

## РАЗВИТИЕ МЕТОДОЛОГИИ ПРОЧНОСТНЫХ РАСЧЕТОВ ДВУТАВРОВЫХ БАЛОК

Холодняк Ю. С., Периг А. В., Капорович С. В.

Исследован характер изменения эквивалентных напряжений по высоте сечения двутавровой балки, установлены места их максимума во взаимосвязи с параметрами двутавра и внутренними силовыми факторами, действующими в сечении. Проанализированы условия, при которых наибольшие эквивалентные напряжения в сечении двутавровой балки не превышают их допустимой величины. Предложена упрощенная графическая методика комплексной оценки прочности двутавровой балки по нормальным, касательным и эквивалентным напряжениям, которая рекомендуется студентам и преподавателям технических ВУЗов, а также производственным специалистам в области прочностных расчетов.

Досліджено характер зміни еквівалентних напружень по висоті перерізу двотаврової балки, встановлено місця їхнього максимуму у взаємозв'язку з параметрами двотавра і внутрішніми силовими факторами, що діють у перерізі. Проаналізовано умови, при яких найбільші еквівалентні напруження в перерізі двотаврової балки не перевищують їхнього допустимої величини. Запропоновано спрощену графічну методику комплексної оцінки міцності двотаврової балки з нормальних, дотичних і еквівалентних напружень, яка пропонується студентам і викладачам технічних ВНЗ, також виробничим фахівцям у сфері розрахунків на міцність.

The equivalent stress distribution along the height of an I-beams cross-section has been studied. The zones of maximum equivalent stress in conjunction with the I-beams geometric parameters and power load at the section have been found. The conditions for maximum equivalent stresses have been specified to not exceed the allowable values. An improved method for the comprehensive assessment of I-beams strength against the normal, tangential and equivalent stresses has been proposed. This computational approach may be recommended to lecturers and students of technical universities as well as engineering specialists in the field of strength computations.

Холодняк Ю. С.

Периг А. В.

Капорович С. В.

канд. техн. наук,  
доц. каф. ТМ ДГМА  
texmex@dgma.donetsk.ua  
канд. техн. наук,  
доц. каф. АПП ДГМА  
канд. техн. наук,  
ст. преп. каф. ТМ ДГМА

ДГМА – Донбасская государственная машиностроительная академия, г. Краматорск.

УДК 539.4.001.2: 624.014.2

Холодняк Ю. С., Периг А. В., Капорович С. В.

## РАЗВИТИЕ МЕТОДОЛОГИИ ПРОЧНОСТНЫХ РАСЧЕТОВ ДВУТАВРОВЫХ БАЛОК

В нынешнюю эпоху стремительного развития техники особое значение приобретает подготовка ВУЗаами высокообразованных специалистов, владеющих солидным комплексом теоретических знаний и практических навыков, позволяющих создавать всё более сложные образцы новой техники. Немаловажную роль в этом призвано сыграть совершенствование методик изложения базовых дисциплин инженерной подготовки, наполнение их новыми знаниями, углубляющими существующие теоретические представления.

Одними из основных в курсе сопротивления материалов, закладывающем фундамент инженерных расчётов, и ряде других смежных дисциплин являются вопросы прочности массово используемых в машиностроении, строительстве и ряде других отраслей промышленности конструктивных элементов стержневой формы, работающих в условиях плоского изгиба и именуемых балками.

Указанные вопросы давно уже относятся к классическим, казалось бы полностью исчерпанным в теоретическом плане и не нуждающимся в дополнительном изучении. Однако, как показывает практика прочностных расчётов, неясные вопросы здесь всё же остаются.

Считается общепризнанным [1–4], что для обеспечения надёжной эксплуатации балки должны соблюдаться условия её прочности по нормальным (1), касательным (2) и эквивалентным (3) напряжениям:

$$\sigma_{max} \leq [\sigma]; \quad (1)$$

$$\tau_{max} \leq [\tau]; \quad (2)$$

$$\sigma_{eq}^{max} \leq [\sigma]. \quad (3)$$

Методики нахождения максимальных нормальных  $\sigma_{max}$  и максимальных касательных  $\tau_{max}$  напряжений, а также определения соответствующих допускаемых напряжений –  $[\sigma]$  и  $[\tau]$  достаточно полно и подробно изложены в учебной литературе и в дополнительном анализе не нуждаются, чего нельзя сказать о методике нахождения максимальных эквивалентных напряжений в балках ( $\sigma_{eq}^{max}$ ), прежде всего потому, что места их действия в большинстве случаев неизвестны. Так, авторы упомянутых и многих других источников, приводя примеры полной проверки балок на прочность, рассматривают двутавровые балки и отмечают, не приводя убедительных доказательств, что наибольшие эквивалентные напряжения в их поперечных сечениях действуют на стыках ребра с полками. По другим формам поперечных сечений подобных сведений практически нет.

