О ДВИЖЕНИИ ГАРПУНА, БРОШЕННОГО ВЕРТИКАЛЬНО ВВЕРХ

Обухов А. Н., Паламарчук В. А., Булыга В. С.

Задачи о прямолинейном движении нити представляют теоретический интерес как задачи, иллюстрирующие общие теоремы механики нити и практический интерес в морском промысле и в бесчелночном ткачестве. В работе поставлена и решена задача о вертикальном движении гарпуна без учёта и с учётом сопротивления среды пропорционально квадрату скорости движения. В обоих случаях получены дифференциальные уравнения движения, в результате решения которых получены зависимости скорости от перемещения, а также приведены формулы для вычисления наибольшей высоты и времени подъёма гарпуна. Для случая отсутствия сопротивления среды проведены численные исследования и построены графики зависимости безразмерной координаты высоты подъёма η и безразмерного времени подъёма гарпуна τ^* от начальной скорости движения V_0 при различных значениях $\alpha = \dfrac{\rho_0}{m_0}$.

Задачі про прямолінійний рух нитки становлять теоретичний інтерес як задачі, що ілюструють загальні теореми механіки нитки і практичний інтерес в морському промислі і в безчовниковому ткацтві. В роботі поставлена і розв’язана задача про вертикальний рух гарпуна без урахування і з урахуванням опору середовища пропорційно квадрату швидкості руху. В обох випадках отримані диференціальні рівняння руху, в результаті розв’язання яких отримані залежності швидкості від переміщення, а також наведені формули для обчислення найбільшої висоти і часу підйому гарпуна. Для випадку відсутності опору середовища проведено чисельні дослідження і побудовані графіки залежності безрозмірної координати висоти підйому η і безрозмірного часу підйому гарпуна τ^* від початкової швидкості руху V_0 при різних значеннях $\alpha = \dfrac{\rho_0}{m_0}$.

The problems of the rectilinear motion of thread are of theoretical interest as problems, illustrating the general theorems of thread mechanics and practical interest in marine fisheries and weaving without shuttles. The authors set and solved the problem of vertical movement of the harpoon without account and taking into account resistance of the medium in proportion to the square of the speed. In both cases, the differential equations of motion were received, solving of which gave an opportunity to obtain dependences of the speed on movement, as well as formulas for calculating the maximum height and time of lifting the harpoon. In the case of the absence of the medium resistance, numerical studies were conducted and schedules of dependence of dimensionless coordinate of lifting height η and dimensionless time of lifting the harpoon τ^* on the initial velocity V_0 at different values $\alpha = \dfrac{\rho_0}{m_0}$ were constructed.

Обухов А. Н. канд. техн. наук, доц. ДГМА
vm@dgma.donetsk.ua

Паламарчук В. А. канд. техн. наук, доц. ДГМА

Булыга В. С. студент ДГМА

ДГМА – Донбасская государственная машиностроительная академия, г. Краматорск.

УДК 531.396, 534.011

Обухов А. Н., Паламарчук В. А., Булыга В. С.

О ДВИЖЕНИИ ГАРПУНА, БРОШЕННОГО ВЕРТИКАЛЬНО ВВЕРХ

На практике часто используется прямолинейно движущаяся нить, в частности, в морском промысле (движущийся гарпун с канатом) [1], в бесчелночном ткачестве [2] и т.д. Кроме того, задачи о прямолинейном движении нити представляют теоретический интерес как задачи, иллюстрирующие общие теоремы механики нити [3–5].

Целью работы является решение задачи о вертикальном движении гарпуна без учёта и с учётом сопротивления среды пропорционально квадрату скорости движения. Получение зависимости скорости от перемещения, а также формул для вычисления наибольшей высоты и времени подъёма гарпуна.

Пусть гарпун массой m_0, к концу которого прикреплена гибкая нерастяжимая весомая нить погонной плотностью ρ_0 начинает движение вертикально вверх с начальной скоростью V_0. Составим дифференциальное уравнение движения гарпуна, найдём закон изменения скорости как функцию от перемещения, наибольшую высоту и время подъёма.

Обозначим $x(t)$ – перемещение, $\dot{x}(t)$ – скорость гарпуна к моменту времени t. Запишем кинетическую и потенциальную энергию движущегося гарпуна.

Кинетическая энергия

$$T = \frac{1}{2}(m_0 + \rho_0 x)\dot{x}^2 \tag{1}$$

Потенциальная энергия

$$\Pi = m_0 g x + \frac{1}{2}\rho_0 g x^2 \tag{2}$$

Используя уравнение Лагранжа второго рода [6]:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{x}}\right) - \frac{\partial T}{\partial x} + \frac{\partial \Pi}{\partial x} = 0 \tag{3}$$

Найдём дифференциальное уравнение движения в виде

$$\ddot{x} + \frac{1}{2}\frac{\alpha}{1+\alpha x}\dot{x}^2 = -g, \tag{4}$$

здесь $\alpha = \dfrac{\rho_0}{m_0}$.

