УДК 512.77; 514.122; 51(075.8)

Ф. В. МОЦНИЙ,
доктор фізико-математичних наук, професор,
завідувач кафедри прикладної математики,
Національна академія статистики, обліку та аудиту

Криві другого порядку та їх застосування в економіці

"Буває мить якогось потрясіння:
побачиш мить як вперше у житті.
Звичайна хмара, сіра і осіння,
пропише раптом барви золоті".
Ліна КОСТЕНКО

Вперше всебічно проаналізовано криві другого порядку на основі їх визначення і загального рівняння. Розглянуто економічні задачі, які можна розв'язати із застосуванням цих кривих.

Кючові слова: *криві другого порядку, рівняння канонічне, рівняння загальне, виробництво, ринок, попит, пропозиція, парадокс Р. Гіффена, крива А. Лаффера.*

Постановка проблеми. Криві другого порядку – це лінії на площині, які визначаються алгебраїчним рівнянням другого ступеня відносно поточних декартових координат. До них належать коло, еліпс, гіпербола і парабола. Вони відомі ще з часів Стародавньої Греції, мають важливе теоретичне і прикладне значення та знайшли широке застосування в економіці [1–8], статистиці [9] й інших галузях науки і техніки [10].

Аналіз останніх досліджень і публікацій. Розрізнені дані про ці криві можна знайти в довідниках, навчально-методичних посібниках і підручниках фізико-математичного і технічного спрямування [11–15], які стали вже бібліографічною рідкістю. Це суттєво ускладнює вивчення кривих другого порядку та застосування їх на практиці. Крім того, вони недостатньо проаналізовані і узагальнені в поєднанні з розв'язанням економічних задач. Такий підхід є актуальним, що спонукало автора до виконання цієї роботи.

Метою статті є аналіз кривих другого порядку, а також економічних задач, що розв'язуються за їх допомогою.

Частина I. Загальний підхід до кривих другого порядку

1. 1. Визначення, канонічні рівняння

1.1.1. Коло

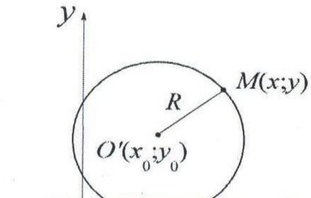


Рис. 1. До визначення кола

Джерело: складено автором.

Колом називається геометричне місце крапок площини, рівновіддалених від даної крапки площини, що називається центром кола (рис. 1).

Користуючись визначенням кола, знайдемо його рівняння з центром у крапці $O'(x_0;y_0)$ і радіусом R (рис. 1). Візьмемо на колі довільну крапку *M(x;y)*. Тоді відстань $O'M = R$ визначається за теоремою Піфагора такою формулою:

© Ф. В. Моцний, 2014

$$R^2 = (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2, \tag{1.1}$$

справедливої для будь-якої крапки кола.

Якщо $x_0 = 0$ і $y_0 = 0$, отримаємо рівняння кола з центром на початку координат: $x^2+y^2 = R^2$.

Піднесемо до квадрата вирази в дужках правої частини формули (1.1), дістанемо рівняння:

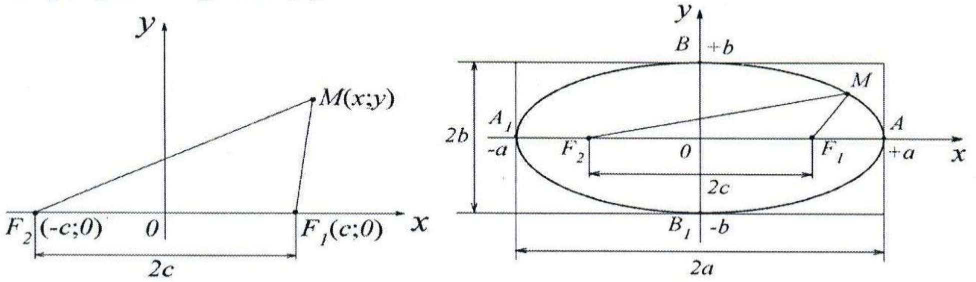
$$x^2 + y^2 + \alpha x + \beta y + \gamma = 0, \tag{1.2}$$

де $\alpha = -2x_0$; $\beta = -2y_0$; $\gamma = x_0^2 + y_0^2 - R^2$.

Отже, коло визначається алгебраїчним рівнянням (1.2) другого степеня з двома невідомими x і y, причому коефіцієнти при x^2 і y^2 рівні між собою і дорівнюють одиниці.

1.1.2. Еліпс

Еліпсом називається геометричне місце крапок площини, сума відстаней від кожної з яких до двох даних крапок тієї ж площини, що називаються фокусами еліпса, є величиною сталою і більшою, ніж відстань між фокусами (рис. 2,а).



а б

Рис. 2. До визначення еліпса (а) і еліпс, вписаний в прямокутник (б)
Джерело: складено автором.

