

**МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ТЕПЛООВОГО СОСТОЯНИЯ  
СЕРДЕЧНИКА ПОРОШКОВОЙ ЛЕНТЫ ПРИ ДУГОВОЙ НАПЛАВКЕ****Кассов В. Д., Турчанин М. А., Малыгина С. В.**

Проанализированы тепловое состояние оболочки и шихты порошковой ленты на разных ее участках по длине свободного вылета. Показано, что повышение температуропроводности шихты позволяет повысить среднюю температуру нагрева сердечника и выровнять распределение температуры по его толщине. Полученные математические зависимости позволяют наметить пути управления технологическими характеристиками процесса наплавки порошковой лентой. Полученные математические зависимости позволяют определить температуру в любой точке сердечника на вылете порошковой ленты в зависимости от безразмерных критериев и относительной толщины сердечника, а также наметить пути управления технологическими характеристиками процесса наплавки порошковыми лентами.

Проаналізовано тепловий стан оболонки та шихти порошкової стрічки на різних її ділянках по довжині вільного вильоту. Показано, що підвищення температуропровідності шихти дозволяє підвищити середню температуру нагріву сердечнику та вирівняти розподілення температури по його товщині. Отримані математичні залежності дозволяють намітити шляхи управління технологічними характеристиками процесу наплавлення порошковою стрічкою. Отримані математичні залежності дозволяють визначити температуру в будь-якій точці сердечника на вильоті порошкової стрічки в залежності від безрозмірних критеріїв і відносної товщини сердечника, а також намітити шляхи керування технологічними характеристиками процесу наплавлення порошковими стрічками.

The thermal condition of a cover and charge of a powder tape on its various sites on length of a free departure is analyzed. It is shown that the increase of diffusivity of a charge allows to increase average temperature of heating of the core and to level temperature distribution on its thickness. The received mathematical dependences allow to plan the ways of management of technical characteristics on powder tape deposition process. The received mathematical dependences allow to define temperature in any point of the core on a departure of a powder tape depending on dimensionless criteria and a relative thickness of the core, and also to plan ways of management of technical characteristics on the process melting deposition with the help of a powder tape.

Кассов В. Д.

д-р техн. наук, проф., зав. кафедрой ПТМ ДГМА  
[ptm@dgma.donetsk.ua](mailto:ptm@dgma.donetsk.ua)

Турчанин М. А.

д-р хим. наук, проф. кафедры ТОЛП ДГМА  
[tolp@dgma.donetsk.ua](mailto:tolp@dgma.donetsk.ua)

Малыгина С. В.

канд. техн. наук, ст. преп. кафедры ПМ ДГМА

УДК 621.791.75.04

Кассов В. Д., Турчанин М. А., Малыгина С. В.

**МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ТЕПЛООВОГО СОСТОЯНИЯ СЕРДЕЧНИКА ПОРОШКОВОЙ ЛЕНТЫ ПРИ ДУГОВОЙ НАПЛАВКЕ**

В условиях дефицита материальных и энергетических ресурсов восстановительная наплавка порошковой лентой является высокоэффективным ресурсосберегающим технологическим приемом, обеспечивающим удовлетворение регламентации надежности и долговечности, соблюдение принципов взаимозаменяемости и экономичности [1]. При этом важное значение приобретают вопросы качества наплавленного металла, обеспечения требуемой износостойкости [2]. Однако при наплавке порошковыми электродами легированных износостойких сплавов не всегда обеспечивается химическая однородность металла шва, получение в нем соответствующей структуры [3], что повышает темпы износа восстановленных рабочих поверхностей. Это во многом связано с неравномерностью плавления оболочки и сердечника порошковой ленты [4]. Поэтому особый интерес для регулирования процесса представляет распределение тепла на вылете порошковой ленты, что позволит контролировать нагрев и расплавление компонентов шихты сердечника.

Цель работы – изучение теплового состояния системы «сердечник – оболочка» порошковой ленты при нагреве в процессе дуговой наплавки.

Сердечник порошковой ленты можно представить как тело, ограниченное двумя параллельными плоскостями – оболочкой ленты. Изменение температуры  $T_c$  во времени происходит только в одном направлении  $x$ , в двух других направлениях  $y$  и  $z$  температура неизменна. Следовательно, задача является одномерной.

Теплообмен между поверхностями сердечника и оболочки ленты происходит по закону Ньютона. Найдем распределение температуры на вылете по толщине сердечника порошковой ленты в любой момент времени  $t > 0$ .

Поместим начало координат в середину порошковой ленты. Тогда  $r$  – это половина толщины сердечника порошковой ленты, т. е.  $r = h/2$ .

