

**В. А. ЧЕРНЯК**

Професор кафедри хірургії № 4 Національного медичного університету ім. О. О. Богомольця, д-р мед. наук, проф.

**С. В. Струтинський** — асистент кафедри прикладної гідроаеромеханіки і механотроніки Механіко-машинобудівного інституту Національного технічного університету України «КПІ»

**С. В. Дибкалюк** — доцент кафедри ортопедії і травматології № 1 Національної медичної академії післядипломної освіти ім. П. Л. Шупика, канд. мед. наук

**В. Ю. Зоргач** — зав. відділенням УЗД ЦСМД ВМУ СБ України, канд. мед. наук

**Б. Ф. Яковлев** — аспірант Національної медичної академії післядипломної освіти ім. П. Л. Шупика

## ФІЗИКО-МАТЕМАТИЧНЕ МОДЕЛЮВАННЯ ПРУЖНО-РЕГУЛЯТОРНИХ І ГІДРАВЛІЧНИХ ХАРАКТЕРИСТИК ЕКСТРАВАЗАЛЬНОЇ КОМПРЕСІЇ ХРЕБТОВИХ АРТЕРІЙ

### Вступ

Кровоносна система людини, що складається з артерій і вен, тісно контактує з іншими органами, зокрема із м'язами. У деяких випадках це призводить до стискання артерії та зменшення кровотоку в ній. У зв'язку з цим дослідження, які б дали змогу кількісно та якісно оцінити деформацію хребтової артерії, стиснутої м'язом, з подальшим визначенням гідравлічного опору, який при цьому виникає, є дуже актуальними.

Проблема загалом полягає у встановленні причин і наслідків негативного впливу поряд розташованих м'язів на артерії середнього розміру. Вона пов'язана з важливими науковими і практичними завданнями розроблення радикальних методів лікування патології артерій шийного відділу хребта.

У літературних джерелах наявна значна кількість результатів досліджень механіки судин і гідравліки крові [9]. Розглядаються різноманітні характеристики артерій та особливості кровотоку в них [1; 8]. Низку публікацій присвячено вивченню особливостей зміни форми артерій шийного відділу хребта в разі стискання їх спіралеподібним м'язом [3; 5].

До не вирішених раніше питань належать виявлення пружно-деформованого стану хребтової артерії, стиснутої спіралеподібним м'язом, і визначення її гідравлічного опору з урахуванням специфічних особливостей кровотоку. Досліджень, що вивчають це питання, під час огляду літератури не виявлено.

Артерія за наявності патології являє собою складний об'єкт досліджень, який потребує неординарних методів. Доцільним є проведення міждисциплінарних досліджень фахівцями в галузі медицини і механіки із застосуванням фундаментальних положень механіки деформованого тіла та методів гідромеханіки [2].

Мета дослідження — виявити пружно-деформований стан хребтової артерії, стиснутої спіралеподібним м'язом, і визначити залежність гідравлічного опору від ступеня звуження хребтової артерії.

Завданням дослідження є встановлення особливостей геометричних, механічних та гідравлічних характеристик хребтової артерії в ділянці її стискання і визначення зміни параметрів кровотоку у звуженій артерії.

### Виклад основного матеріалу досліджень

#### 1. Характеристика об'єкта і предмета досліджень

Хребтові артерії належать до артерій середнього розміру. Їх діаметр варіює від 3,5 до 4,5 мм. Вони розміщені паралельно сонним артеріям (рис. 1) і забезпечують кровопостачання всіх структур черепа.

У нормальному стані рух крові в артерії близький до ламінарного, швидкість якого не перевищує 0,5 м/с. Артерії мають незначну конфузориальність, що стабілізує течію крові і зменшує ймовірність вихроутворення. У разі стиснення артерій спіралеподібними м'язами

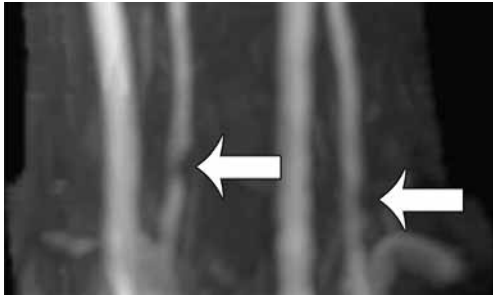


Рис. 1. Ангіограма артерій шийного відділу хребта (стрілками показано ділянки звуження хребтових артерій)

виникає їх компресія, тобто зменшення поперечного перерізу. Це відбувається на початкових ділянках артерій і спостерігається на ангіограмах (див. рис. 1). Звуження артерій має складний просторовий характер. Для дослідження зміни форми артерії проведено математичне моделювання її пружно-деформованого стану.

## 2. Моделювання пружно-деформованого стану артерій

Хребтова артерія контактує з іншими органами, зокрема із м'язами. Контакт зі спіралеподібним м'язом призводить до компресії (стискання) артерії та зменшення кровотоку в ній.

Розрахунки проведено з використанням методу скінченних елементів (МСЕ) [7], за допомогою якого можна проаналізувати пружно-деформований стан об'єкта за його тривимірною моделлю. Цей метод дає змогу досить точно визначити напрямки і ступінь деформацій у точках (вузлах) моделі, а також напруження, що виникає в цих точках.

Згідно з методикою, тривимірну модель розбивають за допомогою сітки на велику кількість

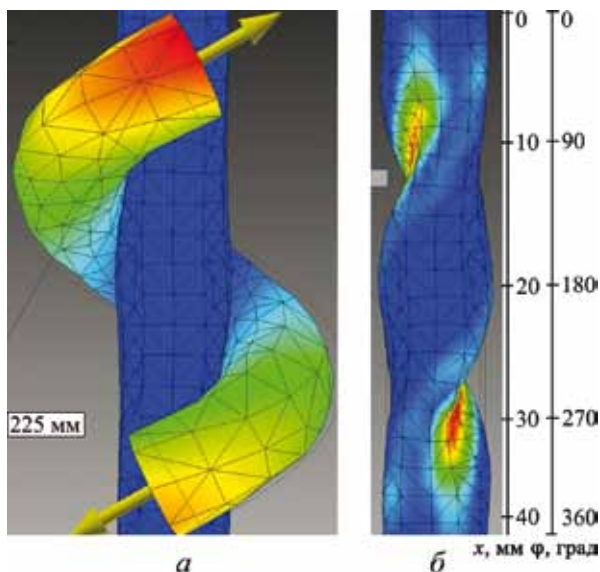


Рис. 2. Схема навантаження (а) і типова деформація хребтової артерії (б)

скінченних елементів. Точність моделювання залежить від кількості елементів: що їх більше, то вища точність. У процесі моделювання програмний комплекс розв'язує рівняння, які описують пружно-деформований стан для кожного скінченного елемента моделі. Результати розрахунків у більшості випадків мають вигляд графіків.

Важливо правильно встановити форму м'яза, що взаємодіє з артерією, схему, за якою він навантажується, а також яким чином він контактує з артерією. Згідно з даними літератури [1; 3], м'яз має спіралеподібну форму, по всій довжині прилягає до артерії та навантажується аксіально.