Використаємо визначення еліпса і знайдемо його рівняння. Візьмемо на декартовій системі координат (рис. 2,а) довільну крапку *M(x;y)*, що належить еліпсу з фокусами $F_1(c;0)$ і $F_2(-c;0)$. Тоді $F_1M = \sqrt{(x-c)^2 + y^2}$; $F_2M = \sqrt{(x+c)^2 + y^2}$. Додамо ці вирази, отримаємо рівняння еліпса відносно вибраної системи координат: $F_1M + F_2M = \sqrt{(x-c)^2 + y^2} + \sqrt{(x+c)^2 + y^2} = Const = 2a$, справедливого для будь-якої його крапки. Перепишемо це рівняння в такому вигляді: $(a^2 - c^2)x^2 + a^2y^2 = a^2(a^2 - c^2)$, де $2c < 2a$ (за визначенням еліпса). Позначимо $a^2 - c^2 = b^2$, поділимо обидві частини рівняння на цей множник, тоді отримаємо рівняння еліпса:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1. \tag{1.3}$$

Переконаємося, що в результаті перетворень, обумовлених звільненням від коренів квадратних, не з'явилися зайві корені, тобто покажемо, що будь-яка крапка *M(x;y)*, координати якої задовольняють рівнянню (1.3), знаходиться на цьому еліпсі. Дійсно, із рівняння (1.3) маємо: $y=\pm\frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}$; $x=\pm\frac{a}{b}\sqrt{b^2-y^2}$. Тоді $F_1M=a-\frac{c}{a}x$, $F_2M=a+\frac{c}{a}x$ і $F_1M+F_2M=a-\frac{c}{a}x+a+\frac{c}{a}x=2a$.

Отже, крапка *M(x;y)* належить еліпсу і задовольняє рівнянню (1.3), яке називається *канонічним рівнянням еліпса.*

З іншого боку, кожному значенню x і y відповідають дві крапки еліпса, симетричні відносно координатних осей *Ox* і *Oy* відповідно. Якщо $y=0$, то $x=\pm\frac{a}{b}\sqrt{b^2}=\pm a$, тобто еліпс перетинає вісь *Ox* у двох крапках з координатами $(+a;0)$ і $(-a;0)$. Якщо $x=0$, то $y=\pm\frac{b}{a}\sqrt{a^2}=\pm b$, тобто еліпс перетинає вісь *Oy* у двох крапках з координатами $(0;+b)$ і $(0;-b)$. Якщо $|x|>a$, то вираз під коренем формули $y=\pm\frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}$ менше нуля і y набуває уявних значень. Це означає, що не існує крапок еліпса, абсциси яких були б більші за 2*a,* тобто еліпс знаходиться між прямими $x=+a$ і $x=-a$. Якщо ж $|y|>b$, тоді вираз під коренем формули $x=\pm\frac{a}{b}\sqrt{b^2-y^2}$ менше нуля і x набуває уявних значень. Це означає, що не існує крапок еліпса, ординати яких були б більші за 2*b,* тобто еліпс знаходиться між прямими $y=+b$ і $y=-b$.

Таким чином, еліпс є кривою другого порядку, вписаною в прямокутник зі сторонами 2*a* і 2*b*, які паралельні координатним осям *Ox* і *Oy,* причому діагоналі прямокутника перетинаються в початку координат *O*(0;0) – центрі симетрії еліпса (рис. 2,б). Крапки $A(+a;0)$, $A_1(-a;0)$, $B(0;+b)$, $B_1(0;-b)$ називаються вершинами еліпса; відрізок $AA_1=2a$ – великою віссю еліпса; відрізок $BB_1=2b$ – малою віссю еліпса; F_1M і F_2M – фокальними радіусами крапки $M(x;y)$, а відстань між фокусами $F_1F_2=2c$.

Ексцентриситет еліпса дорівнює відношенню відстані між фокусами еліпса до довжини його великої осі $e=2c/2a$, де $c=\sqrt{a^2-b^2}$. Оскільки $0<c<a$, то ексцентриситет еліпса завжди менше одиниці ($e<1$). Зазначимо при цьому, що ексцентриситет визначає форму еліпса.

Зауваження.

1. Якщо $a<b$, тоді 2*b* буде великою віссю еліпса, а 2*a* – малою віссю; $c=\sqrt{b^2-a^2}$ і $e=2c/2b$. Фокуси еліпса лежатимуть на осі *Oy* і матимуть координати $F_1(0;+c)$ і $F_2(0;-c)$, тобто еліпс у цьому випадку буде витягнутим уздовж осі *Oy*.

2. Якщо $a = b$, то канонічне рівняння еліпса перейде у канонічне рівняння кола $x^2 + y^2 = a^2$ з радіусом *R=a.* Ексцентриситет кола $e = \sqrt{a^2 - a^2}\,/2a = 0$.

Отже, коло є окремим випадком еліпса, у якого півосі *a* і *b* дорівнюють одна одній і, як наслідок, ексцентриситет кола дорівнює нулю.

3. Ексцентриситет еліпса знаходиться в межах $0 \le e < 1$.

1.1.3. Гіпербола

Гіперболою називається геометричне місце крапок площини, для кожної з яких різниця відстаней до двох даних крапок тієї ж площини, що називаються фокусами гіперболи, є величина стала (рис. 3,а).

