



АНАЛІЗ ОСНОВНИХ МЕТОДІВ ПІДСИЛЕННЯ КОМПОЗИТНИМИ МАТЕРІАЛАМИ ПОХИЛИХ ПЕРЕРІЗІВ ЗГИННИХ ЗАЛІЗОБЕТОННИХ ЕЛЕМЕНТІВ

УДК 539.3

АВТОР

СТАНКЕВИЧ А.М. к.т.н., доцент Київського національного університету будівництва і архітектури

АНОТАЦІЯ

У даній роботі досліджено сучасні методи розв'язання багатовимірних задач будівельної механіки. Особлива увага приділяється методам зниження вимірності. Детально показано розвиток та удосконалення методу прямих, приведені недоліки існуючих підходів та вказано на можливий напрямок розширення методу на нові задачі.

The modern methods for solving multidimensional problems of structural mechanics are studied in this work. Attention is paid to methods of dimension reduction. The development and improvement of the direct method is detail shown. The shortcomings of existing approaches and shown as area expansion method to the new task are given.

КЛЮЧОВІ СЛОВА

метод прямих, будівельна механіка, методи зниження вимірності, проєкційний метод, товсті пластини.

Рівняння, які описують напружено-деформований стан (НДС) багатьох розрахункових моделей у лінійній постановці, розглядаються в рамках теорії пружності (статична та динамічна задачі) та термопружності. Ці рівняння визначені у тривимірному просторі або, з урахуванням симетрії (осьова та переносна симетрії), у двовимірному і відносяться до складних задач математичної фізики. Для найпростіших випадків видатними математиками та механіками були побудовані розв'язки задач, але більшість задач, особливо динамічних, не можна розв'язати аналітичними методами.

У будівельній механіці традиційно для розв'язання практичних задач використовувався двоетапний підхід. На першому етапі за допомогою гіпотез знижувалась вимірність вихідних рівнянь (редукція рівнянь), а потім редуковані рівняння розв'язувались аналітично або наближено. Свідченням тому є теорія згину балок Бернуллі, теорія пластин Кірхгофа – Лагранжа – Софі Жермен, теорія оболонки Лява, Тимошенко С.П., теорія кручення Сен-Венана та багато інших.

З появою комп'ютерної техніки підхід до розв'язання багатовимірних задач суттєво змінився. По-перше, з'явилися універсальні сучасні чисельні методи, за допомогою яких багатовимірна задача розв'язується безпосередньо. Це метод скінченних різниць, варіаційно-різницький метод та метод скінченних елементів. Останній, серед прямих чисельних методів, на сьогодні посів перше місце за застосуванням завдяки своїй універсальності та алгоритмічності. Ці властивості методу скінченних елементів дозволили побудувати програмні комплекси (ANSYS, NASTRAN, SIMULIA Abaqus, PLAXIS, LIRA та інші), що дозволяють розв'язувати статичні та динамічні задачі теорії пружності, стаціонарні та нестационарні задачі термопружності.



Але не виключається також традиційний підхід будівельної механіки, який можна назвати комбінованим підходом до розв'язання багатовимірних задач. У наш час цей підхід набув серйозної модифікації. На першому етапі для зниження вимірності вихідних рівнянь (редукції) замість гіпотез використовуються певні методи – аналітичні чи чисельні, на другому етапі для розв'язання редукованих рівнянь також чисельні або аналітичні. Як правило, на другому етапі більш ефективно використовувати чисельні методи, оскільки редуковані рівняння мають досить громіздкий вигляд, хоча й визначені на області меншої вимірності по просторових координатах.

Комбінований підхід тепер розглядається як альтернатива універсальним чисельним методам у тому сенсі, що, як правило, комбінований підхід використовується для об'єктів певного класу і в цьому випадку може бути більш ефективним та точним за універсальні чисельні методи на об'єктах цього класу. Крім того, результати, отримані за допомогою комбінованого методу, можуть використовуватись для тестування при модифікації універсальних методів.