В ходе исследований по данному вопросу [5, 6], ранее проведенных с участием авторов применительно к балкам прямоугольного и круглого поперечных сечений, было установлено, что наибольшие эквивалентные напряжения в зависимости от соотношения величин изгибающего момента  $M$  и поперечной силы  $Q$ , действующих в сечении, имеют место либо в крайних верхних и нижних слоях волокон балки, либо в волокнах нейтрального слоя (т. е. в местах действия  $\sigma_{max}$  и  $\tau_{max}$ ). Их величины при соблюдении условий прочности (1) и (2) никогда не превышают  $[\sigma]$ , т. е. условие прочности по эквивалентным напряжениям (3) в балках названных сечений выполняется автоматически.

Настоящая работа является логическим продолжением упомянутых и других исследований авторов по совершенствованию существующих методик энергосиловых расчетов стержневых конструкций [7–10].

Цель работы – изучить характер изменения эквивалентных напряжений по высоте сечения двутавровой балки, связать положение и величины их максимумов с внутренними силовыми факторами, действующими в сечении, и на этой основе внести соответствующие коррективы в методику силового расчёта указанных балок.

На рис. 1 показана форма сечения двутавровой балки (со стандартными обозначениями) и эпюры нормальных  $\sigma$  и касательных  $\tau$  напряжений по высоте этого сечения [7].

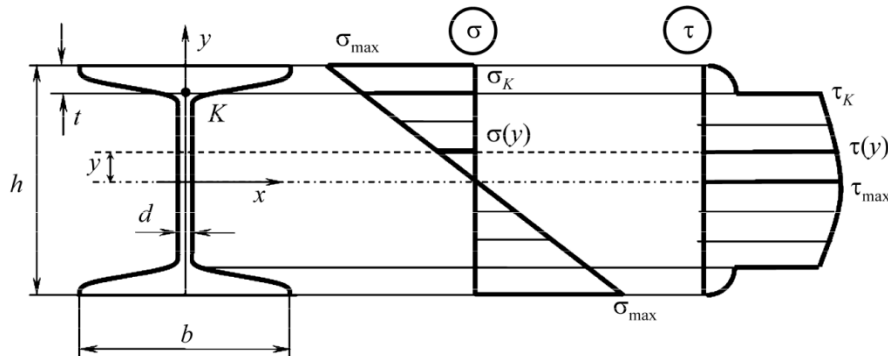


Рис. 1. Распределение нормальных и касательных напряжений по высоте сечения двутавровой балки

Как известно, нормальные напряжения изменяются по линейному закону:

$$\sigma = \frac{M}{J_x} \cdot y, \quad (4)$$

а касательные – по квадратичному:

$$\tau = \frac{Q \cdot S_x^{(y)}}{d \cdot J_x} \quad \text{при } 0 \leq y \leq \frac{h}{2} - t; \quad (5)$$

или

$$\tau = \frac{Q \cdot S_x^{(y)}}{b \cdot J_x} \quad \text{при } \frac{h}{2} - t < y \leq \frac{h}{2}. \quad (6)$$

где  $M$  и  $Q$  – соответственно изгибающий момент и поперечная сила, действующие в сечении;

$J_x$  – момент инерции сечения относительно оси  $x$  (перпендикулярной силовой плоскости);

$S_x^{(y)}$  – статический момент относительно оси  $x$  части сечения, лежащей выше уровня  $y$ .

Эквивалентные напряжения в точках сечения балки определяются по третьей или четвертой теориям прочности:

$$\sigma_{eq} = \sqrt{\sigma^2 + \alpha \cdot \tau^2}, \quad (7)$$

где  $\alpha=4$  – по третьей теории прочности и  $\alpha=3$  – по четвертой.

Принимая во внимание скачкообразное уменьшение  $\tau$  при переходе от ребра к полке (рис. 1), не трудно сделать вывод о том, что наибольшие эквивалентные напряжения возникают в пределах ребра двутавра, но не в его полках.

Подставив в (7) выражения (4) и (5), получим:

$$\sigma_{eq} = \sqrt{\left(\frac{M}{J_x} \cdot y\right)^2 + \alpha \cdot \left(\frac{Q \cdot S_x^{(y)}}{d \cdot J_x}\right)^2}. \quad (8)$$

Выразим теперь  $S_x^{(y)}$  через статический момент половины сечения двутавра –  $S_x$ :

$$S_x^{(y)} = S_x - 0,5 \cdot d \cdot y^2. \quad (9)$$

Подставив (9) в (8), получим закон изменения  $\sigma_{eq}$  по высоте ребра двутавра:

$$\sigma_{eq} = \sqrt{\left(\frac{M}{J_x} \cdot y\right)^2 + \alpha \cdot \left[\frac{Q}{d \cdot J_x} \cdot (S_x - 0,5 \cdot d \cdot y^2)\right]^2}. \quad (10)$$