Для цієї схеми навантаження проведено розрахунок пружно-деформованого стану артерії, що перетискається (рис. 2, а).

Навантаження, створюване м'язом, є досить значним і варіює у широких межах [1]. Воно доволі велике порівняно із силами жорсткості стінок артерії. Тому ми насамперед оцінювали форму стінки стиснутої артерії та визначали ділянки максимальної деформації при різних ступенях навантаження. Загально прийняті пружні властивості матеріалів артерії та м'яза отримані з літературних джерел [2].

Під час моделювання за методом МСЕ ступінь навантаження на артерію варіювали. У результа-

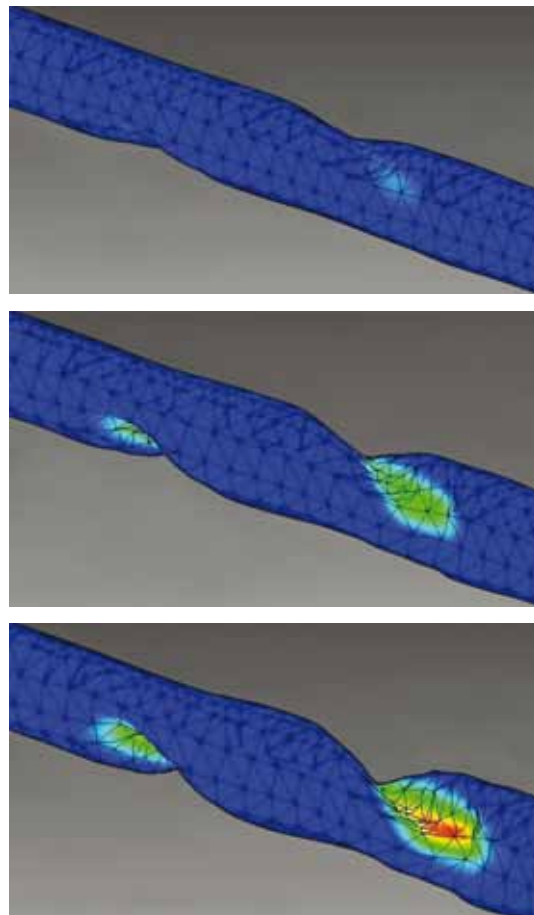


Рис. 3. Послідовні кадри компресії артерії в разі збільшення напруження спіралеподібного м'яза

ті зовнішньої дії артерія на навантаженій ділянці набувала форми, близької до спіралеподібної (рис. 2, б).

Стиснення артерії виникає на довжині  $x \leq 40$  мм. При цьому стиснений переріз повертається по гвинтовій лінії на кут  $\varphi \leq 200^\circ$ . Стиснення артерії залежить від ступеня напруження спіралеподібного м'яза (рис. 3).

Математична обробка даних моделювання дала змогу встановити, яким чином змінюється форма поперечного перерізу артерії залежно від навантаження, визначити характер зміни його форми по довжині та розрахувати числове значення цієї зміни.

Форма поперечного перерізу артерії при навантаженні змінюється від кільцевої до серпоподібної (рис. 4).

Встановлено, що найбільше співвідношення площ поперечного перерізу нормальної та стисненої артерій чисельно дорівнює 8. Довжина

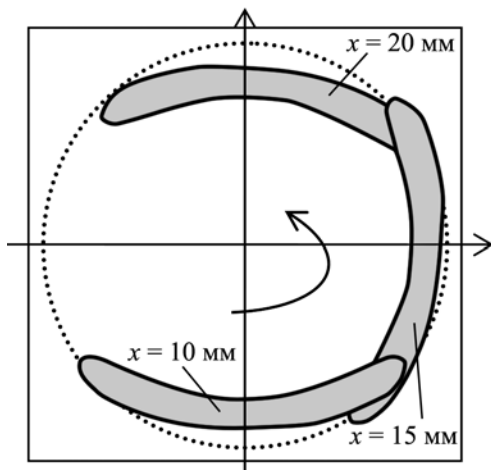


Рис. 4. Форма поперечного перерізу артерії в разі її компресії та зміни положення перерізу по довжині артерії

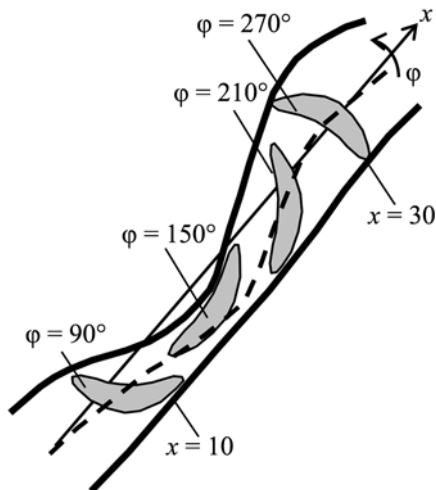


Рис. 5. Зміна положення поперечного перерізу артерії на ділянці звуження

ділянки з максимальним звуженням становить 20 мм при загальній довжині артерії 200 мм.

Проведені дослідження дали змогу встановити, що форма поперечного перерізу стисненої артерії може бути апроксимована деформованим еліпсом у вигляді серпа (рис. 5).

Довжина великої осі еліпса є сталою при різному ступені зовнішнього навантаження. Розмір малої осі змінюється, причому ця зміна є пропорційною до зміни площі поперечного перерізу артерії.

На основі отриманих даних було розраховано гідравлічні характеристики стиснутої артерії.

### 3. Геометричні характеристики еритроцитів як основного складника крові

Кров — це рідка субстанція, майже половину якої складають клітини крові. Основними з них є еритроцити, об'ємна маса яких становить близько 45 %. За мікрофотографіями еритроцитів [6] встановлено їх форму і розміри в малорухомому стані (рис. 6).

Згідно з наведеними даними, еритроцит являє собою дуже гнучкий двоввігнутий диск (рис. 7). Оболонка еритроцита має вигляд мембрани, маса якої становить 3 % загальної маси еритроцита. Товщина мембрани — близько 7,5 нм [2].

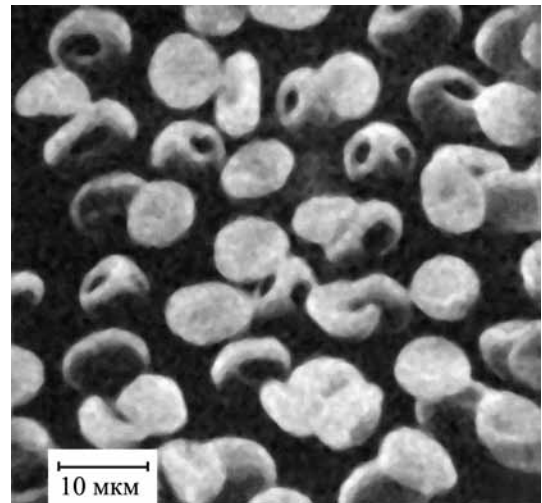


Рис. 6. Мікрофотографії еритроцитів у малорухомому стані [2]

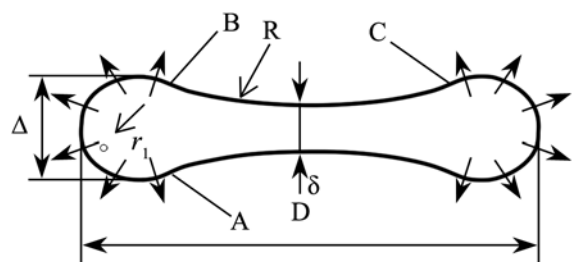


Рис. 7. Геометричні розміри перерізу недеформованого еритроцита

Така форма еритроцита зумовлена характером сил тиску на мембрану. Осмотичний тиск у плазмі крові становить близько 0,7 МПа. Це достатньо високий тиск, який у 7 разів перевищує атмосферний.