Найдём общее решение уравнения (4), используя подстановку

$$\dot{x}(t) = V(x), \quad \ddot{x} = V\frac{dV}{dx}, \tag{5}$$

Уравнение (4) пребразуется в уравнение Бернулли

$$\frac{\partial V(x)}{\partial x} + \frac{1}{2}\frac{\alpha}{1+\alpha x}V(x) = -\frac{g}{V(x)}, \tag{6}$$

Будем находить решение уравнения (6) в виде

$$V(x) = Z(x)\cdot Y(x) \tag{7}$$

Здесь функции $Z(x)$ и $Y(x)$ удовлетворяют системе уравнений

$$\begin{cases} \dfrac{dZ(x)}{dx} + \dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{\alpha}{1+\alpha x}Z(x) = 0; \\ Y(x)\dfrac{dY(x)}{dx} = -\dfrac{g}{Z^2(x)}. \end{cases} \tag{8}$$

Частное решение первого уравнения системы (8) можно записать в виде:

$$Z(x)=\frac{1}{\sqrt{1+\alpha x}}, \tag{9}$$

тогда общее решение второго уравнения системы (8)

$$Y^2(x)=C-\frac{g}{\alpha}(1+\alpha x)^2. \tag{10}$$

Окончательно, общее решение уравнения (6) можно записать как

$$V^2(x)=\frac{c-\frac{g}{\alpha}(1+\alpha x)^2}{1+\alpha x}. \tag{11}$$

Используя начальное условия: при t=0 $X(0)$=0; $V(0)$= V_0, найдём искомое решение, т.е. зависимость скорости от перемещения гарпуна в виде:

$$V(x)=\sqrt{\frac{V_0^2+\frac{g}{\alpha}-\frac{g}{\alpha}(1+\alpha x)^2}{1+\alpha x}} \tag{12}$$

Приравнивая $V(x)$ к нулю, найдём наибольшую высоту подъёма гарпуна, которую можно вычислить по формуле

$$x^*=\frac{V_0^2}{g}\left(\frac{1}{\sqrt{1+\frac{\alpha V_0^2}{g}}+1}\right) \tag{13}$$

Введя безразмерную координату

$$\eta=\frac{x^*}{\left(\frac{V_0}{2g}\right)}=\frac{2}{\sqrt{1+\frac{\alpha V_0^2}{g}}+1},$$

построили графики зависимости η от V_0 при различных значениях α (рис. 1).

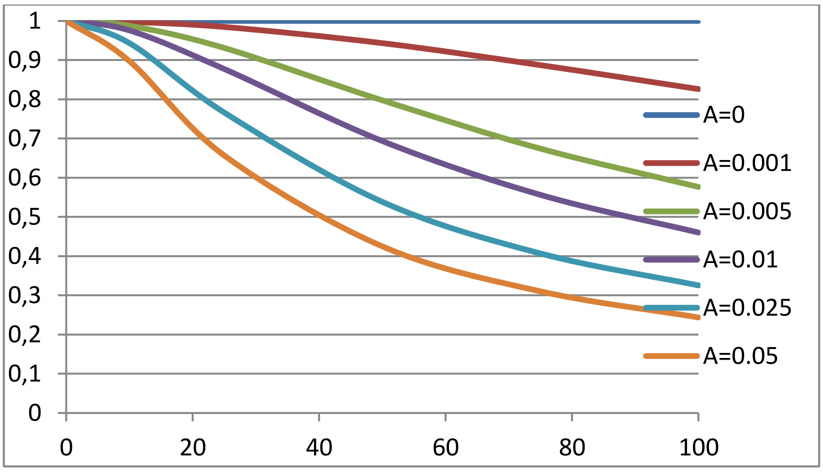

Рис. 1 Графики зависимости η от V_0 при различных значениях α (на рис. обозначены буквой А)

Разделяя переменные в дифференциальном уравнении (12) и интегрируя, получим формулу (14) для вычисления времени, за которое гарпун достигнет высоты x*.

$$t^* = \int_0^{x^*} \sqrt{\frac{1+\alpha x}{V_0^2 + \frac{g}{\alpha} - \frac{g}{\alpha}(1+\alpha x)^2}} dx \tag{14}$$

Введя безразмерное время τ* так, что $t^* = \tau^* \frac{V_0}{g}$, построили графики зависимости τ* от V_0 при различных значениях α (рис. 2).

