УДК 512.77; 514.122; 51(075.8)

Ф. В. МОЦНИЙ,
доктор фізико-математичних наук, професор,
завідувач кафедри прикладної математики,
Національна академія статистики, обліку та аудиту

Лінійні наближення в економічних розрахунках

"Буває мить, коли душа натхненна
зриває з Часу завій незнання:
усе, чого шукаєш навмання,
з'являється, як візія священна.
Лови цю мить і куй в суцільні звена
закон всеєдності пророчого вогня".
Л. М. Мосендз

Розглянуто типові економічні задачі: вартість і рентабельність транспортних перевезень вантажів, запаси пального на станції заправки, нарощення боргу за простими відсотковими ставками та купівля споживачем трьох різних товарів за обмеженого бюджету. Показано, що лінійні наближення можуть бути корисними при розв'язанні численних економічних задач.

Ключові слова: *економічні задачі в 2D та 3D просторі, пряма лінія, рівняння, лінійне наближення.*

Постановка проблеми. Пряма лінія належить до фундаментальних понять геометрії і може бути визначена як лінія, шлях вздовж якої дорівнює відстані між двома крапками [1; 2]. В 2D просторі її загальне рівняння задається аналітично лінійним алгебраїчним рівнянням $Ax + By + C = 0$, де A, B, C – довільні сталі коефіцієнти, причому A і B не дорівнюють нулю одночасно. Якщо пряма лінія проходить через дві крапки $M(x_1; y_1)$ і $N(x_2; y_2)$, її рівняння записується таким чином:

$$\frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{x - x_1}{x_2 - x_1}.$$

Якщо ж вона відсікає на координатних осях Ox і Oy відрізки a і b, то це рівняння набуває вигляду рівняння прямої лінії у "відрізках":

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1.$$

В 3D просторі рівняння прямої лінії, що проходить через дві крапки $M(x_0;y_0;z_0)$ і $K(x_1;y_1;z_1)$, має вигляд:

$$\frac{x - x_0}{x_1 - x_0} = \frac{y - y_0}{y_1 - y_0} = \frac{z - z_0}{z_1 - z_0}.$$

Аналіз останніх досліджень і публікацій. Прогрес розвитку економічної науки та прийняття зважених управлінських рішень у світі та Україні, як зазначено у постанові Президії НАН України від 24.10.2008 року за № 264 та показано автором у роботі [3], вбачається за нелінійною динамікою, синергетикою та еконофізикою. Однак найбільш простими моделями в економіці є лінійні, які відповідають певним наближенням до дійсності. Вони зручні для аналізу і тому стали потужною базою для розвитку економіко-математичних методів: міжгалузевого балансу, лінійного програмування, математичної статистики, операцій в економіці та інших [4–11]. Тому дослідження економічних процесів у рамках лінійних наближень є безперечно актуальними.

Метою роботи є розв'язання та аналіз типових економічних задач в 2D та 3D просторі з використанням лінійних залежностей між змінними.

Виклад основного матеріалу.

ЕКОНОМІЧНІ ЗАДАЧІ ТА ЇХ РОЗВ'ЯЗАННЯ

1. Вартість доставки вантажу

Нехай доставка вантажу на відстань 100 км коштує a грн, а на відстань 500 км – b грн. Знайдемо залежність y вартості доставки вантажу від відстані x, не враховуючи стан доріг, термін постачання, зміну ціни на пальне. Вважатимемо, що вартість y доставки вантажу від відстані x визначається лінійною залежністю. Тоді для прямої лінії, що проходить через дві крапки A $(100; a)$ і B $(500; b)$, шукана залежність визначається рівнянням прямої лінії у "відрізках" і має вигляд:

$$\frac{x-100}{500-100}=\frac{y-a}{b-a}\Rightarrow\frac{x-100}{400}=\frac{y-a}{b-a}\Rightarrow y=\frac{b-a}{400}x-\frac{1}{4}(b-5a).$$

Зокрема, якщо a = 1000 грн, b = 4600 грн, то $y = 9x + 100$.