С применением открытой системы компьютерной алгебры GNU CAS Maxima исследуем функцию (10) на экстремум. Возьмем первую производную от  $\sigma_{eq}$  по  $y$  и приравняем её к нулю:

$$\frac{d\sigma_{eq}}{dy} = \frac{1}{2} \cdot \frac{\frac{2 \cdot M^2 \cdot y}{J_x^2} - \frac{2 \cdot \alpha \cdot Q^2 \cdot (S_x - 0,5 \cdot d \cdot y^2) \cdot y}{d \cdot J_x^2}}{\sqrt{\frac{M^2 \cdot y^2}{J_x^2} + \frac{\alpha \cdot Q^2 \cdot (S_x - 0,5 \cdot d \cdot y^2)^2}{d^2 \cdot J_x^2}}} = 0. \quad (11)$$

Решив уравнение (11), найдём значения  $y$ , при которых функция (10) может иметь экстремумы:

$$y_{extr} = 0; \pm \frac{1}{\alpha \cdot d \cdot Q} \cdot \sqrt{2 \cdot \alpha \cdot d \cdot (\alpha \cdot Q^2 \cdot S_x - M^2 \cdot d)}. \quad (12)$$

Как видно из (12), число действительных корней уравнения (11) может быть различным в зависимости от знака подкоренного выражения.

При  $\alpha \cdot Q^2 \cdot S_x > M^2 \cdot d$  или  $(M/Q) < (\alpha \cdot S_x/d)^{0,5}$  подкоренное выражение в (12) положительно и число корней – три (один – на нулевом уровне и два симметричных относительно оси  $x$ ).

При  $\alpha \cdot Q^2 \cdot S_x \leq M^2 \cdot d$  или  $(M/Q) \geq (\alpha \cdot S_x/d)^{0,5}$  подкоренное выражение в (12) или отрицательно, или равно нулю; в этом случае имеем один действительный корень:  $y_{extr} = 0$ .

Таким образом, у каждого из номеров двутавра существует своё отношение  $M/Q$ , при достижении и превышении которого зависимость (10) имеет только одну возможную точку экстремума. Назовем это отношение критическим:

$$\left(\frac{M}{Q}\right)_{cr} = \sqrt{\frac{\alpha \cdot S_x}{d}}. \quad (13)$$

Так, при  $\alpha=3$  указанное отношение для двутавра №10 равно 123,8 мм, для двутавра №30 – 351,7 мм, для двутавра №60 – 610,5 мм.

Чтобы выяснить, действительно ли является нулевой уровень местом экстремума и какой именно экстремум здесь имеет место (максимум или минимум), вычислим значение второй производной в этой точке от  $\sigma_{eq}$  по  $y$ :

$$\frac{d^2\sigma_{eq}}{dy^2}(0) = \frac{(M^2 \cdot d - \alpha \cdot Q^2 \cdot S_x)}{Q \cdot J_x \cdot S_x \cdot \sqrt{\alpha}}. \quad (14)$$

Из (14) следует, что при  $M^2 \cdot d > \alpha \cdot Q^2 \cdot S_x$  (или при  $(M/Q) > (M/Q)_{cr}$ ) на нулевом уровне – минимум, т.к. выражение (14) положительно.

При  $M^2 \cdot d < \alpha \cdot Q^2 \cdot S_x$  (или при  $(M/Q) < (M/Q)_{cr}$ ) выражение (14) отрицательно и в этом месте – максимум.

При  $M^2 \cdot d = \alpha \cdot Q^2 \cdot S_x$  (или при  $(M/Q) = (M/Q)_{cr}$ ) выражение (14) равно нулю, поэтому для установления вида экстремума в данном случае прибегнем к помощи производных более высоких порядков.

Дальнейшие расчеты показывают, что третья производная от  $\sigma_{eq}$  по  $y$ , как и вторая, при критическом отношении  $M/Q$  на нулевом уровне равна нулю, а четвертая – положительна:

$$\frac{d^4 \sigma_{eq}}{d\sigma^4}(0) = \frac{3 \cdot \sqrt{\alpha} \cdot Q \cdot d}{S_x \cdot J_x} > 0, \quad (15)$$

поэтому и в данном случае здесь – минимум [8].

Таким образом, при  $(M/Q) \geq (M/Q)_{cr}$  функция (10) имеет на нулевом уровне минимум, а при  $(M/Q) < (M/Q)_{cr}$  – максимум.

Выясним теперь вид экстремумов в точках с координатами

$$y_{extr} = \pm \frac{1}{\alpha \cdot d \cdot Q} \cdot \sqrt{2 \cdot \alpha \cdot d \cdot (\alpha \cdot Q^2 \cdot S_x - M^2 \cdot d)}. \quad (16)$$

Взяв вторую производную от  $\sigma_{eq}$  по  $y$  и подставив в неё значения (16), получим:

$$\frac{d^2 \sigma_{eq}}{dy^2}(y_{extr}) = \frac{2 \cdot (\alpha \cdot Q^2 \cdot S_x - M^2 \cdot d) \cdot Q \sqrt{\alpha \cdot d}}{d \cdot J_x \cdot \sqrt{M^2 \cdot (2 \cdot \alpha \cdot Q^2 \cdot S_x - M^2 \cdot d)}}. \quad (17)$$

Из (17) следует, что при  $\alpha \cdot Q^2 \cdot S_x > M^2 \cdot d$  (или при  $(M/Q) < (M/Q)_{cr}$ ) это выражение положительно. Следовательно, на указанных уровнях функция (10) имеет минимумы.