Припустимо, що проникність мембрани еритроцита визначається локальним радіусом кривизни мембрани. Відповідно, на ділянці АВ з малим радіусом кривизни проникність мембрани є набагато більшою, ніж на ділянці ВС з великим радіусом кривизни. Тому на рідкий вміст еритроцита на ділянці АВ будуть діяти значні сили тиску в напрямку, зазначеному стрілками. Отже, рідкий вміст еритроцита буде видавлюватися в кільцеву периферійну частину, обмежену контуром АВ.

Еритроцит як механічна система має особливі властивості. Вважається, що мембрана еритроцита завжди має постійну площу [2].

У процесі дослідження визначено об'єм і загальну площу мембрани еритроцита. За характерні розміри прийнято загальноновживані параметри, а саме: максимальний діаметр еритроцита  $D$ , максимальна товщина  $\Delta$  і товщина в середині диска  $\delta$  (рис. 8).

Форму еритроцита описано за допомогою аналітичних залежностей. Периферійну частину еритроцита АВ подано у вигляді частини тора, а бічну частину ВС — у вигляді сферичного сегмента.

Перед проведенням розрахунків виконано інтегрування за площею та інтегрування за об'ємом. Для значень параметрів  $D = 8$  мкм,

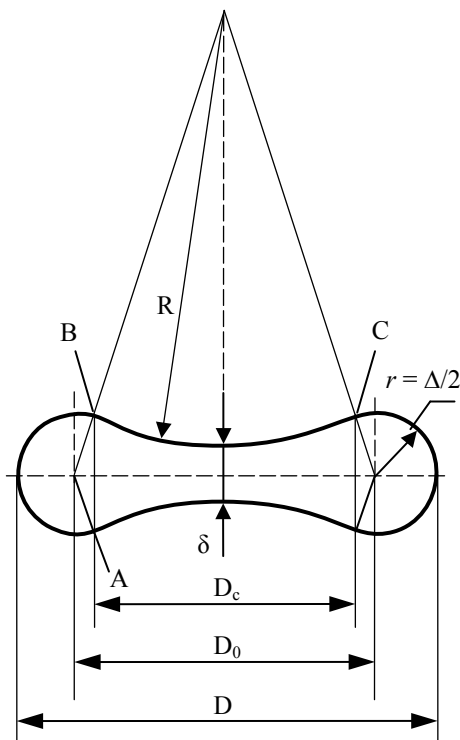


Рис. 8. Прийнята ідеалізована геометрична форма перерізу недеформованого еритроцита

$\Delta = 2$  мкм,  $\delta = 1$  мкм визначено площу поверхні  $S_0 = 123,48$  мкм<sup>2</sup> та об'єм еритроцита  $V_0 = 85,25$  мкм<sup>3</sup>.

Під час переміщення еритроцита по артерії його форма змінюється. При цьому, як сказано у [2], його форма і об'єм залишаються незмінними. Припустимо, що еритроцит набув форму еліпсоїда обертання з розміром по осі симетрії  $H$  і діаметром  $D$ . Об'єм  $V_e$  і площа поверхні  $S_e$  такого еритроцита становлять:

$$V_e = \frac{\pi H D^2}{6}, \quad (1)$$

$$S_e = \frac{\pi}{\sqrt{2}} D \sqrt{H^2 + D^2}$$

Прирівняємо об'єм і площу поверхні недеформованого еритроцита до об'єму і площі моделі еритроцита у вигляді еліпсоїда обертання (1). Отримаємо систему двох рівнянь для визначення параметрів  $D$  і  $H$ :

$$\begin{cases} \frac{\pi}{6} H D^2 = V_0, \\ \frac{\pi}{\sqrt{2}} D \sqrt{H^2 + D^2} = S_0. \end{cases} \quad (2)$$

Система рівнянь (2) має два розв'язки. Для визначених раніше значень  $S_0$  та  $V_0$  маємо:

$$\begin{cases} H_1 \cong 3,4 \text{ мкм}, & D_1 \cong 7,2 \text{ мкм} \\ H_2 \cong 15,1 \text{ мкм}, & D_2 \cong 3,6 \text{ мкм}. \end{cases}$$

Отримані геометричні розміри визначають два характерних, ідеалізованих за формою еритроцити: один відповідає сплюсненому еліпсоїду обертання, другий — витягнутому еліпсоїду обертання (рис. 9). Ці моделі еритроцитів мають однакові значення площі й об'єму і є близькими до харак-

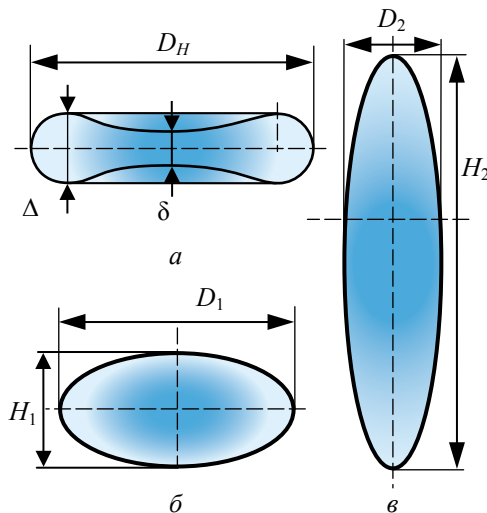


Рис. 9. Геометричні форми еритроцитів з однаковими значеннями об'єму і площі зовнішньої поверхні мембрани: а — недеформований; б — сплюснений еліпсоїд обертання; в — витягнутий еліпсоїд обертання



терних форм еритроцитів, які спостерігають в експериментах (див. рис. 6).

Насправді форма еритроцитів відрізняється від отриманих моделей, але, як зазначено нижче, вони відображають форму еритроцита залежно від зовнішніх умов.

#### 4. Зміна форми еритроцитів під дією гідродинамічних чинників

Модель у вигляді двоввігнутого диска відповідає еритроциту, який перебуває в малорухомій рідині, модель у вигляді сплюсненого еліпсоїда — еритроциту, який повільно рухається в рідині з низькими значеннями напруження зсуву, а модель у вигляді витягнутого еліпсоїда — еритроциту, який знаходиться в рідині з високим напруженням зсуву. Це підтверджено даними літературних джерел [2; 6], у яких зазначено, що в разі дії напружень зсуву, які виникають при переміщенні рідини, еритроцит набуває витягнутої форми (рис. 10).