Условие задачи математически может быть сформулировано следующим образом. Решить дифференциальное уравнение теплопроводности Лапласа:

$$\frac{\partial T_c(x,t)}{\partial t} = a \frac{\partial^2 T_c(x,t)}{\partial x^2}, \quad (t > 0, r < x < r); \tag{1}$$

при начальных и граничных условиях:

$$T_c(x,0) = T_o; \tag{2}$$

$$\frac{\partial T_c(0,t)}{\partial x} = 0; \tag{3}$$

$$-\lambda \frac{\partial T_c(r,t)}{\partial x} + \alpha [T(t) - T_c(r,t)] = 0, \tag{4}$$

где  $a$  – коэффициент температуропроводности,  $m^2/c$ ;  $\lambda$  – коэффициент теплопроводности,  $вт/(м·град)$ ;  $\alpha$  – коэффициент теплообмена,  $вт/(м^2·град)$ .

Если учесть, что  $T(t)$  есть линейная функция времени, то граничное условие (4) можно записать в виде:

$$-\frac{\partial T_c(r,t)}{\partial x} + \frac{\alpha}{\lambda} [T_o + gt - T_c(r,t)] = 0. \tag{4'}$$

Задачу (1)–(4) решали операционным методом. Решение поставленной задачи получили в следующем виде:

$$T_c(x,t) - T_o = gt - \frac{g}{2a} \left[ r^2 \left( 1 + \frac{2}{Bi} \right) - x^2 \right] + \frac{gr^2}{a} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{A_n}{\mu_n^2} \cos \left( \mu_n \frac{x}{r} \right) \exp(-\mu_n^2 Fo), \quad (5)$$

где  $Bi = \frac{\alpha r}{\lambda}$  – критерий Био;  $Fo = at/r^2$  – критерий Фурье [5];  $A_n$  – начальные тепловые амплитуды, определяемые из соотношения:

$$A_n = (-1)^{n+1} \frac{2Bi \sqrt{Bi^2 + \mu_n^2}}{\mu_n (Bi^2 + Bi + \mu_n^2)},$$

$\mu_n$  – простые корни, определяемые из характеристического уравнения:

$$ctg \mu = \mu / Bi. \quad (6)$$

Выражение (5) позволяет рассчитать температуру  $T_c(x,t)$  в любой точке сердечника порошковой ленты, находящейся на вылете. Интенсивность повышения температуры оболочки ленты (окружающей среды) характеризует безразмерная скорость нагрева – критерий Предводителя:

$$Pd = \left( \frac{dT}{dFo} \right)_{\max}.$$

Поскольку  $T(t) = T_o + gt$ , то  $Pd = \frac{r^2}{a} \cdot \frac{dT}{dt} = \frac{gr^2}{a}$ .

Тогда решение (5) задачи нагрева сердечника можно представить в виде:

$$\frac{\Delta T_c}{Pd} = \frac{T_c(x,t) - T_o}{Pd} = Fo - 0,5 \left( 1 + \frac{2}{Bi} - \frac{x^2}{r^2} \right) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{A_n}{\mu_n^2} \cos \left( \mu_n \frac{x}{r} \right) \exp(-\mu_n^2 Fo). \quad (7)$$

Таким образом, относительная температура в любой точке сердечника на вылете порошковой ленты является функцией безразмерных величин  $Fo, Bi, \frac{x}{r}$ .

На оси порошковой ленты, т. е. при  $x = 0$ , выражение (7) принимает вид:

$$\frac{\Delta T_c}{Pd} = Fo - 0,5 \left( 1 + \frac{2}{Bi} \right) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{A_n}{\mu_n^2} \exp(-\mu_n^2 Fo). \quad (8)$$

Здесь температура нагрева сердечника минимальна.

Выполним анализ решения (7). Если положить  $Bi \rightarrow \infty$ , то при заданных значениях  $\lambda$  и  $r$  это условие эквивалентно  $\alpha \rightarrow \infty$ . А это означает, что термическое сопротивление переходу теплоты от оболочки к сердечнику порошковой ленты  $1/\alpha$  равно нулю. Тогда из граничного условия (4') следует, что температура поверхности сердечника мгновенно становится равной температуре оболочки и затем изменяется по линейному закону  $T_c(r,t) = T_o + gt$ .

Для решения такой задачи необходимо в (7) положить  $Bi = \infty$ . Тогда:

$$\frac{\Delta T_c}{Pd} = Fo - 0,5 \left( 1 - \frac{x^2}{r^2} \right) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{A_n}{\mu_n^2} \cos \left( \mu_n \frac{x}{r} \right) \exp(-\mu_n^2 Fo), \quad (9)$$

где  $\mu_n = (2n-1) \frac{\pi}{2}$ ,  $A_n = (-1)^{n+1} \frac{4}{(2n-1)\pi}$ .