Таким образом, при  $(M/Q) < (M/Q)_{cr}$  функция (10) имеет максимум на нулевом уровне и два минимума на уровнях с координатами, определяемыми по формуле (16). Необходимо отметить, что эти координаты зависят как от параметров профиля, так и от отношения  $M/Q$  в его сечении, в чём легко убедиться, преобразовав (16) к следующему виду:

$$y_{extr} = \pm \sqrt{\frac{2}{\alpha \cdot d} \left( \alpha \cdot S_x - \frac{M^2}{Q^2} \cdot d \right)}. \quad (18)$$

При  $(M/Q) = 0$  (т.е. при  $M = 0$  и  $Q \neq 0$ ) точки минимума  $\sigma_{eq}$  максимально удалены от оси  $x$ :

$$|y_{extr}^{\max}| = \sqrt{\frac{2 \cdot S_x}{d}}. \quad (19)$$

Для двутавра №10 это удаление составляет 101,1 мм, для двутавра №30 – 287,2 мм, для двутавра №60 – 498,5 мм, что во всех случаях значительно больше половины высоты профиля ( $h/2$ ).

При увеличении отношения  $M/Q$  места минимума  $\sigma_{eq}$  приближаются к оси  $x$  и при  $(M/Q) \rightarrow (M/Q)_{cr}$  сливаются с местом максимума ( $y = 0$ ):

$$\lim |y_{extr}| = \sqrt{\frac{2}{\alpha \cdot d} \left( \alpha \cdot S_x - \left( \frac{M}{Q} \right)_{\partial \delta}^2 \cdot d \right)} = \sqrt{\frac{2}{\alpha \cdot d} \left( \alpha \cdot S_x - \frac{\alpha \cdot S_x \cdot d}{d} \right)} = 0. \quad (20)$$

Учитывая изложенное, можно констатировать, что в случае, когда  $(M/Q) < (M/Q)_{cr}$ , опасными по эквивалентным напряжениям могут быть как нулевой уровень ( $y = 0$ ), так и уровень точки  $K$  ( $y_k = (h/2) - t$ ), расположенной на границе ребра и полки (рис. 1). Поэтому важно определить такое (граничное) значение  $M/Q$ , при котором величины  $\sigma_{eq}$  на обоих этих уровнях одинаковы. Тогда при  $(M/Q) < (M/Q)_{gr}$  опасным будет нулевой уровень, а при  $(M/Q) > (M/Q)_{gr}$  – уровень точки  $K$ .

Значение  $(M/Q)_{gr}$  найдём из условия:

$$\sigma_{eq}(0) = \sigma_k^{eq}. \quad (21)$$

При этом оба значения  $\sigma_{eq}$  определим по формуле (10):

$$\sigma_{eq}(0) = \sqrt{\alpha} \cdot \frac{Q \cdot S_x}{d \cdot J_x}; \quad (22)$$

$$\sigma_k^{eq} = Q \cdot \sqrt{\left(\frac{M}{Q}\right)^2 \cdot \frac{y_k^2}{J_x^2} + \frac{\alpha}{d^2 \cdot J_x^2} \cdot (S_x - 0,5 \cdot d \cdot y_k^2)^2}. \quad (23)$$

Подставив (22) и (23) в (21) и решив полученное уравнение относительно  $M/Q$ , получим:

$$\frac{M}{Q} = \left(\frac{M}{Q}\right)_{gr} = \frac{\sqrt{\alpha}}{d \cdot y_k} \cdot \sqrt{S_x^2 - (S_x - 0,5 \cdot d \cdot y_k^2)^2}. \quad (24)$$

При  $\alpha=3$  величина  $(M/Q)_{gr}$  составляет: для двутавра №10 – 118,2 мм, для двутавра №30 – 330,2 мм, для двутавра №60 – 559,5 мм, т.е. везде  $(M/Q)_{gr} < (M/Q)_{cr}$ .

В случаях, когда  $(M/Q) \geq (M/Q)_{cr}$ , т.е. когда функция (10) имеет минимум на нулевом уровне, опасным по эквивалентным напряжениям является уровень точки К. Обратим внимание, что в данных случаях, как и в предыдущем, отношение  $M/Q$  превышает граничное.

Указанное обстоятельство позволяет сформулировать для всех трёх возможных случаев единый принцип нахождения мест действия наибольших эквивалентных напряжений в сечении двутавровой балки: если отношение  $M/Q$  в сечении не превышает граничного значения, то  $\sigma_{eq}^{max}$  действует на нулевом уровне, а если превышает – на уровне точки К; при равенстве  $M/Q$  и  $(M/Q)_{gr}$  наибольшие эквивалентные напряжения действуют одновременно на обоих указанных уровнях.

