omega_\nu\mathbf{E}_3$, вследствие (87), имеем

$$\widetilde{\boldsymbol{\Omega}}=(\boldsymbol{e}_1\cos\alpha+\boldsymbol{e}_2\sin\alpha)\Omega_\nu-\boldsymbol{e}_3\Omega_\rho. \tag{104}$$

Подставив (104), (102), (101) в (103), находим

$$\widetilde{\boldsymbol{\Omega}}=(\boldsymbol{e}_1\cos\alpha+\boldsymbol{e}_2\sin\alpha)(\Omega_\nu-\sigma)-\boldsymbol{e}_3\Omega_\rho,$$

и с помощью (3) представим $\widetilde{\boldsymbol{\Omega}}$ в базисе $O\boldsymbol{e}_1\boldsymbol{e}_2^0\boldsymbol{e}_3^0$: $\widetilde{\boldsymbol{\Omega}} = \widetilde{q}_1 e_1 + \widetilde{q}_2^0 e_2^0 + \widetilde{q}_3^0 e_3^0$, где

$$\widetilde{q}_1 = (\Omega_\nu - \sigma)\cos\alpha, \qquad \widetilde{q}_2 = (\Omega_\nu - \sigma)\cos\theta\sin\alpha - \Omega_\rho\sin\theta,$$

$$\widetilde{q}_3 = -(\Omega_\nu - \sigma)\sin\theta\sin\alpha - \Omega_\rho\cos\theta.$$

Внесем в них (95), (39), (50), (46) и определим компоненты $\widetilde{\boldsymbol{\Omega}}$ в полуподвижном базисе

$$\widetilde{q}_1(u) = -\frac{g\lambda u^2}{I(1+\lambda)}\sqrt{1 - \frac{c_*^2 u^{2\lambda}}{1-u^2}},$$

$$\widetilde{q}_2(u) = -\frac{g\lambda c_* u^{\lambda+1}}{I(1+\lambda)\sqrt{1-u^2}}\big[(1-\lambda)u^2 + \lambda\big],$$

$$\widetilde{q}_3(u) = \frac{g\lambda(1-\lambda)c_* u^{\lambda+2}}{I(1+\lambda)}.$$

В неизменно связанном с телом S_0 базисе $\widetilde{\Omega}(u)$ имеем компоненты

$$\begin{gathered}\widetilde{q}_1^*(u) = \widetilde{q}_1(u)\cos\Phi(u) + \widetilde{q}_2(u)\sin\Phi(u),\\ \widetilde{q}_2^*(u) = -\widetilde{q}_1(u)\sin\Phi(u) + \widetilde{q}_2(u)\cos\Phi(u),\\ \widetilde{q}_3^*(u) = \widetilde{q}_3(u)\end{gathered} \qquad (105)$$

(зависимость $\Phi(u)$ определена в (64)).

Представим угловую скорость $\widetilde{\boldsymbol{\Omega}}$ относительного движения в естественном базисе. Для этого в (104) внесем (101): $\widetilde{\boldsymbol{\Omega}} = \widetilde{\Omega}_i$ $\boldsymbol{\mathfrak{э}}_i = -\Omega_\rho$ $\boldsymbol{\mathfrak{э}}_1$ $+(\Omega_\nu - \sigma)$ $\boldsymbol{\mathfrak{э}}_3$. С учетом (95), (50) находим

$$\widetilde{\Omega}_1(u) = 0, \qquad \widetilde{\Omega}_2(u) = -\frac{g\lambda u^2 c_* u^{(\lambda+1)}}{I(1+\lambda)}, \qquad \widetilde{\Omega}_3(u) = \frac{-g\lambda^2 u^2}{I(1+\lambda)}. \qquad (106)$$

Таким образом, получены годографы относительной угловой скорости $\widetilde{\boldsymbol{\Omega}}$ в теле S_0 и естественном базисе. Движение тела S_0 по отношению к естественному базису траектории точки O этого тела представлено качением без скольжения неизменно связанной с телом кривой (105) по кривой (106), фиксированной в естественном базисе. Отметим, что центр масс тела S_0 также движется по окружности радиуса $a_* = m_0 l/(m + m_0)$.