Если критерий Био мал ( $Bi < 0,1$ ), то все члены ряда в решении (7) ничтожно малы по сравнению с первым, так как в этом случае корни характеристического уравнения  $\mu_n \rightarrow (n-1)\pi$ , а коэффициенты  $A_n \rightarrow 0$ , за исключением амплитуды  $A_1$ , которая близка к единице.

Для малых значений  $\mu_1$  можно  $ctg\mu_1$  заменить на  $1/\mu_1$ , тогда из уравнения (6) получим, что  $\mu_1^2 = Bi$ . Следовательно, решение (7) примет вид:

$$\frac{\Delta T_c}{Pd} = Fo - 0,5\left(1 + \frac{2}{Bi} - \frac{x^2}{r^2}\right) + \frac{1}{Bi} \cos\left(\sqrt{Bi} \frac{x}{r}\right) \exp(-BiFo). \tag{10}$$

Интенсивность нагрева сердечника определяется отношением интенсивностей двух эффектов – переноса теплоты через граничный слой (теплообмен на поверхности сердечника) и переноса теплоты материалом сердечника (теплопроводность внутри шихты), т. е. отношением  $\alpha/\lambda$ .

Продолжим анализ выражения (7). Величины  $\mu_n$  представляют собой ряд возрастающих чисел  $\mu_1 < \mu_2 < \dots < \mu_n$ . Числовые значения членов ряда в выражении (7) быстро уменьшаются с возрастанием номера члена, так как при этом возрастает значение  $\mu_n$ . Поскольку ряд знакопеременный, то он быстро сходится. Кроме того, для больших значений  $Fo$  ряд сходится быстрее, чем для малых.

Для практических расчетов уже при  $Fo \geq 0,3$  в уравнении (7) можно ограничиться только первым членом ряда. При этом оно упростится и примет вид:

$$\frac{\Delta T_c}{Pd} = Fo - 0,5\left(1 + \frac{2}{Bi} - \frac{x^2}{r^2}\right) + \frac{A_1}{\mu_1^2} \cos\left(\mu_1 \frac{x}{r}\right) \exp(-\mu_1 Fo). \tag{11}$$

Из выражений (7), (8) видно, что решение уравнения теплопроводности состоит из двух составляющих: регулярной и нерегулярной. Эти части по-разному зависят от времени. Регулярная составляющая увеличивается с ростом числа Фурье по линейной зависимости, т.е. довольно быстро. Нерегулярная составляющая, которая отражает внутреннее тепловое состояние сердечника перед началом нагрева, очень быстро уменьшается с ростом  $Fo$ . Следовательно, существует такое значение числа Фурье, за которым нерегулярная составляющая становится пренебрежительно малой. Эта граница считается началом наступления регулярного режима нагрева сердечника. Регулярным режимом можно считать нагревание, когда нерегулярная составляющая составляет не более 5 % регулярной.

Пользуясь формулами (8) и (11), можно, задаваясь критерием Био, вычислить наступление регулярного режима на оси порошковой ленты и, следовательно, для всего вылета:

$$\frac{A_1}{\mu_1^2} \exp(-\mu_1^2 Fo) \leq 0,05(Fo - 0,5 - 1/Bi). \tag{12}$$

Таким образом, начиная с некоторого значения  $Fo > Fo'$ , суммой ряда можно пренебречь, а режим нагрева сердечника становится квазистационарным. Тогда температура в любой точке сердечника будет линейной функцией времени, а ее распределение по толщине сердечника – параболическим.

Найдем среднюю относительную температуру  $\Delta \bar{T}_c / Pd$  по толщине сердечника порошковой ленты в заданный момент времени  $t$ . Эту температуру можно найти, если проинтегрировать решение (7) по  $x/r$  в пределах от 0 до 1:

$$\frac{\Delta \bar{T}_c}{Pd} = \int_0^1 \frac{\Delta T_c}{Pd} d\left(\frac{x}{r}\right) = Fo - \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{Bi}\right) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{B_n}{\mu_n^2} \exp(-\mu_n^2 Fo), \tag{13}$$

где  $B_n = \frac{A_n \sin \mu_n}{\mu_n}$ .