Сформулированный принцип наглядно иллюстрируется рядом кривых, изображенных на рис. 2 и являющихся графиками функции (10), построенными для двутавра №30 при следующих исходных данных:  $\alpha=3$ ;  $Q=10^5$  Н;  $M=30,703 \cdot 10^6$  Н·мм (кривая 1);  $33,020 \cdot 10^6$  Н·мм (кривая 2);  $34,115 \cdot 10^6$  Н·мм (кривая 3);  $35,170 \cdot 10^6$  Н·мм (кривая 4);  $37,000 \cdot 10^6$  Н·мм (кривая 5).

Теперь выясним, при каких условиях  $\sigma_{eq}^{max}$  не превышают  $[\sigma]$ , т.е. когда выполняется условие прочности по эквивалентным напряжениям (3).

Начнём с нулевого уровня. В этом случае:

$$\sigma_{eq}^{max} = \sqrt{\alpha} \cdot \frac{Q \cdot S_x}{d \cdot J_x} = \sqrt{\alpha} \cdot \tau_{max}. \quad (25)$$

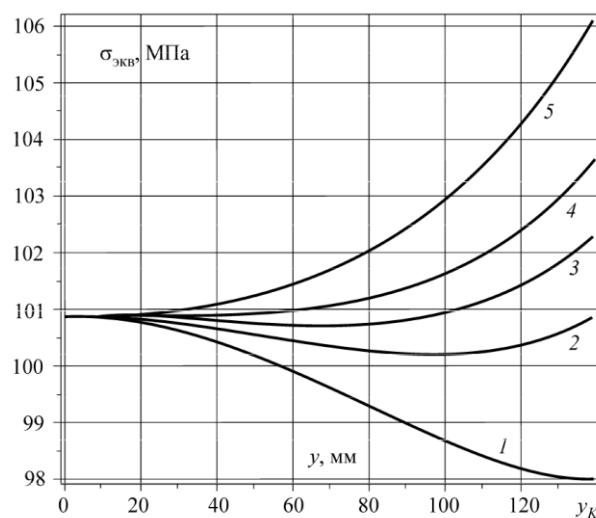


Рис. 2. Влияние отношения  $M/Q$  на характер изменения эквивалентных напряжений по высоте двутавра № 30:  $(M/Q)_1=307,03$ ·мм;  $(M/Q)_2=330,20$ ·мм;  $(M/Q)_3=341,15$ ·мм;  $(M/Q)_4=351,70$ ·мм;  $(M/Q)_5=370,00$ ·мм

Если в сечении балки выполняется условие прочности по касательным напряжениям [2], то с учётом (25) имеем:

$$\tau_{\max} = \frac{\sigma_{eq}^{\max}}{\sqrt{\alpha}} \leq [\tau]. \quad (26)$$

Но  $[\tau]$ , как известно, связано с  $[\sigma]$ :

$$[\tau] = \frac{[\sigma]}{\sqrt{\alpha}}. \quad (27)$$

Тогда из (26) и (27) следует, что  $\sigma_{eq}^{\max} \leq [\sigma]$ , т.е. здесь автоматически выполняется и условие прочности по эквивалентным напряжениям (3).

Перейдём теперь к уровню точки  $K$ . Запишем выражение для  $\sigma_{eq}$  на этом уровне:

$$\begin{aligned} \sigma_k^{eq} &= \sqrt{\left(\frac{M \cdot y_k}{J_x}\right)^2 + \alpha \cdot \left[\frac{Q}{d \cdot J_x} \cdot \left(S_x - \frac{1}{2} \cdot d \cdot y_k^2\right)\right]^2} = \\ &= [\sigma] \cdot \sqrt{M^2 \cdot \left(\frac{y_k}{J_x \cdot [\sigma]}\right)^2 + Q^2 \cdot \left[\frac{\sqrt{\alpha}}{d \cdot J_x \cdot [\sigma]} \cdot \left(S_x - \frac{1}{2} \cdot d \cdot y_k^2\right)\right]^2}. \end{aligned} \quad (28)$$

Расчёты показывают, что значение корня в (28) для любого номера двутавра может быть больше единицы, даже если величины  $M$  и  $Q$  не превышают своих максимально возможных (допустимых) значений:

$$[M] = W_x \cdot [\sigma]; \quad (29)$$

$$[Q] = \frac{d \cdot J_x \cdot [\sigma]}{S_x \cdot \sqrt{\alpha}}. \quad (30)$$

Следовательно, условие прочности по эквивалентным напряжениям (3) выполняется в данном случае не при любых значениях  $M$  и  $Q$ , а только при таких, которые не выходят за определённые границы.