Показані на рис. 10 еритроцити перебувають в екстремальних умовах — під дією високого напруження зсуву ( $\tau = 300$  Па). При цьому вони набувають форми еліпсоїдів обертання, витягнутих у напрямку більшої осі. Співвідношення довжин еліпсоїда  $H$  до діаметра  $D$  становить 3—5. Це відповідає ідеалізованій моделі у вигляді витягнутого еліпсоїда обертання (див. рис. 9, в), у якій відношення довжини до діаметра дорівнює 4,2.

Причиною зміни форми еритроцита є розподіл тиску на мембрані внаслідок обтікання його рідким середовищем. Рівномірний кровотік характерний у центральній частині недеформованої артерії, тому в цій частині артерії форма еритроцита, вірогідно, буде відповідати сплюсненому еліпсоїду обертання (див. рис. 9, б).

Під час обтікання плазмою крові еліпсоїдоподібних еритроцитів, розташованих під кутом до

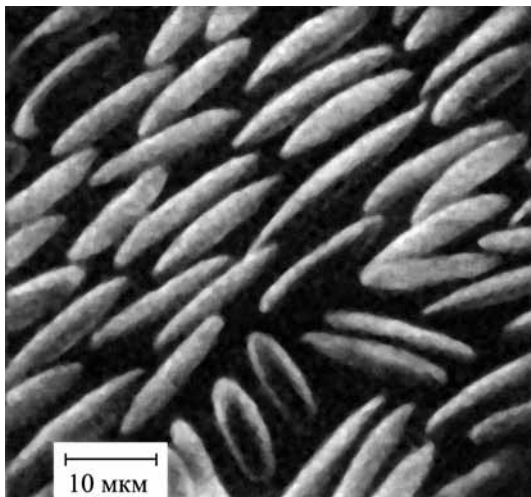


Рис. 10. Форма еритроцитів у разі значного напруження зсуву [2]

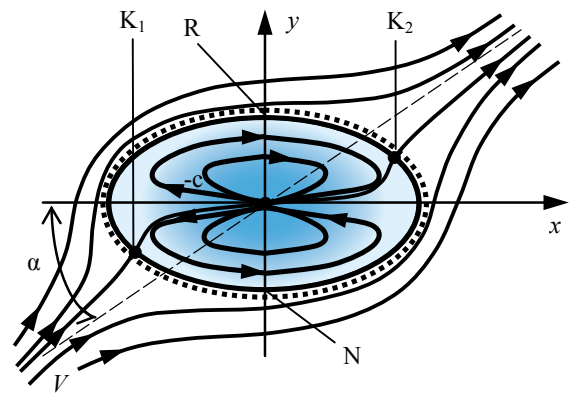


Рис. 11. Розрахункова картина ліній течії в перерізі еритроцита, який обтікає рівномірний потік рідини, направлений під кутом  $\alpha$  до осі еліпсоїда

потіку, формується течія з критичними точками  $K_1, K_2$  [4] (рис. 11).

На сторонах еліпсоїда в точках  $N$  і  $R$  тиск менший, ніж у ділянці критичних точок  $K_1, K_2$ . Зміни тиску на зовнішній поверхні мембрани призведуть до виникнення течії всередині рідкого середовища. Течія матиме вигляд осьового потоку від точки  $K_2$  до точки  $K_1$ , який забезпечуватиме видовження еліпсоїда.

Кровотік біля стінки артерії характеризується наявністю градієнта швидкості, а відповідно, і напруження зсуву. При цьому на сторонах еритроцита  $N$  і  $R$  виникає різниця швидкостей, за ра-

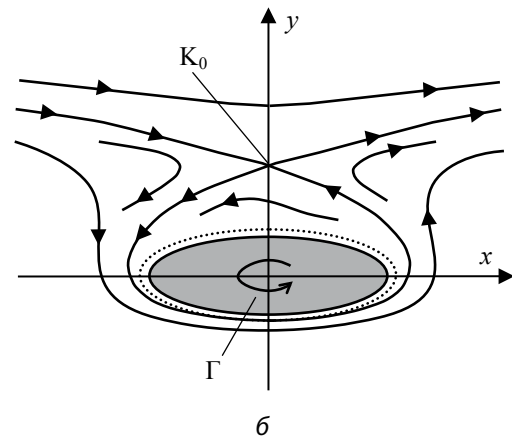
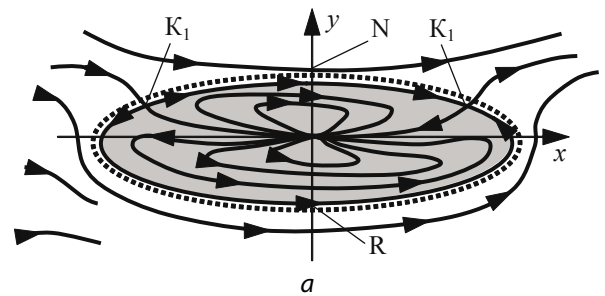


Рис. 12. Схема течії в разі циркуляційного обтікання еритроцита за наявності напруження зсуву: а — течія при невеликих значеннях напруження зсуву; б — течія при великих значеннях напруження зсуву

хунок якої формується циркуляційне обтікання еліпсоїда.

При незначному напруженні зсуву (рис. 12, а) схема обтікання близька до такої в разі обтікання рівномірним потоком. Критичні точки  $K_1$ ,  $K_2$  розміщуються асиметрично відносно напрямку потоку.

При значному напруженні зсуву (рис. 12, б) схема течії змінюється. У ділянці течії виникає одна критична точка  $K_0$ . Еритроцит розміщений в ділянці, де сформовано циркуляційний рух в одному напрямку. Отже, на мембрану еритроцита будуть діяти напруження зсуву, які призведуть до виникнення обертального руху мембрани і рідкого вмісту еритроцита у напрямку, показаному стрілкою Г. При дуже високому напруженні зсуву рідкий вміст еритроцита, імовірно, буде обертатися набагато повільніше від руху мембрани. Це відповідає даним літературних джерел [2; 6], у яких рух мембрани еритроцита порівнюється із рухом гусениці танка.