2. Рентабельність транспортних перевезень

Залежність вартості y перевезення вантажу автомобільним транспортом і залізницею від відстані x задається формулами:

$$y=\frac{1}{3}x+1 \text{ і } y=\frac{5}{3}x-3$$

відповідно. Оцінимо рентабельність транспортних перевезень. Перепишемо ці рівняння у вигляді: $x - 3y + 3 = 0$ та $5x - 3y - 9 = 0$. Використавши формули Крамера, знайдемо координати крапки перетину відповідних їм прямих ліній: $x_0 = 3$; $y_0 = 2$.

Графіки транспортних витрат, що відповідають перевезенню вантажу автомобільним транспортом (1) і залізницею (2), представлено на рис. 1. Якщо

$$x\in(\frac{9}{5}; 3),$$

витрати у на перевезення вантажу автомобільним транспортом більші, ніж витрати на перевезення вантажу залізницею, тобто менш рентабельні. Якщо ж $x\in(3, \infty)$, то перевезення вантажу автомобільним транспортом стане більш рентабельним, оскільки витрати будуть менші.

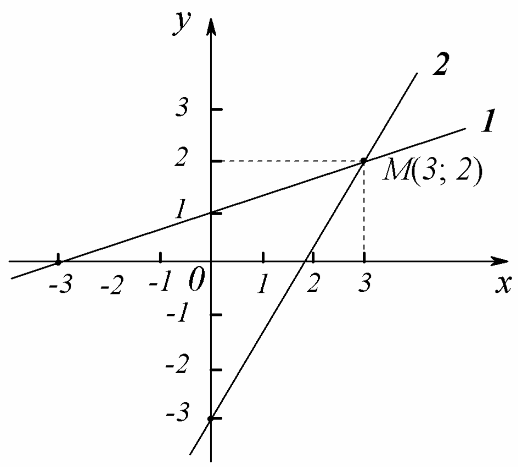

Рис. 1. Транспортні витрати під час перевезення вантажу: 1 – автомобільним транспортом, 2 – залізницею

Джерело: складено автором.

3. Запаси пального на станції заправки

Нехай запаси пального на станції заправки становлять b літрів і їх вистачає на a днів при рівномірному використанні. Знайдемо залежність зменшення запасів пального від терміну використання, прийнявши весь запас пального за одиницю. Тоді

$\frac{1}{a}$ – щоденна частина використання пального;

$\frac{x}{a}$ – використана частина пального за x днів;

y – залишок невикористаного пального;

$\frac{y}{b}$ – невикористана частина пального на даний момент часу.

Якщо до використаної частини пального додати невикористану частину, отримаємо рівняння прямої лінії у "відрізках":

$$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1. \qquad \text{Звідки} \qquad y=-\frac{b}{a}x+b.$$

Якщо взяти $b = 100\,000$ л, $a = 20$ дням, то $y = -5000x + 100000$.

4. Нарощення боргу за простими відсотками

Нехай початкова сума боргу становить P_0. Знайдемо нарощену суму боргу S на момент закінчення угоди через n років. Якщо i – річна відсоткова ставка, то кожний рік буде приносити відсотки в сумі $P^* = P_0 \cdot i$, а за n років – $I = P_0 \cdot i \cdot n$. Тоді нарощена сума боргу S за простими відсотками на момент закінчення угоди становитиме $S = P_0 \cdot (1 + i \cdot n)$. Ця формула показує, у скільки разів нарощена сума боргу S буде більше за початкову суму боргу P_0.

Графік нарощеної суми боргу S від терміну угоди є прямою лінією (рис. 2), яка відсікає на осі ординат початкову суму боргу P_0, взяту за базу нарахування.

Якщо, наприклад, $P_0 = 50$ тис. грн, $i = 0{,}15$, $n = 2$ роки, то $S = 65$ тис. грн.

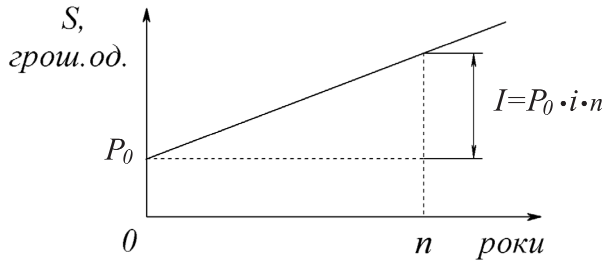

Рис. 2. Зміна нарощеної суми боргу від терміну угоди

Джерело: складено автором.