Використаємо визначення гіперболи і знайдемо її рівняння. Візьмемо на декартовій системі координат довільну крапку *M(x;y),* що належить гіперболі з фокусами $F_1(c;0)$ і $F_2(-c;0)$ (рис. 3,а). Приймемо за ось *Ox* пряму лінію, яка проходить через фокуси F_1 і F_2, а за ось *Oy* – пряму лінію, що перпендикулярна до відрізка F_1F_2 і ділить його пополам. Позначимо абсолютну величину різниці відстаней від довільної крапки *M(x;y)* до фокусів F_1 і F_2 через 2*a*, тобто $F_2M - F_1M = \pm 2a$.

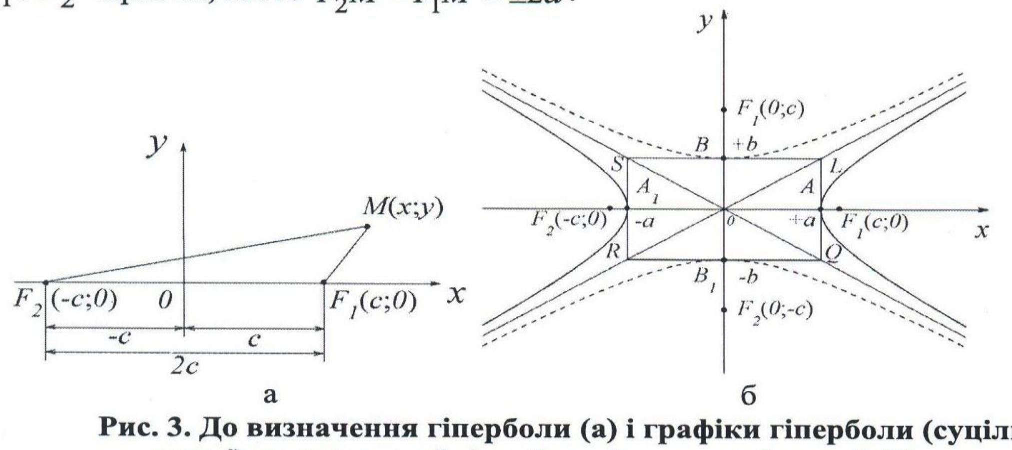


Рис. 3. До визначення гіперболи (а) і графіки гіперболи (суцільні криві) та спряженої гіперболи (пунктирні криві) (б)
Джерело: складено автором.

Знак "+" беремо у випадку, коли $F_2M > F_1M$, а знак "–", коли $F_2M < F_1M$. Отримаємо рівняння гіперболи відносно вибраної системи координат:

$$\sqrt{(x-(-c))^2 + (y-0)^2} - \sqrt{(x-c)^2 + (y-0)^2} = \pm 2a\,, \qquad (1.4)$$

справедливого для будь-якої її крапки. Спростимо це рівняння. Перенесемо один із коренів квадратних направо і піднесемо обидві частини рівняння до квадрата, отримаємо: $\left(\sqrt{(x+c)^2 + y^2}\right)^2 = a^2(c^2 - a^2)$. Оскільки за визначенням гіперболи $2c > 2a$, позначимо $c^2 - a^2 = b^2$, поділимо це рівняння на даний множник і отримаємо рівняння гіперболи у такому вигляді:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1. \qquad (1.5)$$

Переконаємося, як і в попередньому випадку, що в результаті звільнення від коренів квадратних не з'явилися зайві корені, тобто покажемо, що будь-яка крапка *M(x;y)*, координати якої задовольняють рівнянню (1.5), належить цій гіперболі. З цього рівняння отримаємо:

$$a^2y^2 = b^2x^2 - a^2b^2 \Rightarrow y = \pm\frac{b}{a}\sqrt{x^2 - a^2}. \qquad (1.6)$$

$$b^2x^2 = a^2y^2 + a^2b^2 \Rightarrow x = \pm\frac{a}{b}\sqrt{y2 + b2}. \qquad (1.7)$$

Підставимо (1.6) у співвідношення для F_1M і F_2M, отримаємо:

$$F_1M = \begin{cases} -a + \dfrac{c}{a}x, & x > 0; \\ a - \dfrac{c}{a}x, & x < 0. \end{cases} \quad \text{і} \quad F_2M = \begin{cases} a + \dfrac{c}{a}x, & x > 0; \\ -a - \dfrac{c}{a}x, & x < 0. \end{cases}$$

Тоді

$$F_2M - F_1M = \begin{cases} (a + \dfrac{c}{a}x) - (-a + \dfrac{c}{a}x) = +2a, & x > 0; \\ (-a - \dfrac{c}{a}x) - (a - \dfrac{c}{a}x) = -2a, & x < 0. \end{cases}$$

Отже, $F_2M - F_1M = \pm 2a$ і тому крапка *M(x;y)* належить гіперболі і задовольняє рівнянню (1.5), яке називається *канонічним рівнянням* гіперболи.