### 5. Особливості кровотоку в артерії, зумовлені наявністю компактно розміщених еритроцитів

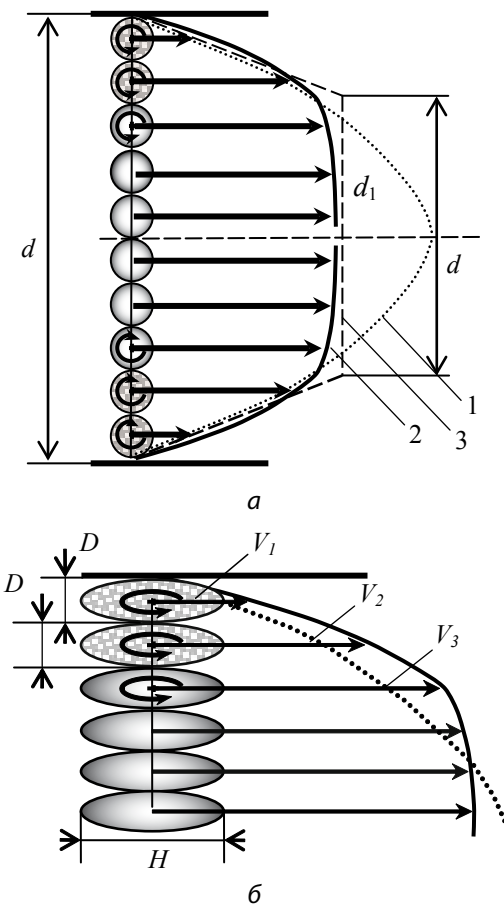


Рис. 13. Розподіл швидкості в перерізі круглої артерії за наявності компактно розміщених еритроцитів (а) і в стисненій артерії (б)

В артерії на вході у стиснену ділянку виникає кровотік, відповідний течії рідини в круглому трубопроводі [4]. Число Рейнольдса такої течії набагато менше критичного. Припустивши, що кров — це ньютонівська рідина, визначимо, що профіль швидкостей у нестисненому перерізі артерії відповідає параболі 1 (рис. 13, а).

За наявності великої кількості компактно розміщених еритроцитів профіль швидкостей відрізнятиметься від параболічного. Еритроцити, які знаходяться біля стінки артерії, зазнають впливу значних градієнтів швидкості, а відповідно, і напруження зсуву. Унаслідок цього вони будуть змінювати свою форму й обертатись. Шар еритроцитів, що обертаються, буде меншим від радіуса артерії, тому в перерізі артерії формується профіль швидкостей 2, близький до трапецієподібного профілю 3. Цей профіль має ядро постійних швидкостей діаметром  $d_1$  (див. рис. 13, а).

Для визначення закономірностей обертання еритроцитів проаналізовано еквівалентний ламінарний рух крові з параболічним розподілом швидкостей. Така течія є вихровою, тобто в ділянці течії ротор швидкості не дорівнює нулю.

На відстані  $r$  від центра артерії швидкість ламінарної течії крові дорівнює:

$$V = V_{\max} (1 - r^2/r_T^2), \quad (3)$$

де  $V_{\max}$  — максимальна швидкість у перерізі ( $V_{\max} = 2V_{\text{cp}}$ );  $r_T$  — радіус артерії;  $V_{\text{cp}}$  — середнє значення швидкості крові в артерії.

Для вісеметричної течії ротор швидкості визначається залежністю [10]:

$$|\text{rot}\vec{V}| = \frac{\partial V}{\partial r}. \quad (4)$$

Вектор ротора швидкості направлений перпендикулярно радіальному перерізу артерії.

Продиференціювавши залежність (3), отримаємо:

$$|\text{rot}\vec{V}| = 2V_{\max} r \cdot r_T^{-2}. \quad (5)$$

Із формули (5) випливає, що модуль ротора швидкості лінійно зростає від нуля на осі артерії до максимального значення на стінці, яке становить:

$$|\text{rot}\vec{V}|_{\max} = \frac{2V_{\max}}{r_T}. \quad (6)$$

Ротор швидкості визначає кутову швидкість обертання частинок рідкого середовища:

$$\vec{\omega} = \frac{1}{2} \text{rot}\vec{V}.$$

Відповідно, кутова швидкість рідких частинок у перерізі артерії при ламінарному русі буде зростати від нуля на осі до значення, яке виникає на стінці артерії.

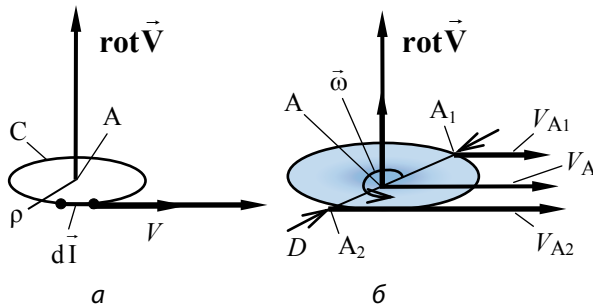


Рис. 14. Схема циркуляційного руху еритроцитів: а — зв'язок ротора швидкості з циркуляцією швидкості по елементарному контуру С; б — схема руху еритроцита з його одночасним обертанням

$$\omega_{\max} = \frac{V_{\max}}{r_T} \quad (7)$$

Ротор векторного поля швидкості в деякій точці А виражається через циркуляцію вектора швидкості по елементарному контуру С з радіусом  $r$ .

Опишемо із точки А як із центра кола малого радіуса  $\rho$ , яке лежить у площині, перпендикулярній до напрямку вектора  $\text{rot} \vec{V}$  (рис. 14, а).

Із формули Стокса [4] отримуємо:

$$\text{rot} \vec{V} = \lim_{\rho \rightarrow 0} \frac{\oint_C \vec{V} \cdot d\vec{l}}{\pi \rho^2}$$

Прийmemo, що коловий контур С відповідає мембрані еритроцита. При цьому переріз еритроцита має вигляд диска діаметром  $D$ , розміщеного в радіальній площині перерізу артерії (рис. 14, б).

Мембрану еритроцита вважатимемо малодеформованою. Тоді циркуляція швидкості по коловому контуру становитиме:

$$\Gamma_c = \pi D \cdot V_c,$$

де  $D$  — діаметр колового еритроцита;  $V_c$  — окружна швидкість мембрани. Ротор швидкості наближено буде визначено як:

$$|\text{rot} V_A| = \frac{\tilde{A}_c}{\pi D^2} = \frac{4}{D} V_c \quad (8)$$

Різниця швидкостей у точках  $A_2$  і  $A_1$  становитиме:

$$V_{A_2} - V_{A_1} = 2V_c.$$

Розглянемо компактно розташовані еритроцити біля стінки артерії (див. рис. 13, б). Приймемо, що еритроцит притиснутий до стінки і контактує з нею без проковзування. Прирівнявши праві частини формул (7) і (8), отримуємо швидкість руху центра еритроцита:

$$V_1 = V_c = \frac{D}{2} \cdot \frac{V_{\max}}{r_T}.$$

Тепер припустимо, що сусідні еритроцити в шарі взаємодіють без проковзування, тоді швидкість руху другого еритроцита становитиме  $V_2 = 3V_c$ , а  $n$ -го еритроцита в шарі:

$$V_n = (2n-1)V_c = \frac{2n-1}{2} \cdot \frac{D \cdot V_{\max}}{r_T} = \frac{(2n-1) \cdot D}{r_T} \cdot V_{cp} \quad (9)$$

Відстань від стінки до центра  $n$ -го еритроцита визначимо за формулою:

$$y = \frac{D}{2} n.$$

Відповідно,

$$n = \frac{2}{D} y.$$

Підставивши значення  $n$  у формулу (9), отримаємо:

$$V = \frac{D}{r_T} V_{cp} \cdot \left( \frac{4y}{D} - 1 \right), \quad y \geq \frac{D}{2} \quad (10)$$

Ця формула визначає лінійну залежність швидкості руху еритроцитів біля стінки артерії від відстані до стінки.