Найбільш поширеними комбінованими методами є метод граничних інтегральних рівнянь (МГІР), (метод потенціалу, метод граничних елементів), у якому на першому етапі (зниження вимірності) використовується аналітичний підхід. У цих методах використовуються відомі фундаментальні розв'язки вихідних рівнянь теорії пружності і за їх допомогою будуються інтегральні рівняння, які визначені на границі області (на одиницю менша вимірність). Отже, для вихідних тривимірних рівнянь будуються двовимірні інтегральні рівняння, визначені в точках поверхні, що обмежує тривимірну область, а для двовимірних – одновимірні, визначені в точках граничної кривої. На другому етапі інтегральні рівняння чисельно зводяться до системи лінійних алгебраїчних рівнянь. Такий комбінований метод називають чисельно-аналітичним. Він використовується для розв'язання статичних та динамічних задач. Більшість комбінованих методів розроблено для досить широких класів класичних об'єктів будівельної механіки – бруса, пластини, оболонки. Але якщо історично використання певних гіпотез, за допомогою яких знижувалась вимірність вихідних рівнянь, базувалось на суттєвій різниці габаритних розмірів (двох поперечних розмірів для бруса та товщини для пластин та оболонок), то ці вимоги відкидаються і зниження вимірності за відповідними напрямками виконується за допомогою аналітичних або чисельних методів.

При зниженні вимірності у теорії товстих пластин вихідні рівняння теорії пружності розглядаються як звичайні диференціальні рівняння по поперечній координаті, а розв'язуючі функції вважаються такими, що залежать від інших координат, як від параметрів. Далі застосовується будь-який метод розв'язання звичайних диференціальних рівнянь – степеневий, асимптотичний або проєкційний. Після редукції диференціальних операторів по поперечній координаті отримуються нескінченні системи рівнянь (які потім

урізаються) відносно двовимірних розв'язуючих функцій, за допомогою яких будуються розв'язок вихідної задачі. До аналогічних результатів приводить варіаційне трактування вихідних залежностей із застосуванням процедури методу Рітца по поперечній координаті, а також використання чисельних методів (частіше методу скінченних різниць).

Початок застосування степеневого методу до зниження вимірності рівнянь теорії пружності для товстих пластин викладено у роботах А.І.Лур'є [8], Н.А.Кільчевського [7], В.В.Власова [3].

Алгоритм застосування степеневого методу, запропонований Н.А.Кільчевським, використано І.Т.Селезовим, а також І.Т.Селезовим та Г.А.Кільчинською для побудови редукованих двовимірних рівнянь динаміки та динамічної зв'язаної термопружності товстих пластин сталі товщини. Із застосуванням отриманих рівнянь проведено аналіз відомих прикладних теорій динаміки пластин. Даний варіант зниження вимірності пов'язаний із проблемою застосування методу однорідних розв'язків у теорії товстих пластин. Одним із основних етапів цього методу є побудова однорідних розв'язків для конкретних типів пластин.

У роботах І.І.Воровича та його учнів однорідні розв'язки використовуються для перетворення вихідних рівнянь, а при побудові розв'язку допоміжної задачі застосовується асимптотичний метод.

З метою розширення можливостей методу однорідних розв'язків В.В.Власовим [2, 3] запропоновано інше його трактування, отже, запропоновано новий метод – метод початкових функцій. Розв'язок просторової задачі теорії пружності у ньому записується через набір двовимірних функцій (переміщень та напружень), визначених на одній з бокових поверхонь пластини, яка передбачається плоскою, інша бокова поверхня може бути довільною. Послаблено вимоги до точності методу – використовуються переважно скінченні суми в операторах. У підсумку задача приводиться не до трансцендентних, а до системи диференціальних рівнянь.

Поточний розвиток методу початкових функцій отримав у роботі В.З.Власова та Н.Н.Леонтьєва, у якій наведено загальний розв'язок задачі про деформацію пружної основи під навантаженням, прикладеним до її поверхні, контактної задачі з розрахунку плити на пружній основі та інші результати.