Якщо *y*=0 з рівняння (1.6) знаходимо, що $x = \pm a$, тобто гіпербола перетинає вісь *Ox* у двох крапках $A(a;0)$ і $A_1(-a;0)$. Якщо $|x| < a$, то *y* – уявне, тобто на гіперболі немає крапок, які б відповідали рівнянню (1.6). Це означає, що в смузі між прямими $x = +a$ та $x = -a$ крапок гіперболи немає. Якщо ж $|x| > a$, то з рівняння (1.6) знаходимо, що $y_1 = \frac{b}{a}\sqrt{x2 - a2}$ і $y_2 = -\frac{b}{a}\sqrt{x2 - a2}$, тобто для кожного *x* маємо два дійсних значення *y*, однакових за величиною, але протилежних за знаком. Інакше кажучи, кожному значенню *x*, яке задовольняє нерівності $|x| > a$, відповідають на гіперболі дві крапки, симетричні відносно осі *Ox*.

Отже, гіпербола є симетричною кривою відносно осі *Ox*.

З іншого боку, для кожного значення *y* із рівняння (1.7) знаходимо два дійсних значення *x*, а саме: $x_1 = +\frac{a}{b}\sqrt{y^2 + b^2}$ і $x_2 = -\frac{a}{b}\sqrt{y^2 + b^2}$. Видно, що вони однакові за абсолютною величиною, але протилежні за знаком, тобто кожному значенню y на гіперболі відповідають дві крапки, симетричні відносно осі Oy.

Отже, гіпербола є симетричною кривою відносно осі Oy.

Якщо $+a < x < +\infty$, то y змінюватиметься в межах $0 < y < \pm\infty$, кожному значенню x відповідатимуть на гіперболі дві крапки, симетричні відносно осі Ox. Вони відходитимуть ("відштовхуватимуться") одна від другої тим далі, чим більшою буде величина абсциси. Це означає, що гіпербола буде розташована справа від прямої $x = +a$ і прямуватиме у плюс нескінченність. Якщо $-\infty < x < -a$, то y змінюватиметься від 0 до $\pm\infty$, тобто гіпербола буде розташована зліва від прямої $x = -a$ і прямуватиме у мінус нескінченність. Крапки $A(a;0)$ і $A_1(-a;0)$ називаються вершинами гіперболи, крапка $O(0;0)$ – центром симетрії гіперболи, а відрізки $AA_1 = 2a$ і $BB_1 = 2b$ – її дійсною і уявною осями відповідно.

Ексцентриситет гіперболи визначається відношенням відстані між фокусами гіперболи до довжини її дійсної осі: $e = 2c/2a$, де $c = \sqrt{a2 + b2}$. Оскільки $c > a$, ексцентриситет гіперболи завжди більше одиниці $(e > 1)$.

Побудуємо на осях гіперболи прямокутник *LQRS* зі сторонами SL=RQ=$2a$ і SR=LQ=$2b$ і центром на початку координат $O(0;0)$ (рис. 3,б). Рівняння діагоналей *LR* та *QS* прямокутника *RSLQ* є, відповідно, такими: $y_1 = k_1 x = (tg\angle AOL)x = +\dfrac{b}{a}x$; $y_2 = (tg\angle AOS)x = -\dfrac{b}{a}x$. Об'єднаємо ці рівняння і запишемо їх у такому вигляді:

$$y = \pm\frac{b}{a}x. \tag{1.8}$$

З'ясуємо, чи перетинаються ці прямі лінії з гіперболою, чи ні?

Розглянемо систему рівнянь:

$$\begin{cases} \dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = 1; \\ y = \pm\dfrac{b}{a}x. \end{cases}$$

Підставимо друге рівняння в перше рівняння, отримаємо: $\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{b^2x^2}{a^2b^2} = 1 \Rightarrow x^2 - x^2 = a^2$, що неможливо, оскільки $a \neq 0$. Це означає, що рівняння прямих ліній (1.8) і гіперболи (1.5) не мають спільних крапок, тобто гіпербола і прямі лінії не перетинаються. Тому прямі лінії, що задані рівняннями (1.8), називаються *асимптотами гіперболи*.

Покажемо, що при $x \to \infty$ гіпербола наближається до асимптот надзвичайно близько, не перетинаючись із ними. Розглянемо крапки $M(x;y)$ і $N(x;Y)$, що належать відповідно гіперболі та асимптоті й мають одну і ту ж абсцису x. Тоді

$$\lim_{x \to \infty} (Y - y) = \lim_{x \to \infty} \left(\frac{b}{a}x - \frac{b}{a}\sqrt{x^2 - a^2}\right) = \lim_{x \to \infty} \frac{ab}{x + \sqrt{x^2 - a^2}} \to 0 .$$

Таким чином, гіпербола є кривою другого порядку, яка розташована усіма своїми крапками усередині вертикальних кутів, утворених асимптотами, і ніде не виходить за межі асимптот.

Зауваження.