5. Купівля споживачем товарів за обмеженого бюджету

Економічні задачі в 3D просторі та просторі більшої розмірності є предметом математичного програмування, дослідження операцій та інших. Тут зупинимося лише на одній із таких задач.

Нехай бюджет споживача становить 3600 грн, а товари A, B і C коштують 20, 30 і 40 грн відповідно. Оцінимо купівельні можливості споживача. На всі гроші він може купити x одиниць товару A, y одиниць товару B та z одиниць товару C. Тоді рівняння $20x + 30y + 40z = 3600$ відображає його бюджетне обмеження і є загальним рівнянням площини в 3D просторі. Поділимо це рівняння на 3600, отримаємо рівняння площини у “відрізках”:

$$\frac{x}{180}+\frac{y}{120}+\frac{z}{90}=1.$$

Таким чином, споживач може купити або 180 одиниць товару *A*, або 120 одиниць товару *B*, або 90 одиниць товару *C*. Окрім того, він може перебувати в іншій крапці цієї площини за умови, що $x \geq 0$; $y \geq 0$; $z \geq 0$ (рис. 3).

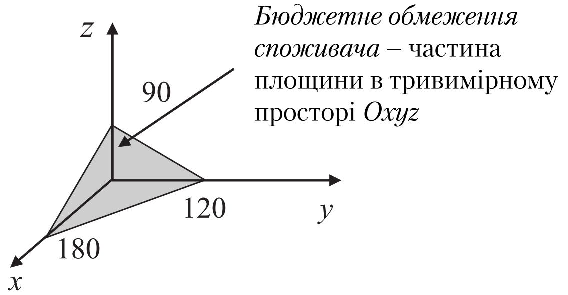

Рис. 3. Бюджетне обмеження споживача в 3D просторі

Джерело: складено автором.

Якщо споживач витрачає не всі гроші, бюджетне обмеження буде тетраедром:

$$\begin{cases}20x+30y+40z\leq 3600\\ x\geq 0, y\geq 0, z\geq 0.\end{cases}$$

Якщо ж споживач не купуватиме якийсь товар, бюджетне обмеження матиме вигляд прямої лінії на площині або множину крапок усередині трикутника. Дійсно, якщо він не купує товар *A*, то $x = 0$ і бюджетне обмеження набуває вигляду прямої лінії на площині *yOz:*

$$\begin{cases}30y+40z\leq 3600\\ y\geq 0, z\geq 0\end{cases}$$

або множини крапок усередині трикутника, утвореного цією прямою лінією і осями координат *Oy* та *Oz* (рис. 4, а).

Якщо ж споживач не купує товар *B*, то $y = 0$ і його бюджетне обмеження набуває вигляду прямої лінії на площині *xOz*:

$$\begin{cases}20x+40z=3600\\ x\geq 0, z\geq 0\end{cases}$$

або множини крапок усередині трикутника, утвореного цією прямою лінією і осями координат *Ox* та *Oz* (рис. 4, б).

Якщо ж споживач не купує товар *C*, то $z = 0$ і його бюджетне обмеження набуває вигляду прямої лінії на площині *xOy*:

$$\begin{cases}20x+30y=3600\\ x\geq 0, y\geq 0\end{cases}$$

або множини крапок усередині трикутника, утвореного цією прямою лінією і осями координат *Ox* та *Oy* (рис. 4, в).