Роботи А.А.Гольденвейзера поклали початок другому основному напрямку уточненої теорії пластин. Тут для редукування по поперечній координаті використано асимптотичний метод.

Прямим узагальненням традиційного підходу у класичній теорії пластин є метод, запропонований І.Н.Векуа [1]. Для зниження вимірності вихідних рівнянь теорії пружності для пластин запропоновано використання проєкційного методу. Вихідні рівняння статички пружного тіла, записані у вигляді дев'яти рівнянь у частинних похідних першого порядку та шести алгебраїчних рівнянь (закон Гука), домножуються на елементи деякої



повної системи функцій поперечної координати та інтегруються по цій координаті. Після перетворень отримується нескінченна система рівнянь, у якій невідомими є інтеграли від характеристик напружено-деформованого стану, помножені на елементи базисної системи. Ці інтеграли, як відомо, називаються моментами характеристик напружено-деформованого стану відносно системи функцій, що розглядається. Можливість знати нескінченну послідовність моментів деякої невідомої функції дозволяє знайти саму функцію.

І.Н. Векуа було запропоновано за базисну систему використовувати поліноми Лежандра. Ортогональність системи поліномів Лежандра обумовлює значні спрощення редукованих рівнянь. Запропонований метод виявився універсальним. Його можна застосовувати для пластин і оболонок змінної товщини, а також до об'єктів більш складної геометрії. Він надає широкі можливості застосуванню чисельних методів.

У роботах Чибірякова В.К. комбінований метод академіка Векуа І.Н. зниження вимірності для товстих пластин та оболонок модифіковано і він трактується як узагальнений метод скінченних інтегральних перетворень, на другому етапі якого для розв'язання редукованих рівнянь використовуються різні ефективні чисельні методи. Цей метод широко застосовується автором та його учнями для розв'язання статичних і динамічних задач [5].

Академіком Григоренко Я.М. та його учнями запропоновано комбінований підхід зведення вихідних двовимірних рівнянь уточненої теорії оболонок до одновимірних рівнянь різними аналітичними методами, що призводить до граничних одновимірних задач, які на другому етапі ефективно розв'язуються високоточним стійким методом дискретної ортогоналізації Годунова С. К. Розв'язано велику кількість статичних та динамічних (знаходження динамічних характеристик) задач.

Особливе місце посідає найстаріший із сучасних комбінованих підходів до розв'язання багатовимірних задач будівельної механіки – метод прямих, також відомий під різними назвами: метод ліній, дискретно-континуальний метод. Запропонований на початку 30-х років минулого сторіччя для розв'язання багатовимірних задач математичної фізики, цей метод зберіг свої головні особливості, визначені в роботі Канторовича Л.В. [6]:

1. Вихідна функція в простішому варіанті від двох змінних розглядається як континуальна по одній змінній та дискретна по іншій.
2. Вихідні рівняння по дискретній змінній перетворюються заміною похідних по цій змінній частками скінченних різниць. У результаті утворюється система звичайних диференціальних рівнянь.
3. На другому етапі аналітично будується загальний розв'язок системи звичайних диференціальних рівнянь. Оскільки розглядаються рівняння із сталими коефіцієнтами, то це дає можливість побудувати загальний розв'язок цих рівнянь. Оскільки матричні

коефіцієнти мають спеціальний вигляд, для якого відомі власні вектори і власні значення, це дає змогу перетворити зв'язану систему звичайних диференціальних рівнянь на незв'язану систему.

4. Можливість знайти аналітично загальний розв'язок системи звичайних диференціальних рівнянь дозволяє розглядати вихідні рівняння, визначені в області будь-якої форми. Вважаємо, що це головна особливість методу прямих.