1. *Канонічне рівняння* $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=-1$ визначає *спряжену гіперболу* до гіперболи, заданої рівнянням (1.5). Дійсною віссю спряженої гіперболи є вісь $BB_1=2b$, а уявною віссю – вісь $AA_1=2a$. Фокуси спряженої гіперболи лежать на осі Oy і мають координати $F_1(0;c)$ і $F_2(0;-c)$. Графік спряженої гіперболи представлено пунктиром на рис. 3,б. Обидві гіперболи мають спільні асимптоти і центр симетрії $O(0;0)$.

2. Якщо $a=b$, тоді гіпербола називається *рівнобічною,* її канонічне рівняння і рівняння асимптот є, відповідно, такими: $x^2-y^2=a^2$ і $y=\pm x$.

Ексцентриситет рівнобічної гіперболи

$e=\frac{2c}{2a}=\frac{\sqrt{a^2+a^2}}{a}=\frac{a\sqrt{2}}{a}=\sqrt{2}\approx 1{,}41;$ тобто є сталою величиною, яка більша за одиницю.

1.1.4. Парабола

Параболою називається геометричне місце крапок площини, для кожної з яких відстань до даної крапки площини, що називається фокусом, дорівнює відстані до даної прямої, що лежить у цій же площині і називається директрисою параболи (рис. 4).

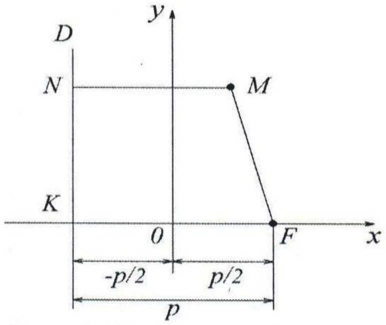


Рис. 4. До визначення параболи
Джерело: складено автором.

Позначимо відстань від фокуса F до директриси D через p – параметр параболи $(KF=p)$. Тоді координати фокуса $F\left(\frac{p}{2};0\right)$; координати крапки $K\left(-\frac{p}{2};0\right)$; координати крапки $N\left(-\frac{p}{2};y\right)$; MF – відстань від крапки $M(x;y)$ до фокуса $F;$ MN – відстань від крапки $M\ (x;y)$ до директриси D (рис. 4). Тоді

$$FM=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}=\sqrt{\left(x-\frac{p}{2}\right)^2+y^2};$$

$$MN=x+\frac{p}{2}.$$

Прирівняємо FM і MN, отримаємо рівняння параболи відносно вибраної системи координат:

$$\sqrt{\left(x-\frac{p}{2}\right)^2+y^2}=x+\frac{p}{2}, \tag{1.9}$$

справедливого для будь-якої її крапки. Піднесемо рівняння (1.9) до квадрата, отримаємо:

$$y^2=2px. \tag{1.10}$$

Переконаємося тепер у тому, що рівняння (1.10), яке отримане шляхом алгебраїчних перетворень рівняння (1.9), не набуло зайвих коренів. Покажемо, що $FM=MN$. Дійсно, враховуючи (1.10), отримаємо: $FM=x+\frac{p}{2}$. З іншого боку, $MN=x+\frac{p}{2}$ для $x\geq 0$. Отже, $FM=MN$, а тому крапка $M(x;y)$ площини належить параболі і задовольняє рівнянню (1.10), яке називається *канонічним рівнянням параболи.* Проаналізуємо це рівняння, записавши його таким чином: $y=\pm\sqrt{2px}$. Із цього рівняння слідує:

1. Якщо $x=0$, тоді $y=0$ і парабола проходить через початок координат.

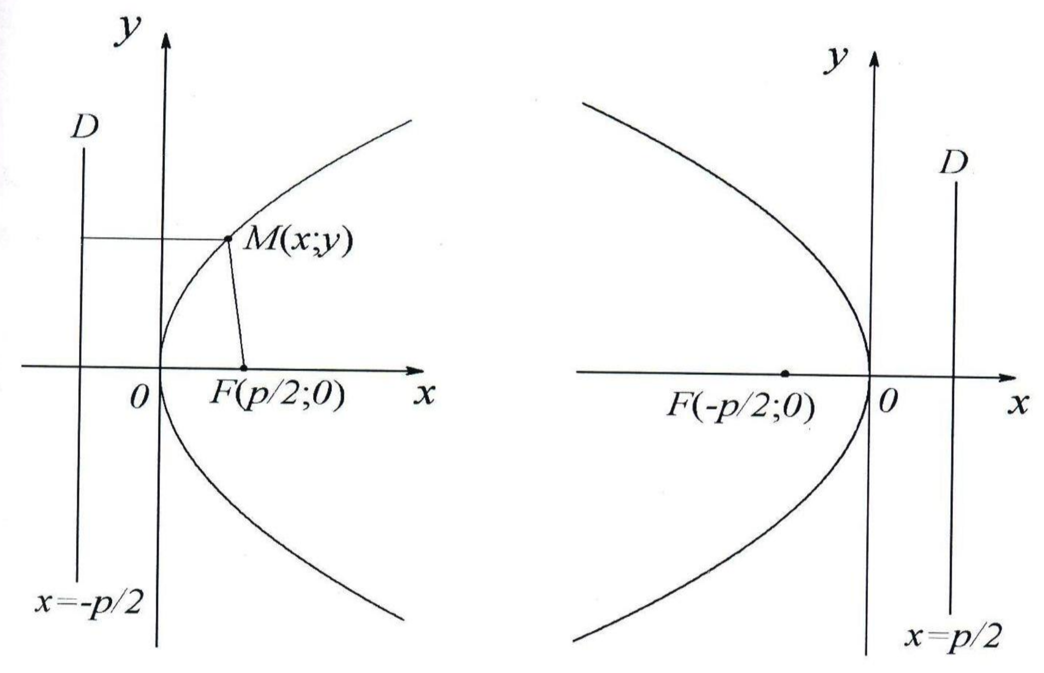
2. Якщо $x<0$, тоді y – уявне число, парабола не має крапок із від'ємними абсцисами і розташована справа від осі Oy.