Коэффициенты  $B_n$  все положительны и с увеличением  $\mu_n$  быстро уменьшаются. Для практических расчетов можно ограничиться первым членом ряда, поэтому формула (13) упрощается и примет вид:

$$\frac{\Delta \bar{T}_c}{Pd} = Fo - \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{Bi}\right) + \frac{B_1}{\mu_1^2} \exp(-\mu_1 Fo). \quad (14)$$

Используя формулы (7) и (13), были определены зависимости температуры нагрева сердечника от скорости нагрева оболочки, величины критерия Био и коэффициента теплопроводности шихты. С ростом критерия Био уменьшается тепловое сопротивление переходу теплоты от оболочки к сердечнику, и средняя температура сердечника возрастает, а время наступления регулярного режима уменьшается. С увеличением коэффициента  $a$  интенсивность нагрева сердечника возрастает, а регулярный режим нагрева наступает быстрее. Так при  $a = 0,2 \cdot 10^{-6} \text{ м}^2/\text{с}$  регулярный режим нагрева вплоть до времени нагрева 12 с не наступает при всех значениях критерия Био. При  $a = 0,4 \cdot 10^{-6} \text{ м}^2/\text{с}$  регулярный режим нагрева наступает после 8-ой секунды при значениях  $Bi > 20$  (рис. 1, а). При  $a = 2 \cdot 10^{-6} \text{ м}^2/\text{с}$  регулярный режим нагрева сердечника наступает уже на 6-ой секунде при  $Bi > 0,5$ . При увеличении критерия Био до 20 регулярный режим наступает уже на третьей секунде (рис. 1, б).

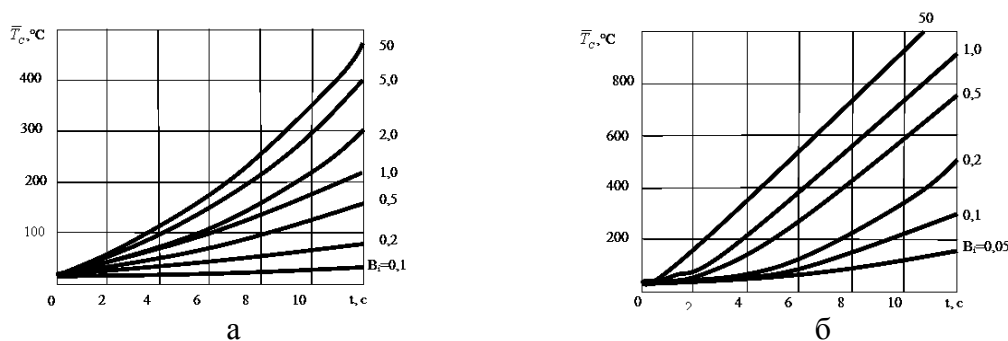


Рис. 1. Расчетные средние температуры сердечника порошковой ленты в зависимости от времени нагрева и критерия Био:  
 а –  $g = 50$  град/с,  $a = 0,4 \cdot 10^{-6} \text{ м}^2/\text{с}$ ; б –  $g = 100$  град/с,  $a = 2,0 \cdot 10^{-6} \text{ м}^2/\text{с}$

Таким образом, повышение теплопроводности шихты позволяет увеличить среднюю температуру нагрева сердечника и выровнять распределение температуры по его толщине. Результаты работы легли в основу создания новых высокоэффективных порошковых лент, позволили разработать технологические рекомендации по управлению технологическими характеристиками процесса наплавки.

### ВЫВОДЫ

Рассматривая сердечник порошковой ленты как тело, ограниченное двумя параллельными плоскостями оболочки ленты, получена математическая модель нагрева сердечника, позволяющая определить температуру в любой точке сердечника на вылете порошковой ленты в зависимости от безразмерных критериев Предводителя, Био и Фурье и относительной толщины сердечника.

### ЛИТЕРАТУРА

1. Рябцев И. А. Высокопроизводительная широкослойная наплавка электродными проволоками и лентами / И. А. Рябцев // Автоматическая сварка. – 2005. – № 6. – С. 36–41.
2. Патон Б. Е. Проблемы сварки на рубеже веков / Б. Е. Патон // Автоматическая сварка. – 1999. – № 1. – С. 4–15.
3. Кассов В. Д. Наплавка порошковой лентой деталей энергетических установок / В. Д. Кассов, Е. В. Кассова // Вестник двигателестроения. – 2006. – № 2. – С. 151–153.
4. Кассов В. Д. Восстановительная наплавка комплекснолегированной порошковой проволокой деталей металлургического оборудования / В. Д. Кассов, А. П. Литвинов // Захист металургійних машин від поломок : зб. наук. праць. – Маріуполь: ПДТУ, 2006. – № 9. – С. 158–162.
5. Юдаев Б. Н. Теплопередача / Б. Н. Юдаев. – М. : Высшая школа, 1981. – 319 с.