У згаданій роботі вихідна задача формулюється у варіаційній постановці, в наступних роботах постановка задачі, як правило, подається у вигляді диференціальних рівнянь у частинних похідних. В інших роботах Канторовича Л.В. розглядаються задачі кручення призматичних стержнів, які також описуються класичними рівняннями математичної фізики. Різницеві співвідношення побудовані за допомогою інтерполяційних поліномів. Натомість, у роботі Фадєєвої В.Н. скінченно-різницеві співвідношення будуються за допомогою ряду Тейлора, при цьому отримано апроксимацію похідних 4-го порядку точності.

У цих перших роботах підкреслюється важлива властивість методу прямих – комбінований підхід, де по одній координаті розглядається континуальна зміна координати, що значно підвищує точність у порівнянні з дискретизацією по всіх координатах. У цьому полягає головна особливість методу прямих. І це ще до появи ЕОМ та ефективних високоточних алгоритмів розв'язання граничних задач для систем звичайних диференціальних рівнянь.

Безпосередньо до розв'язання статичних задач теорії пружності (двовимірних та тривимірних) метод прямих вперше адаптував проф. Слободянський М.Г. Крім традиційних задач математичної фізики, розглянуто плоску задачу теорії пружності в різних постановках та просторову задачу теорії пружності для призматичних тіл. Як вихідні, автор розглядає спеціального вигляду рівняння просторової задачі, отримані ним в іншій роботі. І в цьому випадку автор будує загальний розв'язок редукованої системи рівнянь аналітично. Це дає змогу дослідити точність побудови розв'язків граничних задач. Для редукування вихідних рівнянь Слободянський М.Г., як і Канторович Л.В., використовує інтерполяцію, правда, трохи іншого вигляду, яка зв'язує три сусідні прямі. У роботах інших авторів такий підхід називають «ковзною інтерполяцією».

У будівельній механіці роботами проф. Винокурова Л.П. розроблено варіант методу прямих для розв'язання просторових задач теорії пружності. Вихідними рівняннями є рівняння просторової задачі теорії пружності у формі Ляме. Побудовано спеціальний інтерполяційний поліном для апроксимації похідних різницевиими виразами. Поліном використовується послідовно для певної групи прямих, що називається, як вище зазначено, «ковзною інтерполяцією». Редуковані рівняння будуються в декартовій та косокутній системах координат, у циліндричних та сферичних координатах для ізотропного та ортотропного матеріалів у



межах теорії пластин. Для розв'язання редукованих рівнянь пропонується розроблений автором метод послідовних наближень. За допомогою цього методу, який автор називає «дискретним методом», розв'язано багато задач.

Учнями проф. Винокурова Л.П. метод поширюється на задачі теорії пластин. Розглядаються прямокутні та косокутні пластини, ізотропні та ортотропні, із лінійною зміною товщини в одному напрямку. При побудові редукованих рівнянь використовується «ковзна інтерполяція», а для розв'язання редукованих рівнянь із змінними коефіцієнтами – наближений метод.

Проф. Шкельовим Л.Т. метод прямих поширено на задачі визначення напружено-деформованого стану пластин довільної форми в полярних координатах, для розв'язання плоскої задачі теорії пружності. Для побудови редукованих рівнянь безпосередньо використовувалися формули методу скінченних різниць по дискретній координаті. Редуковані рівняння розв'язувались точно з використанням власних векторів та власних чисел матричних коефіцієнтів для перетворення зв'язаної системи диференціальних рівнянь до системи незв'язаних рівнянь.

Учнями проф. Шкельова Л.Т. зроблено подальші удосконалення методу з поширенням на задачі згину багатозв'язних пластин, пластинчастих систем, багат шарових пластин та складених пластин та оболонок.

У монографіях [9, 10] систематизовано розвинений проф. Шкельовим Л.Т. та його учнями напрямок методу прямих. Наведені головні принципи побудови редукованих рівнянь для просторових пластинчастих елементів та оболонок. Побудовано загальні розв'язки редукованих рівнянь, коли це можливо. Запропоновано комбінувати метод прямих із методом Бубнова-Гальоркіна для розв'язання просторової задачі теорії пружності.