3. Якщо $x>0$, тоді y матиме два дійсних значення, які рівні за абсолютною величиною, але протилежні за знаком. Це означає, що кожному додатному значенню x на параболі відповідають дві крапки, розташовані симетрично відносно осі Ox.

4. Якщо $x\to+\infty$, тоді $|y|$ також необмежено зростає, тобто крапки параболи при зміщенні вправо вздовж осі Ox необмежено віддалятимуться від неї як вверх, так і вниз. Таким чином, парабола $y^2=2px$ є симетричною кривою відносно осі Ox. Графік параболи $y^2=2px$ наведено на рис. 5,а. Тут $O(0;0)$ – вершина параболи; $F\left(\frac{p}{2};0\right)$ – фокус параболи; FM – фокальний радіус крапки $M(x;y)$ параболи; D – директриса параболи; $x=-p/2$ – рівняння директриси.

Зауваження.

1. Якщо директриса D буде розташована справа від осі Oy (її рівняння $x=p/2$), то парабола розташовуватиметься від осі Oy зліва (рис. 5,б). При цьому $x\leq 0$ і *канонічне рівняння параболи* приймає вигляд: $y^2=-2px$.



а б

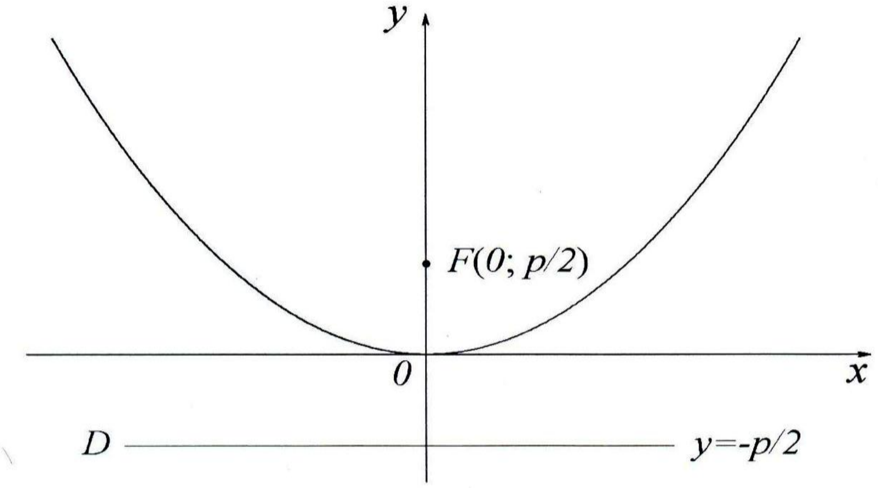
Рис. 5. Графіки парабол $y^2 = 2px$ (а) і $y^2 = -2px$ (б).
Джерело: складено автором.

2. Якщо осі Ox і Oy міняються місцями, тоді *канонічне рівняння параболи* записується таким чином:

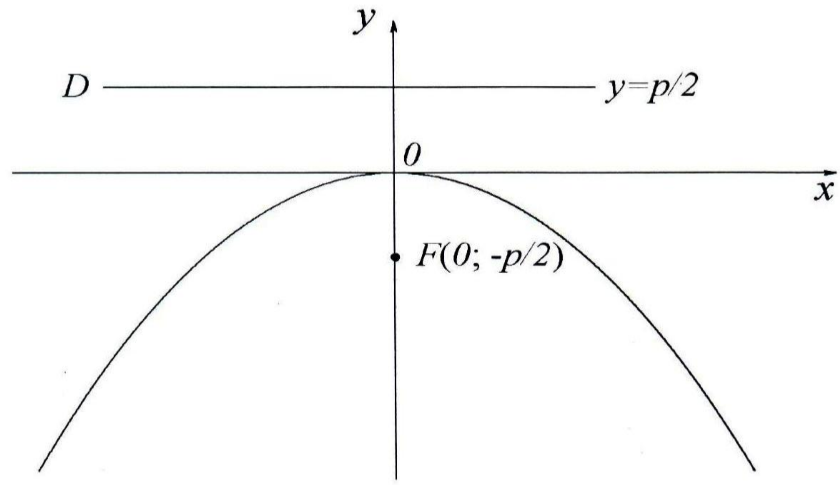
$$x^2 = 2py. \qquad (1.11)$$

Графік параболи $x^2 = 2py$ наведено на рис. 6,а. Видно, що парабола симетрична відносно осі Oy, має фокус $F\left(0;\frac{p}{2}\right)$, розміщена над віссю Ox, а директриса D (її рівняння $y = -p/2$) – під нею.