Для установления таких границ приравняем (28) к величине максимального эквивалентного напряжения, ещё удовлетворяющего условие (3):

$$\sigma_{eq}^{\max} = [\sigma], \quad (31)$$

получим:

$$[\sigma] \cdot \sqrt{M^2 \cdot \left(\frac{y_k}{J_x \cdot [\sigma]}\right)^2 + Q^2 \cdot \left[\frac{\sqrt{\alpha}}{d \cdot J_x \cdot [\sigma]} \cdot \left(S_x - 0,5 \cdot d \cdot y_k^2\right)\right]^2} = [\sigma]. \quad (32)$$

Отсюда – равенство единице квадратного корня в выражении (32), а значит, и его подкоренного выражения:

$$M^2 \cdot \left(\frac{y_k}{J_x \cdot [\sigma]}\right)^2 + Q^2 \cdot \left[\frac{\sqrt{\alpha}}{d \cdot J_x \cdot [\sigma]} \cdot \left(S_x - 0,5 \cdot d \cdot y_k^2\right)\right]^2 = 1. \quad (33)$$

Введем обозначения:

$$\frac{y_k}{J_x \cdot [\sigma]} = \frac{1}{\beta}; \quad (34)$$

$$\frac{\sqrt{\alpha} \cdot \left(S_x - 0,5 \cdot d \cdot y_k^2\right)}{d \cdot J_x \cdot [\sigma]} = \frac{1}{\gamma}. \quad (35)$$

Подставим (34) и (35) в (33), получим:

$$\frac{M^2}{\beta^2} + \frac{Q^2}{\gamma^2} = 1. \quad (36)$$

Это и есть уравнение линии, ограничивающей геометрическое место точек с координатами  $M$  и  $Q$ , где выполняется условие прочности (3), т.е. дуги эллипса с полуосями  $\beta$  и  $\gamma$ :

$$\beta = \frac{J_x \cdot [\sigma]}{y_k}; \quad (37)$$

$$\gamma = \frac{d \cdot J_x \cdot [\sigma]}{\sqrt{\alpha} \cdot (S_x - 0,5 \cdot d \cdot y_k^2)}. \quad (38)$$

При построении указанной линии необходимо ограничить величины  $M$  и  $Q$  их допустимыми значениями (29) и (30):

$$M \leq [M]; \quad (39)$$

$$Q \leq [Q]. \quad (40)$$

Введение ограничений (39) и (40) заменяет часть дуги эллипса прямолинейными отрезками, что позволяет исключить из ограничиваемого факторного пространства все те точки, значения  $M$  и  $Q$  в которых хотя и удовлетворяют условию прочности (3), но нарушают условия (1) и (2). Таким образом, факторное пространство становится универсальным, пригодным для проверки сразу трёх названных условий прочности.

Проиллюстрируем изложенное примером полной проверки прочности двутавровой балки №30 ( $J_x=7080 \cdot 10^4 \text{ мм}^4$ ;  $y_k=139,8 \text{ мм}$ ;  $d=6,5 \text{ мм}$ ;  $\alpha=3$ ;  $S_x=268 \cdot 10^3 \text{ мм}^3$ ;  $W_x=472 \cdot 10^3 \text{ мм}^3$ ;  $[\sigma]=150 \text{ Н/мм}^2$ ), представленной на рис. 3 [7].

Для построения факторного пространства выполним необходимые расчёты, согласно которым:  $\beta=75,966 \text{ кН}\cdot\text{м}$ ;  $\gamma=194,910 \text{ кН}$ ;  $[M]=70,800 \text{ кН}\cdot\text{м}$ ;  $[Q]=148,715 \text{ кН}\cdot\text{м}$ .

Факторное пространство для приведенной балки (заштрихованная площадь) представлено на рис. 4, где координаты пронумерованных точек являются значениями поперечных сил и изгибающих моментов в соответствующих сечениях балки (рис. 3):  $Q_1=81,5 \text{ кН}$ ;  $M_1=0 \text{ кН}\cdot\text{м}$ ;  $Q_2=18,5 \text{ кН}$ ;  $M_2=63 \text{ кН}\cdot\text{м}$ ;  $Q_3=73,5 \text{ кН}$ ;  $M_3=63 \text{ кН}\cdot\text{м}$ ;  $Q_4=73,5 \text{ кН}$ ;  $M_4=4,1 \text{ кН}\cdot\text{м}$ ;  $Q_5=73,5 \text{ кН}$ ;  $M_5=44,1 \text{ кН}\cdot\text{м}$ ;  $Q_6=73,5 \text{ кН}$ ;  $M_6=0 \text{ кН}\cdot\text{м}$ ;  $Q_7=0 \text{ кН}$ ;  $M_7=66,4 \text{ кН}\cdot\text{м}$ .