Розглянемо звужену ділянку артерії одиничної довжини. Для неї рівняння зміни кількості руху в інтегральній формі (рівняння імпульсів [4]) має вигляд:

$$\iint_S \vec{P}_n d\sigma = \iint_S \rho \vec{V} V_n d\sigma \quad (11)$$

де  $S$  — контрольна поверхня, яка обмежує ділянку;  $\vec{P}_n$  — вектор поверхневих сил;  $\vec{V}$  — швидкість;  $V_n$  — нормальна складова швидкості в точці контрольної поверхні.

Ліва частина рівняння (11) відповідає головному вектору сил тиску на контрольну поверхню, права — вектору перенесення імпульсу через контрольну поверхню.

Для звуженої ділянки права частина формули (11) дорівнює нулю, отже, із рівняння імпульсів випливає:

$$S_0 \cdot \Delta p = \Pi_0 \tau, \quad (12)$$

де  $S_0$  — площа перерізу стисненої ділянки;  $\Delta p$  — перепад тиску;  $\Pi_0$  — периметр ділянки;  $\tau$  — дотичне напруження на стінці артерії.

Відповідно перепад тиску,

$$\Delta p = \frac{\Pi_0 \tau}{S_0} \quad (13)$$

Середнє значення еквівалентного дотичного напруження на стінці артерії становить:

$$\tau = \mu \left. \frac{dV}{dy} \right|_{y=0}$$

де  $\mu$  — еквівалентна динамічна в'язкість крові.

Після диференціювання залежності (10) і підставлення  $y = 0$  отримуємо:

$$\tau = \mu \frac{4V_{\text{ср}}}{r_T}$$

Отримане значення відповідає напруженню на стінці при ламінарному русі рідини [4]. Тому для розрахунку гідравлічних характеристик артерії в разі її стиснення також можна застосувати співвідношення, визначені для ламінарного руху рідини.

### 6. Визначення перепаду тиску в ділянці звуження артерії

У разі стиснення артерії еритроцити, які рухаються всередині неї, будуть деформованими (рис. 15).

Поперечний переріз апроксимовано еліпсом із піввісьями  $a$  та  $b$ . Раніше показано, що при максимальному стисненні артерії площа її перерізу зменшується у 8 разів. Тому визначити  $a$  та  $b$  можна із такої залежності:

$$\frac{\pi d^2}{4} = 8 \cdot \pi ab. \quad (14)$$

Враховуючи, що  $d = 3,6$  мм, знаходимо (15):  $b = 0,23$  мм;  $a = 1,85$  мм.

Для еліптичного каналу середню швидкість розраховуємо за такою залежністю [4]:

$$V_{\text{ср}} = \frac{\Delta p}{4\mu l} \cdot \frac{a^2 b^2}{a^2 + b^2}, \Delta p = p_1 - p_2, \quad (16)$$

де  $l$  — довжина каналу.

Для стаціонарного руху рідини за відсутності джерел маси в об'ємі рівняння збереження мас в інтегральній формі має вигляд:

$$\iint_S V_n d\sigma = 0.$$

Це рівняння відповідає рівнянню нерозривності. З нього для еліптичного каналу знаходимо витрату крові:

$$Q = \pi ab V_{\text{ср}}.$$

Втрати тиску на ділянці з максимальним звуженням становлять:

$$\Delta p = \frac{4\mu l \cdot Q(a^2 + b^2)}{\pi \cdot a^3 \cdot b^2}. \quad (17)$$

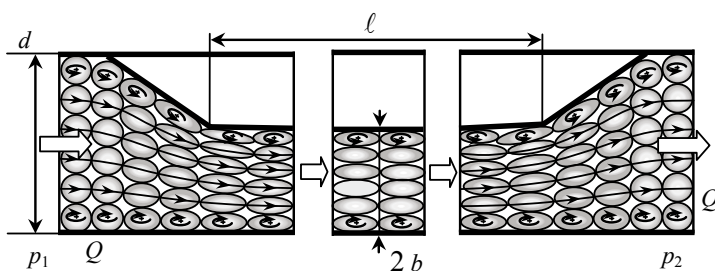


Рис. 15. Рух компактно розміщених еритроцитів на ділянці звуження артерії без урахування гвинтового руху крові

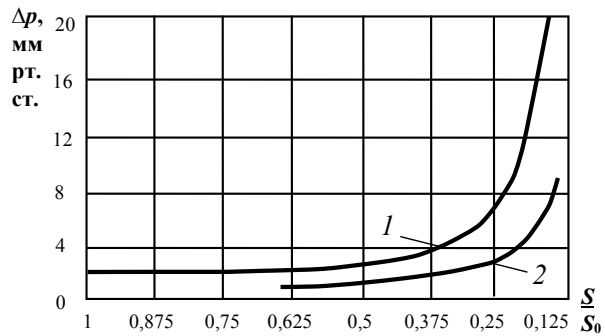


Рис. 16. Залежність втрат напору від площі поперечного перерізу стисненої ділянки артерії

Розрахунок згідно з залежністю (17) для значень параметрів (15) дає значення перепаду тиску на деформованій ділянці артерії:

$$\Delta p = 5237 \text{ Па} = 39 \text{ мм рт. ст.}$$

Втрати напору при звуженні та розширенні каналу є незначними. Порівнявши знайдене значення втрат напору для звуженої артерії із втратами напору по довжині в артерії без компресії, що не перевищують 2—3 мм рт. ст. згідно з даними літератури [8], а також на основі проведених попередніх розрахунків можна дійти висновку, що гідравлічні втрати значно стиснутої артерії збільшуються у 10—20 разів. Порівняння отриманих результатів із наявними в літературних джерелах [6] підтвердило достовірність проведених розрахунків.

Розрахунки виконано для артерій із різними площами поперечного перерізу. Результати представлено у вигляді графіка (крива 1, рис. 16).

Результати гідравлічних розрахунків підтверджують значне зростання гідравлічного опору при зменшенні площі поперечного перерізу артерії у 5—8 разів.

Гідравлічні втрати переважно зумовлені звуженою ділянкою артерії, що апроксимована еліпсом, або щілиною, і набагато менше — звуженням і розширенням потоку та іншими гідравлічними характеристиками.

Розрахунки гідравлічного опору проведено на основі геометричних параметрів, отриманих за допомогою МСЕ. Це насамперед форма поперечного перерізу в ділянках із середнім і максимальним стисненням артерії та скручування криволінійного каналу по довжині артерії.

Як показано раніше (див. рис. 5), звужена ділянка артерії має вигляд гвинтового каналу. Унаслідок цього в артерії виникає гвинтовий рух крові, що збільшує гідравлічний опір стисненої ділянки. Кручення каналу визначено в результаті розрахунку пружно-деформованого стану артерії. У гвинтовому



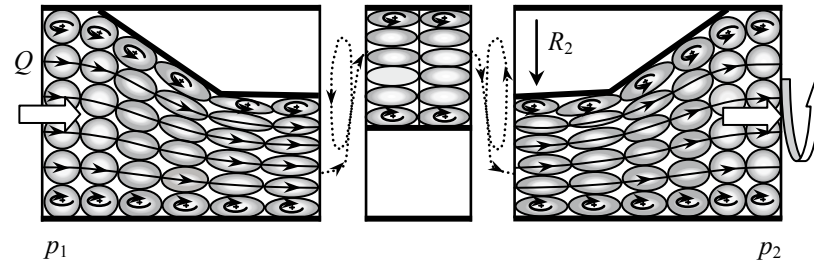


Рис. 17. Набуття потоком крові гвинтового руху на стисненій ділянці артерії

каналі має місце переміщення еритроцитів із набуттям ними обертового руху (рис. 17).