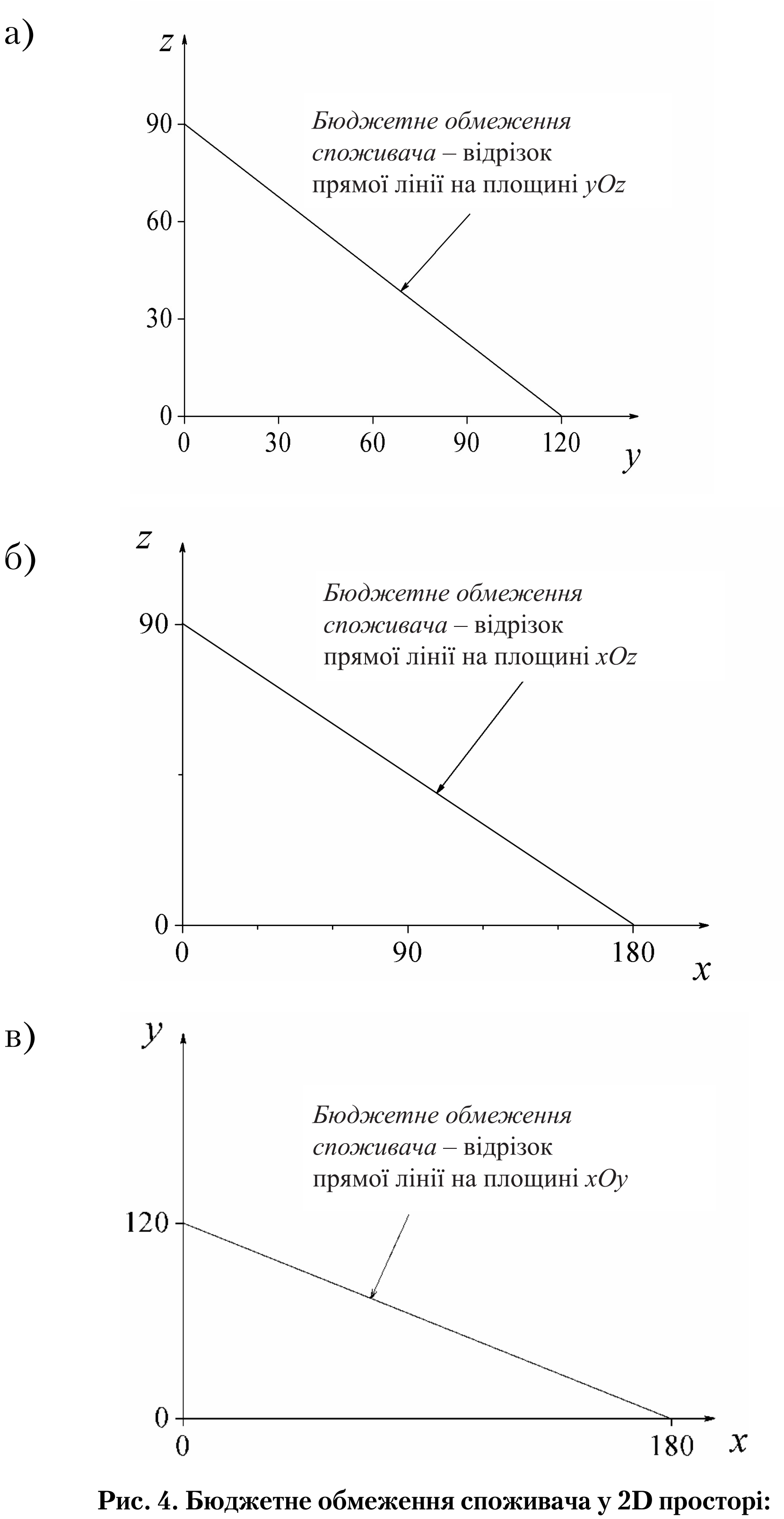

Рис. 4. Бюджетне обмеження споживача у 2D просторі:
а) *yOz;* б) *xOz;* в) *xOy*

Джерело: складено автором.

Отже, бюджетне обмеження споживача визначається загальним рівнянням $20x + 30y + 40z = 3600$ площини у 3D просторі і графічно зображується частиною площини або тетраедром, коли витрачаються не всі гроші; відрізком прямої лінії або множиною крапок усередині трикутника, якщо споживач не купує один із названих товарів.

Вищенаведені результати можна рекомендувати студентам та аспірантам економічних спеціальностей, економістам-практикам та викладачам математики як додатковий матеріал до теми “Пряма лінія” під час вивчення дисципліни “Аналітична геометрія”.

Висновки.