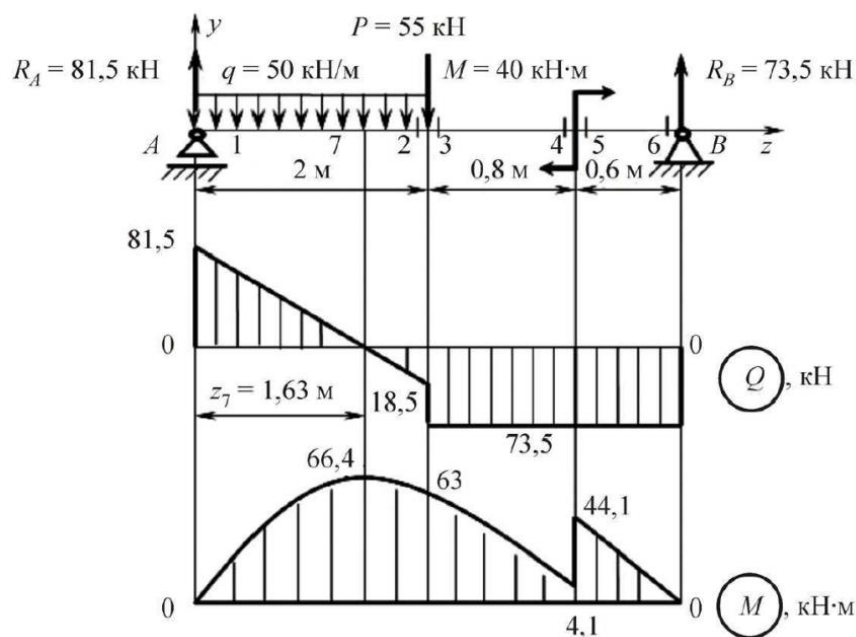


Рис. 3. Схема балки с эпюрами поперечных сил ( $Q$ ) и изгибающих моментов ( $M$ )



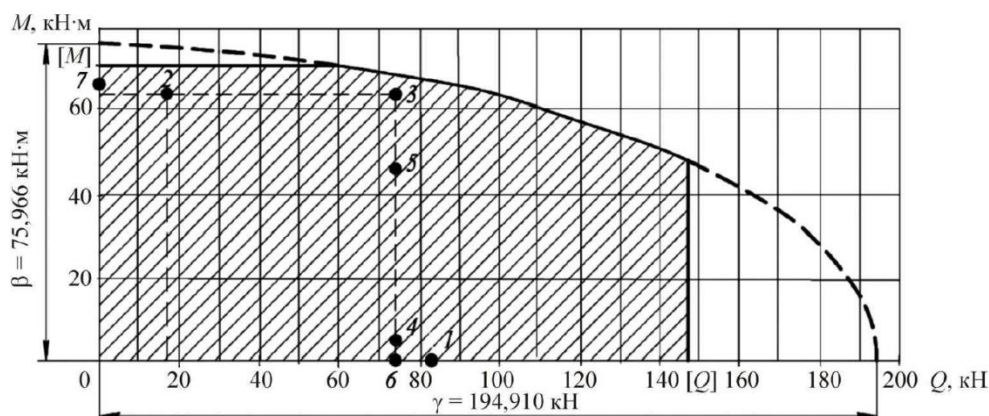


Рис. 4. Факторное пространство для приведенной балки

Поскольку ни одна из обозначенных точек не выходит за границы факторного пространства (рис. 4), то в каждом из соответствующих сечений балки должны одновременно выполняться условия прочности по нормальным (1), касательным (2) и эквивалентным (3) напряжениям. Убедимся в этом.

Вертикальные координаты всех указанных точек не превышают  $[M]$ , значит, во всех соответствующих сечениях выполняется условие прочности (1).

Горизонтальные координаты этих точек не превышают  $[Q]$ , поэтому в соответствующих сечениях балки выполняется и условие прочности (2).

В сечениях 1, 4 и 6 отношения значений  $M$  и  $Q$  меньше граничного ( $330,21$  мм), поэтому, как отмечалось раньше, условие прочности (3) в них выполняется автоматически, т. к. выполнено условие (2).

В остальных сечениях — 2, 3, 5 и 7 отношения  $M/Q$  превышают граничное, но т.к. соответствующие точки не выходят за границу факторного пространства, очерченную дугой эллипса, то и в этих сечениях выполняется условие прочности (3).

Не трудно таким же образом убедиться в выполнении всех условий прочности в любых других сечениях приведенной балки.

Факторное пространство, изображенное на рис. 4, пригодно для полной проверки прочности балок данного профиля ( $M\#30$ ) при любом варианте их нагружения.

Выполнив подобные построения для всех других номеров двутавра, выпускаемых промышленностью, можно создать солидную справочную базу для прочностных расчётов этих балок по упрощенной графической методике, изложенной выше. Такая методика может быть полезна как студентам и преподавателям технических ВУЗов, так и производственным специалистам в области прочностных расчётов.

Однако, наибольший эффект указанная методика может дать, по-видимому, в случае её интегрирования в соответствующую компьютерную технологию прочностных расчётов. Создание такой технологии и должно стать целью последующих работ в данном направлении.

## ВЫВОДЫ

В ходе исследования установлена взаимосвязь мест действия наибольших эквивалентных напряжений с внутренними силовыми факторами в сечении двутавровой балки. Показано, что такие напряжения могут возникать на уровне центра тяжести сечения, если отношение величин изгибающего момента и поперечной силы в этом сечении меньше определенной (граничной) величины, зависящей от параметров двутавра и принятой теории прочности, а также на стыке ребра с полкой, если указанное отношение превышает граничное; при равенстве этого отношения и его граничной величины наибольшие эквивалентные напряжения возникают сразу на обоих названных уровнях.