Для визначення додаткового перепаду тиску, зумовленого гвинтовим рухом крові, використаємо рівняння зміни моменту кількості руху, яке встановлює співвідношення моментів кількості руху елементів рідкого середовища [4]:

$$\iiint_W \vec{r} \times \rho \frac{d\vec{V}}{dt} dW = \int_S \vec{r} \times \vec{P}_n d\sigma, \quad (18)$$

де знак  $\times$  — добуток векторів;  $\vec{r}$  — радіус-вектор довільної точки в середині контрольного об'єму  $W$ ;  $\rho$  — середня густина крові.

Інтеграл у правій частині формули (18) обчислено приблизно. Прийнято, що стиснений переріз артерії має невелику товщину. Для контрольного об'єму одиничної довжини маємо:

$$\iint_S \vec{r} \times \vec{P}_n d\sigma = R \cdot \frac{\Delta P \cdot S}{\cos \gamma} \vec{i}, \quad (19)$$

де  $R$  — середній радіус стисненого перерізу відносно осі артерії;  $S$  — площа стисненого перерізу;  $\gamma$  — кут нахилу гвинтової траєкторії руху крові в стисненому перерізі;  $\vec{i}$  — орт дотичної в циліндричній системі координат.

Для обчислення інтеграла в лівій частині рівняння визначимо похідну швидкості [10]:

$$\frac{d\vec{V}}{dt} = \frac{\partial \vec{V}}{\partial t} + (\vec{V} \cdot \nabla) \vec{V},$$

де  $\nabla$  — оператор Набла.

Для стаціонарного руху  $\frac{\partial \vec{V}}{\partial t} = 0$ .

Проекція інтеграла в правій частині (19) на напрямок дотичної має такий вигляд:

$$\iiint_W \vec{r} \times \rho \frac{d\vec{V}}{dt} = \rho V_n^2 \operatorname{tg} \gamma \cdot S \vec{i}_\phi. \quad (20)$$

Прирівнявши праві частини (19) і (20), визначимо перепад тиску, зумовлений гвинтовим рухом крові залежно від втрат напору:

$$\Delta p = \rho \frac{Q^2 \operatorname{tg} \gamma \cdot \cos \gamma \ell}{S^2 R}. \quad (21)$$

Розрахунки за формулою (21) наведено у вигляді графіка (крива 2, рис. 16). Із порівняння графіків випливає, що гвинтовий рух потоку крові

дещо підвищує втрати напору. Особливо це проявляється при значному стисненні артерії. У разі помірного стиснення гвинтовий рух підвищує перепад тиску на 10—15 %.

### Висновки

1. У результаті визначення пружно-деформованого стану ділянки хребтової артерії, деформованої спіралеподібним м'язом, встановлено, що переріз артерії набуває серпоподібної форми завдовжки близько 4 мм і завширшки близько 0,5 мм, а сама артерія утворює гвинтовий криволінійний канал завдовжки 18—22 мм, який відповідає кроку гвинтової лінії і має вхідну ділянку звуження (конфузорності) та вихідну ділянку розширення (дифузорності) завдовжки близько 10 мм кожна.

2. На основі розрахунку основних характеристик еритроцита встановлено, що він має три рівні конфігурації (за об'ємом і площею мембрани): двоввігнутий диск, сплюснений та витягнутий еліпсоїди обертання. При цьому в разі незначного напруження зсуву, властивого течії крові у недеформованій артерії, еритроцит набуває форми, близької до сплюсненого еліпсоїда, а в разі високих значень напруження зсуву в ділянці звуження артерії його форма буде близькою до витягнутого еліпсоїда обертання.

3. Показано, що при незначному напруженні зсуву еритроцит обертається, а при значному — перестає обертатися, а його мембрана здійснює інтенсивний циркуляційний рух відносно малорухомого рідкого вмісту еритроцита. Цим забезпечується рух крові з характеристиками, близькими до ламінарного, а також стабілізується кровотік у пристінковому шарі, унеможливаючи вихроутворення та відрив потоку крові від стінки артерії на дифузорній ділянці звуження.

4. Визначено, що в разі деформації артерії, яка відповідає зменшенню її площі в 5—8 разів, різко зростає перепад тиску на звуженій ділянці. Він може сягати 20 мм рт. ст. і вище, що в десятки разів перевищує перепад тиску в артерії без стиснення. Наявність гвинтового каналу в разі стиснення підвищує перепад тиску на 10—15 %.

5. Метою подальших досліджень є визначення гідравлічних характеристик усього комплексу артерій шийного відділу хребта з урахуванням можливості компресії обох хребтових артерій.

## СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. Аналіз клінічних варіантів та форм синдрому хребтової артерії у хворих з екстравазальною компресією в сегментах V1—V2 залежно від віку / В. Г. Мішалов, Л. В. Яковенко, В. А. Черняк [та ін.] // Серце і судини. — 2011. — Т. 34, № 2. — С. 57—64.
2. Каро К. Механика кровообращения / К. Каро, Т. Педли, Р. Шротер, У. Сид. — М. : МИР, 1981. — 623 с.
3. Клініко-доплерографічні кореляції та результати інструментальних методів діагностики синдрому хребтової артерії у хворих з екстравазальною компресією в сегменті V1—V2 / В. Г. Мішалов, В. А. Черняк, В. В. Сулік [та ін.] // Серце і судини. — 2011. — Т. 36, № 4. С. 9—16.
4. Лойцянский Л.Г. Механика жидкости и газа / Л. Г. Лойцянский. — М. : Наука, 1973. — 847 с.
5. Пат. на корисну модель UA 54580 Україна, МПК А 61 В 17/00. Спосіб відновлення кровотоку в басейні хребтової артерії людини / В. Г. Мішалов, В. А. Черняк, В. В. Сулік, С. В. Дибкалюк, Р. В. Сулік, В. К. Сулік, С. І. Сулік; заявник і патентоутримувач — Національний медичний університет ім. О. О. Богомольця. — № у 201008493; заявл. 07.07.10; опубл. 10.11.10, Бюл. № 21.
6. Педли Т. Гидродинамика крупных кровеносных сосудов / Т. Педли. — М. : МИР, 1983. — 400 с.
7. Рон К. С. Чен. Autodesk Inventor. — М. : Лори, 2002. — 568 с.
8. Скобцов Ю. А. Моделирование и визуализация поведения потоков крови при патологических процессах / Ю. А. Скобцов, Ю. В. Родин, В. С. Оверко. — Донецк: Издатель А.Ю. Заславский, 2008. — 212 с.
9. Черняк В. А. Современные аспекты хирургической профилактики ишемического инсульта / В. А. Черняк // Практична ангіологія. — 2012. — Т. 1, № 2. — С. 21—29.
10. Шлихтинг Г. Теория пограничного слоя / Г. Шлихтинг. — М. : Наука, 1974. — 712 с.