3. Якщо ж парабола залишається симетричною відносно осі Oy і її фокус $F\left(0;-\frac{p}{2}\right)$, тоді парабола буде розміщена під віссю Ox, а директриса D (її рівняння $y = p/2$) – над нею (рис. 6,б). При цьому $y \le 0$ і *канонічне рівняння параболи* буде таким: $x^2 = -2py$.



а



б

Рис. 6. Графіки парабол $x^2 = 2py$ (а) і $x^2 = -2py$ (б)

Джерело: складено автором.

1.2. Загальне рівняння кривих другого порядку та його аналіз

Загальним рівнянням кривих другого порядку називається алгебраїчне рівняння другого степеня

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0, \qquad (1.12)$$

де коефіцієнти A, B, C, D, E і F – дійсні числа, серед яких принаймні один з коефіцієнтів A, B або C не дорівнює нулю. Воно описує коло, еліпс, гіперболу та параболу. Розглянемо рівняння (1.12) більш детально, проаналізувавши різні можливі випадки. Спростимо його, вважаючи, що коефіцієнти A, C, D, E і F не дорівнюють нулю, а коефіцієнт B дорівнює нулю, тоді отримаємо таке рівняння:

$$A(x-x_0)^2+C(y-y_0)^2=\Delta\,, \tag{1.13}$$

де $x_0=-\dfrac{D}{2A}$; $y_0=-\dfrac{E}{2C}$; $\Delta=\dfrac{D^2}{4A}+\dfrac{E^2}{4C}-F$. Із цього рівняння слідує:

1. Центр кривої знаходиться в крапці $O'(x_0;y_0)$. Дійсно, якщо крапка $M_1(x_1;y_1)$ належить кривій, то симетрична їй відносно $O'(x_0;y_0)$ крапка $M_2(x_2;y_2)$ також належить цій кривій $(x_2=2x_0-x_1;\ y_2=2y_0-y_1)$.

2. Осі $O'x'(y=y_0)$ і $O'y'(x=x_0)$, що паралельні осям координат *Ox* і *Oy,* є осями симетрії даної кривої. Дійсно, якщо крапка $M(x_0,y_0-h)$ належить кривій, то симетрична відносно осі $O'x'$ крапка $M^*(x_0,y_0+h)$ також належить їй. Якщо ж крапка $N(x_0-d,y_0)$ належить кривій, то симетрична відносно осі $O'y'$ крапка $N^*(x_0+d,y_0)$ також належить цій кривій.

3. Нехай тепер центр кривої знаходиться на початку координат $(x_0=0;y_0=0)$, тоді рівняння (1.13) набуває вигляду:

$$Ax^2+Cy^2=\Delta\,. \tag{1.14}$$

Отже, рівняння (1.13) і (1.14) описують криві другого порядку, центри яких знаходяться в крапках $O'(x_0;y_0)$ і $O(0;0)$ відповідно.

1.2.1. Рівняння кола

Якщо порівняти рівняння (1.12) із загальним рівнянням кола (1.2), помічаємо, що $A=C\neq 0$, а $B=0$. Тоді рівняння (1.12) можна записати таким чином: $x^2+y^2+\dfrac{D}{A}x+\dfrac{E}{A}y+\dfrac{F}{A}=0$. Якщо позначити $\dfrac{D}{A}=\alpha$; $\dfrac{E}{A}=\beta$; $\dfrac{F}{A}=\gamma$, отримаємо рівняння, яке в точності збігається із загальним рівнянням кола (1.2).

Таким чином, коло описується загальним рівнянням кривих другого порядку без члена з добутком змінних x і y при умові, що коефіцієнти A і C рівні між собою і не дорівнюють нулю ($A=C\neq 0$).

1.2.2. Рівняння еліпса

Нехай коефіцієнти A і C мають один знак ($A\cdot C>0$), тоді як Δ може приймати три різні значення, а саме: а) $\Delta>0$; б) $\Delta=0$ і в) $\Delta<0$. Якщо $\Delta>0$, отримуємо дійсний еліпс (*канонічне рівняння еліпса*):

$\dfrac{A}{\Delta}x^2+\dfrac{C}{\Delta}y^2=1\Rightarrow\dfrac{x^2}{\frac{\Delta}{A}}+\dfrac{y^2}{\frac{\Delta}{C}}=1\left[\sqrt{\dfrac{\Delta}{A}}=a;\ \sqrt{\dfrac{\Delta}{C}}=b\right]\Rightarrow\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$. Зокрема, при $a=b$ маємо *канонічне рівняння кола* (1.2) з центром у початку координат $O(0;0)$. Якщо $\Delta=0$, крива вироджується у крапку (*вироджений еліпс*).