Доказано, что в случае максимума эквивалентных напряжений на уровне центра тяжести сечения условие прочности по этим напряжениям выполняется автоматически, если в сечении выполнимо условие прочности по касательным напряжениям.

Установлено, что выполнимость условия прочности по эквивалентным напряжениям при их максимуме на стыке ребра с полкой зависит от комбинации величин изгибающего момента и поперечной силы в сечении балки. Это условие выполняется, если указанная комбинация в виде соответствующей точки факторного пространства с координатами «Изгибающий момент – поперечная сила» не выходит за его границу, очерченную дугой эллипса с полуосями, определяемыми параметрами двутавра, допускаемым нормальным напряжением и принятой теорией прочности.

По результатам исследования предложена упрощенная (графическая) методика комплексной оценки прочности двутавровой балки, основанная на использовании построенного факторного пространства с соответствующими ограничениями, вытекающими из условий прочности по нормальным и касательным напряжениям. Она может быть рекомендована к применению как в учебных, так и в практических целях.

Работы по данной тематике целесообразно продолжить в направлении интегрирования предложенной методики в соответствующую компьютерную технологию прочностных расчётов.

#### СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Сопротивление материалов: учебн. для техн. вузов / Г. С. Писаренко, В. А. Агарев [и др.]; под ред. Г. С. Писаренко. – К. : Вища шк., 1986. – 775 с.*
2. *Дарков А. В. Сопротивление материалов: учебн. для техн. вузов / А. В. Дарков, Г. С. Шниро. – М. : Высш. школа, 1989. – 624 с.*
3. *Цурпал И. А. Краткий курс сопротивления материалов: учеб. пособие. – К. : Вища шк., 1989. – 311 с.*
4. *Матвиенко Ю. Г. Сопротивление материалов в задачах и решениях: учеб. пособие / Ю. Г. Матвиенко, В. Т. Сапунов. – М. : Эдиториал УРСС, 2001. – 88 с.*
5. *Холодняк Ю. С. Прочностные расчёты в машиностроении и необходимость учёта в них эквивалентных напряжений / Ю. С. Холодняк, С. В. Подлесный, Е. Ю. Роменский // Научный вестник ДГМА. – Краматорск : ДГМА, 2006. – № 1 (6Е). – С. 74–80.*
6. *Особенности прочностного расчёта балок и их учёт в изложении технических дисциплин / Ю. С. Холодняк, С. В. Подлесный, А. В. Периг [и др.] // Качество образования – управление, сертификация, признание: сборник научных работ международной научной методической конференции / под общ. ред. С. В. Ковалевского. – Краматорск : ДГМА, 2011. – С. 463–469.*
7. *Холодняк Ю. С. О методике изложения вопросов прочности двутавровой балки / Ю. С. Холодняк, А. В. Периг, И. А. Матвеев // «Современное образование и интеграционные процессы»: сборник научных работ международной научно-методической конференции / под общ. ред. д.т.н., проф. С. В. Ковалевского. – Краматорск : ДГМА, 2012. – С. 351–362. – ISBN 978-966-379-604-8.*
8. *Холодняк Ю. С. Совершенствование методики прочностного расчета двутавровой балки и её изложения в курсах технических дисциплин / Ю. С. Холодняк, А. В. Периг, И. А. Матвеев // Вестник Пермского национального исследовательского политехнического университета. Машиностроение, материаловедение. Вестник ПНИПУ. Машиностроение, материаловедение. – Пермь : ПНИПУ. – 2012. – Т. 14. – № 4. – С. 77–89. – Библиогр. : с. 89. – ISSN 2224-9877. – Режим доступа : [http://vestnik.pstu.ru/mm/archives/?id=&folder\\_id=1669](http://vestnik.pstu.ru/mm/archives/?id=&folder_id=1669).*
9. *Холодняк Ю. С. О совершенствовании методики прочностных расчетов стержневых конструкций при вынужденных колебаниях и её изложения в курсах технических дисциплин / Ю. С. Холодняк, И. А. Матвеев // «Качество образования: управление, сертификация, признание»: сборник научных работ международной научно-методической конференции / под общ. ред. д.т.н., проф. С. В. Ковалевского. – Краматорск : ДГМА, 2013. – С. 172–180. – ISBN 978-966-379-656-7.*
10. *Холодняк Ю. С. Особенности прочностных расчетов стержневых конструкций, подверженных вынужденным колебаниям / Ю. С. Холодняк, А. В. Периг, И. А. Матвеев // Вісник Донбаської державної машинобудівної академії: зб. наук. праць. – Краматорськ : ДДМА, 2015. – №1(34). – С. 96–102.*
11. *Збірник розрахунково-графічних завдань з курсу «Опір матеріалів» (для студентів всіх механічних спеціальностей денної форми навчання) / Л. В. Кутовий, В. А. Овчаренко, Ю. С. Холодняк [та ін.] – Краматорськ : ДДМА, 2007. – 220 с.*
12. *Смирнов В. И. Курс высшей математики. Том 1 / В. И. Смирнов. – 2008. – БХВ – Петербург. – 624 с.*