## РЕЗЮМЕ

**ФІЗИКО-МАТЕМАТИЧНЕ  
МОДЕЛЮВАННЯ  
ПРУЖНО-РЕГУЛЯТОРНИХ  
І ГІДРАВЛІЧНИХ  
ХАРАКТЕРИСТИК  
ЕКСТРАВАЗАЛЬНОЇ  
КОМПРЕСІЇ ХРЕБТОВИХ  
АРТЕРІЙ**

*В. А. Черняк, С. В. Струтинський,  
С. В. Дибкалюк, В. Ю. Зоргач,  
Б. Ф. Яковлев*

Обґрунтовано необхідність вирішення важливої наукової проблеми — визначення кількісних характеристик патології кровообігу в артеріях шийного відділу хребта. Обрані методи досліджень спрямовано на визначення форми артерії, деформованої спіралеподібним м'язом, і виявлення патологічних змін гідравлічних характеристик артерії в деформованій ділянці з урахуванням особливостей крові як рідкої субстанції, вагому частку якої складають еритроцити.

Наведено результати математичного моделювання за допо-

**ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКОЕ  
МОДЕЛИРОВАНИЕ  
УПРУГО-РЕГУЛЯТОРНЫХ  
И ГИДРАВЛИЧЕСКИХ  
ХАРАКТЕРИСТИК  
ЭКСТРАВАЗАЛЬНОЙ  
КОМПРЕССИИ ПОЗВОНОЧНЫХ  
АРТЕРИЙ**

*В. А. Черняк, С. В. Струтинский,  
С. В. Дибкалюк, В. Ю. Зоргач,  
Б. Ф. Яковлев*

Обоснована необхідність рішення важкої наукової проблеми — визначення кількісних характеристик патології кровообігу в артеріях шийного відділу позвоника. Вибрані методи досліджень спрямовані на визначення форми артерії, деформованої спіралевидною м'язцею, і виявлення патологічних змін гідравлічних характеристик артерії на деформованій ділянці з урахуванням особливостей крові як рідкої субстанції, суттєвий об'єм якої складають еритроцити.

**PHYSICO-MATHEMATICAL  
MODELLING OF ELASTIC  
REGULATORY AND  
HYDRAULIC PROPERTIES OF  
EXTRAVASAL COMPRESSION  
OF THE VERTEBRAL  
ARTERIES**

*V.A.Cherniak, S.V. Strutyskyi,  
S.V. Dykaliuk, V. Yu. Zorgach,  
B. F. Yakovlev*

The necessity of solving important scientific problem — to determine the quantitative characteristics of circulation pathology in the arteries of the cervical spine is established. Selected methods of research are aimed to determine the artery shape, deformed by the spiral muscle, and to identify the pathological changes of the arteries hydraulic characteristics in the deformed portion taking into account blood features as a liquid substance, significant amount of which are red blood cells.

могою методу кінцевих елементів ділянки хребтової артерії, деформованої спіралеподібним м'язом. Встановлено кількісні характеристики зовнішнього деформованого перерізу артерії. У разі деформації артерія сплющується, набуваючи серпоподібної форми. При цьому стиснутий переріз обертається по довжині артерії, утворюючи гвинтовий криволінійний канал, у якому виникає спіралеподібна течія крові.

Розглянуті геометричні характеристики еритроцитів і з'ясована наявність трьох рівновеликих конфігурацій еритроцита (за об'ємом і площею мембрани): двоввігнутий диск, сплюснутий і витягнутий еліпсоїд обертання. Показано, що при низьких значеннях напруження зсуву еритроцит набуває форми, близької до сплюснутого еліпсоїда обертання, а при високих значеннях його форма подібна до витягнутого еліпсоїда обертання. Встановлено механізм руху еритроцитів у пристінковому шарі кровотоку в артерії, що полягає в обертанні еритроцитів при низьких значеннях напруження зсуву і виникненні циркуляційного руху мембрани еритроцита — при його високих значеннях.

Проведено аналіз впливу компактно розташованих еритроцитів на кровотік у стиснутій ділянці артерії, визначено його гідралічні характеристики. Встановлено значення підвищеного тиску крові, зумовленого стисканням артерії, а також вплив завихрення потоку крові на підвищення тиску.

**Ключові слова:** фізико-математичне моделювання, екстравазальна компресія, хребтові артерії.

Приведены результаты математического моделирования с помощью метода конечных элементов формы участка позвоночной артерии, деформированной спиралевидной мышцей. Установлены количественные характеристики деформированного сечения артерии. В случае деформации артерия сплющивается, приобретая серповидную форму. При этом сжатое сечение поворачивается по длине артерии, образуя винтовой криволинейный канал, в котором возникает спиралевидное течение крови.

Рассмотрены геометрические характеристики эритроцитов и установлено наличие трех равновеликих конфигураций эритроцита (по объему и площади мембраны): двояковогнутый диск, сплюснутый и вытянутый эллипсоид вращения. Показано, что при низких значениях напряжения сдвига эритроцит приобретает форму, близкую к сплюснутому эллипсоиду вращения, а при высоких значениях его форма близка к вытянутому эллипсоиду вращения. Установлен механизм движения эритроцитов в пристеночном слое кровотока в артерии, заключающийся во вращении эритроцитов при низких значениях напряжения сдвига и возникновении циркуляционного движения мембраны эритроцита — при его высоких значениях.

Проведен анализ влияния компактно расположенных эритроцитов на кровоток в сжатом участке артерии, определены его гидравлические характеристики. Установлено значение повышенного давления крови, обусловленное сжатием артерии, а также влияние завихрения потока крови на повышение давления.

**Ключевые слова:** физико-математическое моделирование, экстравазальная компрессия, позвоночные артерии.

The results of mathematical modeling using the finite element method of the vertebral artery portion form, deformed by the spiral muscle are given. The quantitative characteristics of the deformed artery section is established. In the case of deformation the artery collapses acquiring a crescent shape. In this case the contracted section rotates along the length of the artery, forming a spiral curved channel in which occurs a spiraling bloodflow.

Geometrical characteristics of erythrocytes are considered and established the presence of three equal erythrocyte configurations (by volume and membrane area): biconcave disc, oblate and prolate ellipsoid of revolution. It is shown that at low values of shear stress erythrocyte takes the form close to the oblate ellipsoid of revolution, and at high values its shape is close to a prolate ellipsoid of revolution. The erythrocyte movement mechanism in the artery wall layer bloodflow is established, which consists in the rotation of red blood cells at low values of shear stress and the occurrence of circulatory motion of the erythrocyte membrane — with its high values.

The analysis of the compactly set erythrocytes influence on bloodflow in the compressed portion of artery is made, defined its hydraulic characteristics. The high blood pressure value caused by compression of the artery, and the influence of turbulence on the bloodflow pressure increase is determined.

**Keywords:** physico-mathematical modelling, extravasal compression, vertebral arteries.