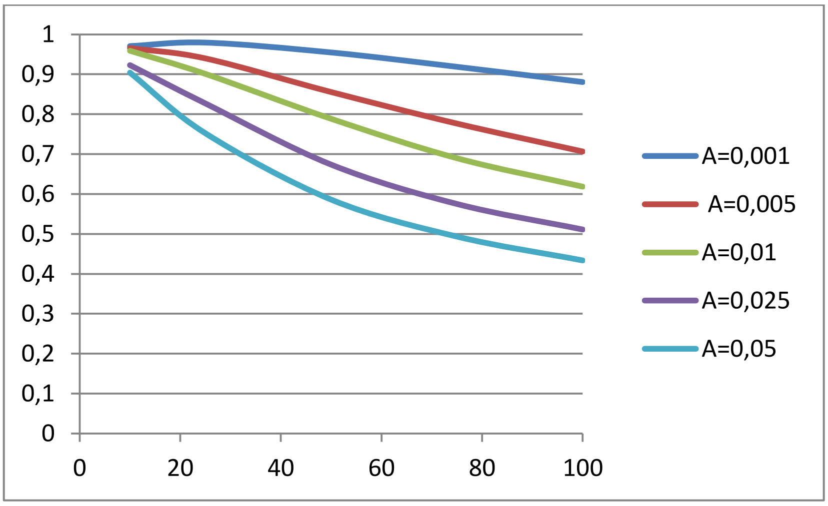

Рис. 2 Графики зависимости τ* от V_0 при различных значениях α (на рис. обозначены буквой А)

Вводя новую переменную интегрирования

$$\tau = \frac{1+\alpha x}{1+\alpha x^*}, \tag{15}$$

упростим формулу (14), получим

$$t^* = \sqrt{\frac{m_0 + \rho_0 x^*}{\rho_0 g}} \cdot \int_{\frac{m_0}{m_0+\rho_0 x^*}}^{1} \sqrt{\frac{\tau}{1-\tau^2}} d\tau \tag{16}$$

Интеграл (16) не выражается через элементарные функции. Разлагая подынтегральную функцию в ряд по степеням τ и интегрируя в заданных пределах, найдём искомое время подъёма как сумму числового ряда вида

$$t^* = \sqrt{\frac{m_0 + \rho_0 x^*}{\rho_0 g}} \cdot \left(\frac{2}{3}\left(1 - a^{\frac{3}{2}}\right) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1\cdot 3\cdot 5\cdot ...(2n-1)}{2^{n-1} n! (4n+3)} \left(1 - a^{\frac{4n+3}{2}}\right) \right) \tag{17}$$

где

$$a = \frac{m_0}{m_0 + \rho_0 x^*} \tag{18}$$

Можно показать, что общий член ряда стремится к нулю как $n^{-\frac{3}{2}}$, что обеспечивает достаточно быструю сходимость ряда (17).

Выше приведенные результаты получены без учёта сил сопротивления движению, в реальной системе на гарпун действует силы сопротивления среды, которые в определённой степени изменяют процесс движения.

Исследуем движение гарпуна в среде, силы сопротивления которой пропорциональны квадрату скорости перемещения. Силы сопротивления:

$F_{1c} = k_1 \dot{x}^2$ – сила действующая на массу гарпуна;

$F_{2c} = k_2 x \cdot \dot{x}^2$ – распределённая сила, действующая на нить,

k_1, k_2 – коэффициенты пропорциональности, заданные числа.

В этом случае дифференциальное уравнение движения можно записать в виде:

$$\ddot{x} + \frac{1}{2} \frac{\alpha\left(1 + \frac{2k_1}{\rho_0} + \frac{2k_2}{\rho_0} x\right)}{1 + \alpha x} \dot{x}^2 = -g, \tag{19}$$

Полагая $\dot{x} = V(x)$ дифференциальное уравнение (19) преобразуем в уравнение Бернулли (20) относительно функции $V(x)$ – скорости от перемещения гарпуна.

$$\frac{\partial V(x)}{\partial x} + \left(\frac{k_2}{\rho_0} + \frac{\alpha \cdot b}{1 + \alpha x}\right) V(x) = -\frac{g}{V(x)}, \tag{20}$$

здесь

$$b = \frac{1}{2}\left(1 + \frac{2k_1}{\rho} - \frac{2k_2}{\alpha \cdot \rho}\right) \tag{21}$$

Будем находить общее решение (20) в виде

$$V(x) = Z(x) \cdot Y(x)$$

Здесь функции $Z(x)$ и $Y(x)$ удовлетворяют системе уравнений

$$\begin{cases} \dfrac{dZ(x)}{dx} + \left(\dfrac{k_2}{\rho_0} + \dfrac{\alpha b}{1 + \alpha x}\right) Z(x) = 0; \\ Y(x) \dfrac{dY(x)}{dx} = -\dfrac{g}{Z^2(x)}. \end{cases} \tag{22}$$