1. Розв’язано в лінійному наближенні низку типових економічних задач у 2D і 3D просторі, присвячених доставці вантажу, рентабельності транспортних перевезень, зменшенню пального на станції заправки, нарощенню боргу з роками та купівлі споживачем різних товарів за обмеженого бюджету.
2. Показано, що лінійні наближення можна з успіхом використовувати для отримання інформації про економічні процеси.

Автор щиро вдячний доценту Г. В. Понежі за програмне втілення рисунків на персональному комп’ютері.

Список використаних джерел

1. Ильин В. А. Аналитическая геометрия / В. А. Ильин, Э. Г. Позняк. – [изд. втор., стереотип]. – М. : Наука, 1971. – 232 с.
2. Fuller G. Analytic Geometry / G. Fuller, D.Tarwater. – [7th ed.]. – Addison Wesley, 1993. – 417 p.
3. Моцний Ф. В. Застосування математики в сучасній економіці: реальність, проблеми, перспективи / Ф. В. Моцний // Науковий вісник Національної академії статистики, обліку та аудиту. – 2010. – № 3. – С. 74–80.
4. Leontief W. Input-Output Economics / W. Leontief. – [2nd ed.]. – New York : Oxford University Press, 1986. – 436 p.
5. Линейные модели экономики (Принципы выпуска на уровне отраслей. Модель Леонтьева «Затраты – выпуск». Планирование производства в динамике. Модель расширяющейся экономики Неймана. Магистральные траектории в линейных моделях экономики. Заключение. [Электронный ресурс]. – Режим доступа:
http://www/math/kemsu.ru/faculty/kmc/matekon/Chapter6_1.html.
6. Семюелсон Пол Е. Мікроекономіка / Пол Е. Семюелсон, Вільям Д. Нордгаузю. – К. : Основи, 1998. – 678 с.
7. Пономаренко О. І. Сучасний економічний аналіз : навч. посіб. для студентів економ. та мат. спец. вищ. навч. закладів / О. І. Пономаренко, М. О. Перестюк, В. М. Бурим. – К. : Вища школа, 2004.
Ч. 1. Мікроекономіка. – 2004. – 262 с.
Ч. 2. Макроекономіка. – 2004. – 208 с.
8. Авдюшкін О. М. Макроекономічна модель економіки держави / О. М. Авдюшкін, І. М. Зряков, Ф. В. Моцний // Науковий вісник Державної академії статистики, обліку та аудиту. – 2005. – № 2. – С. 61–68.
9. Руденко В. М. Математична статистика : навч. посіб. для студ. вищ. навч. закл. / В. М. Руденко. – К. : Центр учбової літератури, 2012. – 303 с.
10. Моцний Ф. В. Курс лекцій з теорії ймовірностей : навч. посіб. / Ф. В. Моцний. – [2-ге вид., доповн.]. – К. : ДП ІАА, 2013. – 207 с.
11. Васильченко І. П. Фінансова математика : навч. посіб. / І. П. Васильченко, З. М. Васильченко. – К. : КОНДОР, 2007. – 184 с.

Ф. В. МОЦНЫЙ,
доктор физико-математических наук, профессор,
заведующий кафедрой прикладной математики,
Национальная академия статистики, учета и аудита

Линейные приближения в экономических расчетах

Рассмотрены типичные экономические задачи: стоимость и рентабельность при транспортном перевозе грузов, запасы топлива на станции заправки, рост задолженности по простым процентным ставкам и покупка потребителем трех разных товаров при ограниченом бюджете. Показано, что линейные приближения могут быть полезны при решении многочисленных экономических задач.

Ключевые слова: *экономические задачи в 2D и 3D пространстве, прямая линия, уравнение, линейное приближение.*

F. V. MOTSNYI,
Dr. Sc. (Phys. & Math.), Prof.,
Head of Department for Applied Mathematics,
National Academy of Statistics, Accounting and Audit

Linear Approximation in Economic Calculations

Typical economic problems such as transportation cost and profitability, fuel stocks at fuelling station, increase in debt by simple interest rate and purchasing power of a buyer when buying three various goods are solved. It is shown that linear approximations may be useful for solution of numerous economic problems.

Keywords: *economic problems in 2D and 3D dimentions, bee-line, equation, linear approximation.*