Після появи ефективного стійкого чисельного методу дискретної ортогоналізації Годунова С.К. [4] його інтенсивно почали застосовувати у будівельній механіці для розв'язання граничних задач для системи звичайних диференціальних рівнянь, оскільки він виявився кращим за інші подібні методи (матричної прогонки, стрільби та ін.). Для розв'язання задач теорії оболонок цей метод першим був застосовано академіком Григоренко Я.М. та його учнями, у тому числі при використанні методу прямих, і вперше при використанні методу прямих для знаходження динамічних характеристик оболонок. На метод прямих, що застосовується для неканонічних областей, застосування алгоритму дискретної ортогоналізації Годунова С.К. запропоновано в роботі.

ВИСНОВКИ

Досліджуючи історію розвитку методу прямих, як одного з методів будівельної механіки, необхідно визнати, що він потребує суттєвої модернізації та розширення його можливостей.

По-перше, процедура редукції вихідних рівнянь не зовсім відповідає сучасному стану методів, що використовуються для зниження вимірності

рівнянь математичної фізики. У варіаційних та проєкційних методах процес їх використання значно простіший та переконливіший, не вимагає врахування позаконтурних значень невідомої функції.

По-друге, в існуючих алгоритмах методу прямих важко врахувати змінність товщини по континуальній координаті при редукуванні по поперечній координаті.

По-третє, до цього часу метод прямих використовувався для розв'язання статичних задач теорії пружності, ніколи не використовувався для розв'язання задач нестационарної термопружності, нестационарних динамічних задач. Це стосується як задач на площині, так і задач у тривимірному просторі.

ЛІТЕРАТУРА

1. Векуа И.Н. Теория тонких пологих оболочек переменной толщины / Векуа И.Н. – Тбилиси: Мецниереба, 1965. – 103 с.
2. Власов В.В. Применение метода начальных функций к расчету толстых плит / Власов В.В. // Исследования по теории сооружений. – М.: Госстройиздат, 1961. – Вып. 10. – С. 189 – 207.
3. Власов В.В. Метод начальных функций в осесимметричной задаче теории упругости / Власов В.В. // Расчет пластин и оболочек. – 1963. – Вып. 34. – С.31 – 45.
4. Годунов С.К. О численном решении краевых задач для систем линейных обыкновенных дифференциальных уравнений / Годунов С.К. // Успехи математических наук. – 1961. – Т.16. – Вып. 3. – С. 171–174.
5. Исаханов Г.В. Численно-аналитический метод решения задач статики толстых неоднородных пластин / Исаханов Г.В., Чибириков В.К., Смолляр А.М. // Тр. 13-й Всесоюз. конф. по теории пластин и оболочек. Ч.2. – Таллин, 1983. – С. 130–135.
6. Канторович Л.В. Один прямой метод приближенного решения задачи о минимуме двойного интеграла / Канторович Л.В. // Изв. АН СССР, VII серия, 1933.
7. Кильчевский Н.А. Обобщение современной теории оболочек / Кильчевский Н.А. // Прикл. матем. и мех. – 1939. – Т.2. – Вып. 4. – С. 427–438.
8. Лурье А.И. К теории толстых плит / Лурье А.И. // Прикл. матем. и мех. – 1924. – Т.6. – Вып. 2–3. – С. 151–168.
9. Метод прямых и его использование при определении напряженного и деформированного состояния пластин и оболочек / [Шкелев Л.Т., Морсков Ю.А., Романова Т.А., Станкевич А.Н.]. – Киев: Национальная академия наук Украины, Институт механики им. С.П. Тимошенко, Технический центр, 2002. – 177 с.
10. Применение метода прямых для определения напряженного и деформированного состояния пространственных и пластинчатых конструктивных элементов: монография / [Шкелев Л.Т., Станкевич А.Н., Пошивач Д.В. и др.]. – К.: КНУСА, 2004. – 136 с.