Получено новое решение задачи о движении по инерции двух сферически симметричных тел, в котором момент количества движения системы имеет нулевую компоненту. Указаны уравнения подвижных и неподвижных аксоидов для каждого из тел системы. Найдены годографы относительных угловых скоростей для каждого из тел системы в неизменно связанных с телами базисах и в естественном базисе траектории центра масс тела S_0.

1. *Харламов А.П., Харламов М.П.* Неголономный шарнир // Механика твердого тела. – 1995. – Вып. 27. – С. 1–7.

2. *Лесина М.Е., Харламов А.П.* Движение по инерции двух гироскопов Лагранжа, соединенных неголономным шарниром // Механика твердого тела. – 1995. – Вып. 27. – С. 15–21.
3. *Лесина М.Е., Харламов А.П.* Точное решение задачи о движении по инерции двух гироскопов Лагранжа, соединенных неголономным шарниром // Механика твердого тела. – 2004. – Вып. 34. – С. 80–86.
4. *Лесина М.Е., Гоголева Н.Ф.* Новое решение задачи о движении двух гироскопов Лагранжа, соединенных неголономным шарниром // Механика твердого тела. – 2006. – Вып. 36. – С. 51—57.
5. *Лесина М.Е., Гоголева Н.Ф.* Частное решение задачи о движении двух гироскопов Лагранжа, соединенных неголономным шарниром // Механика твердого тела. – 2008. – Вып. 38. – С. 63—69.
6. *Лесина М.Е., Гоголева Н.Ф.* Условия существования линейного инвариантного соотношения специального вида // Зб. наук.-метод. робiт. – Донецьк, 2006. – Вип. 4. – С. 39-–50.
7. *Лесина М.Е., Гоголева Н.Ф.* Частное решение задачи о движении двух гироскопов Лагранжа, сочлененных неголономным шарниром // Междунар. конф. “Классические задачи динамики твердого тела” (Донецк, 9–13 июня 2007 г.): Сб. тез. – Донецк, 2007. – С. 50–51.
8. *Лесина М.Е., Гоголева Н.Ф.* Движение системы двух тел, соединенных неголономным шарниром // Механика твердого тела. – 2013. – Вып. 43. – С. 90—96.
9. *Гоголева Н.Ф., Зиновьева Я.В.* Уравнения аксоидов задачи о движении двух гироскопов Лагранжа, соединенных неголономным шарниром // Механика твердого тела. – 2012. – Вып. 42. – С. 202—212.
10. *Рашевский П.К.* Курс дифференциальной геометрии. – М.; Л.: Гостехтеориздат, 1950. – 428 с.
11. *Харламов М.П., Харламов П.В.* Построение полного решения задачи об относительном движении тела // Докл. АН УССР. Сер А. – 1983. – № 12. – С. 36–38.

M.E. Lesina, N.F. Gogoleva

A new solution to the problem of motion of two spherically symmetric rigid bodies connected by a nonholonomic hinge

A new solution to the problem of inertial motion of two spherically symmetric rigid bodies connected by a nonholonomic hinge is obtained. The angular momentum of the system is perpendicular to the plane of motion of the center of mass of the body S_0. Equations are written for loose and fixed axoids, and for hodographs of the bodies in the reference basis of the trajectory of the center of mass of the body S_0.

Keywords: *system of rigid bodies, nonholonomic hinge, loose and fixed axoids, hodograph, natural basis.*

М.Ю. Лесiна, Н.Ф. Гоголєва

Новий розв’язок задачi про рух двох сферично симетричних тiл, з’єднаних неголономним шарнiром

Знайдено новий розв’язок задачi про рух за iнерцiєю двох сферично симетричних тiл, з’єднаних неголономним шарнiром. Момент кiлькостi руху системи тiл перпендикулярний площинi руху центра мас тiла S_0. Записано рiвняння рухомих i нерухомих аксоїдiв, годографи тiл в опорному базисi траєкторiї центра мас тiла S_0.

Ключовi слова: *система тiл, неголономний шарнiр, рухомий i нерухомий аксоїди, годограф, натуральний базис.*

Ин-т прикл. математики и механики НАН Украины, Донецк Получено 20.05.14