Частное решение первого уравнения системы (22) можно найти в виде

$$Z(x) = (1 + \alpha x)^{-b} e^{-\frac{k_2}{\rho_0} x} \tag{23}$$

Тогда общее решение второго уравнения (22) с учётом (23) найдём в виде выражения

$$Y^2(x) = C - 2g \int_0^x (1 + \alpha \xi)^{2b} e^{\frac{2k}{\rho_0} \xi} d\xi \tag{24}$$

Учитывая (23) и (24) найдём общий интеграл уравнения (20). Используя начальные условия, зависимость скорости от перемещения гарпуна можно записать как

$$V(x) = \sqrt{\frac{V_0^2 - 2g \int_0^x (1 + \alpha \xi)^{2b} e^{\frac{2k}{\rho_0} \xi} d\xi}{(1 + \alpha x)^{2b} e^{\frac{2k_2}{\rho_0} x}}} \tag{25}$$

Полагая в равенстве (25) $V(x^*) = 0$, найдём уравнение для нахождения наибольшей высоты подъёма гарпуна x^*.

$$\int_0^x (1+\alpha\xi)^2 e^{\frac{2k}{\rho_0}\xi} d\xi = \frac{V_0^2}{2g} \tag{26}$$

Разделяя переменные в дифференциальном уравнении (25) и интегрируя в пределах $0 \le x \le x^*$, найдём формулу для вычисления времени при котором гарпун достигает высоты x^*.

$$t^* = \int_0^{x^*} \frac{(1+\alpha x)^b e^{\frac{k_2}{\rho}x}}{\sqrt{V_0 - 2g\int_0^{x^*} (1+\alpha\xi)^2 e^{\frac{2k}{\rho_0}\xi} d\xi}} dx \tag{27}$$

ВЫВОДЫ

В данной работе поставлена и решена задача о вертикальном движении гарпуна без учёта и с учётом сопротивления среды пропорционально квадрату скорости движения. В обоих случаях получены дифференциальные уравнения движения, в результате решения которых получены зависимости скорости от перемещения, а также приведены формулы для вычисления наибольшей высоты и времени подъёма гарпуна. Для случая отсутствия сопротивления среды проведены численные исследования и построены графики зависимости безразмерной координаты высоты подъёма η и безразмерного времени подъёма гарпуна τ^* от начальной скорости движения V_0 при различных значениях $\alpha = \frac{\rho_0}{m_0}$. Полученные результаты могут быть использованы при проектировании рыболовных судов или ткацких станков.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Михалёв Ю.А. Краткий исторический обзор морского промысла китов / Ю. А. Михалёв // Украинский антарктический журнал. – 2009 – №8. – С. 217–227.*
2. *Современная технология бесчелночного ткачества: монография / Р.Д. Ефремов, Л.В. Шевелёва, М.П. Дзига. – Київ: Техніка, 1984. – 152 с.*
3. *Обухов А.Н. Поперечные перемещения подвешенной нити в случае, когда точка подвеса движется горизонтально по заданному закону / А.Н. Обухов, В.А. Паламарчук // Научный вестник Донбасской государственной машиностроительной академии : сборник научных трудов. – Краматорск : ДГМА, 2014. – № 1 (13Е). – С. 65–75. – Режим доступа: http://www.dgma.donetsk.ua/science_public/science_vesnik/%E2%84%961 (13%D0%95)_2014/article/11.pdf*
4. *Обухов А.Н. О поперечных перемещениях нити в среде с силой сопротивления движению, пропорциональной скорости перемещения её произвольного сечения / А.Н. Обухов, В.А. Паламарчук // Вісник Донбаської державної машинобудівної академії : збірник наукових праць. – Краматорськ : ДДМА, 2015. – № 1 (34). – С. 64–73. – Режим доступу: http://www.dgma.donetsk.ua/science_public/ddma/Herald_1(34)_2015 /article/13.pdf*
5. *Обухов А. М. Вимушені коливання вагомої нитки, яка підвішена за один кінець, під дією вітрового навантаження/ А. М Обухов. В. О, Паламарчук // Научный вестник Донбасской государственной машиностроительной академии : сборник научных трудов – Краматорск : ДГМА, 2016. – № 1 (19Е). – С. 81–86. – Режим доступа: http://www.dgma.donetsk.ua/science_public/science_vesnik/ /№1(19E)_2016/article/13.pdf*
6. *Яблонский А.А. Курс теоретической механики. Том 1. / А.А. Яблонский, В.М. Никифоров. – М.: ИнтегралПРЕСС, 2007. – 536 с.*

Статья поступила в редакцию 07.12.2016 г.