Якщо $\Delta < 0$, крива не має дійсних крапок (*уявний еліпс*, тобто *пуста множина крапок*).

Таким чином, криві другого порядку належить до кривих *еліптичного типу* (еліпс, одна крапка, пуста множина крапок), якщо коефіцієнти A і C мають один знак $(A \cdot C > 0)$.

Зауваження.

При $A \cdot C > 0$ і $\Delta > 0$ рівняння (1.12) зводяться до *канонічного рівняння еліпса:*

$$\frac{(x-x_0)^2}{a^2} + \frac{(y-y_0)^2}{b^2} = 1 \qquad (1.15)$$

з центром у крапці $O'(x_0; y_0)$.

1.2.3. Рівняння гіперболи

Нехай коефіцієнти A і C у рівнянні (1.14) мають різний знак $(A \cdot C < 0)$. Вважатимемо для визначеності, що $A > 0$, а $C < 0$, тоді як Δ може знову приймати три різні значення: а) $\Delta > 0$; б) $\Delta = 0$ і в) $\Delta < 0$. Якщо $\Delta > 0$, отримуємо *канонічні рівняння гіперболи* $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ з центром у початку координат $O(0;0)$ і півосями дійсною $a = \sqrt{\frac{\Delta}{A}}$ та уявною $b = \sqrt{\frac{\Delta}{-C}}$ відповідно. Якщо $\Delta = 0$, отримуємо *пару прямих*, що перетинаються (*вироджена гіпербола*): $(\sqrt{A}x - \sqrt{-C}y) \cdot (\sqrt{A}x + \sqrt{-C}y) = 0$. Якщо ж $\Delta < 0$, отримуємо *рівняння гіперболи* такого виду: $\frac{x^2}{a_1^2} - \frac{y^2}{b_1^2} = -1$ з півосями $a_1 = \sqrt{\frac{-\Delta}{A}}$ і $b_1 = \sqrt{\frac{\Delta}{C}}$. При $a_1 = a$ і $b_1 = b$ маємо *спряжену гіперболу* до *гіперболи* (1.5).

Таким чином, крива другого порядку належить до кривих *гіперболічного типу (гіпербола, вироджена гіпербола (пара прямих ліній, що перетинаються), спряжена гіпербола),* якщо коефіцієнти A і C мають протилежний знак $(A \cdot C < 0)$.

Зауваження.

1. Якщо $A \cdot C < 0$; $\Delta > 0$, рівняння (1.13) зводяться до *канонічного рівняння гіперболи*:

$$\frac{(x-x_0)^2}{a^2} - \frac{(y-y_0)^2}{b^2} = 1 \qquad (1.16)$$

з центром у крапці $O'(x_0; y_0)$.

2. Якщо $A \cdot C < 0$; $\Delta < 0$; $a_1 = a$ і $b_1 = b$, рівняння (1.13) зводяться до *канонічного рівняння спряженої гіперболи*:

$$\frac{(x-x_0)^2}{a^2} - \frac{(y-y_0)^2}{b^2} = -1$$

з центром у крапці $O'(x_0; y_0)$.

3. Якщо коефіцієнт $B \neq 0$, то завжди можна вибрати кут α таким, що після повороту осей Ox і Oy на цей кут у рівнянні (1.12) зникне член із добутком змінних *x і* у.

4. Криві *еліптичного і гіперболічного типу* належать до центральних кривих другого порядку, оскільки вони мають *центр симетрії*.

1.2.4. Рівняння параболи

Розглянемо загальне рівняння кривих другого порядку (1.12), якщо добуток $A \cdot C = 0$; сума квадратів $A^2 + C^2 \neq 0$ і відсутній член із добутком змінних *x і* у. Проаналізуємо два можливі випадки: а) $A = 0$, $C \neq 0$ і б) $A \neq 0$, $C = 0$. Тоді рівняння (1.12) набуває вигляду:

$$\text{а) } Cy^2 + Dx + Ey + F = 0 \Rightarrow (y - y_0)^2 = 2p(x - x_0). \qquad (1.17)$$

Тут $y_0 = -\dfrac{E}{2C}$; $2p = -\dfrac{D}{C}$; $x_0 = -\dfrac{F}{D} + \dfrac{E^2}{4C \cdot D}$.

$$\text{б) } Ax^2 + Dx + Ey + F = 0 \Rightarrow (x - x_0)^2 = 2p(y - y_0). \qquad (1.18)$$

Тут $x_0 = -\dfrac{D}{2A}$; $2p = -\dfrac{E}{A}$; $y_0 = -\dfrac{F}{A} + \dfrac{D^2}{4A \cdot E}$.

Знайдені рівняння (1.17) і (1.18) є *канонічними рівняннями параболи* з вершинами в крапці $O'(x_0; y_0)$, горизонтальною і вертикальною осями симетрії яких є прямі лінії $y = y_0$ і $x = x_0$, паралельні осям Ox і Oy відповідно. Якщо $x_0 = 0$, $y_0 = 0$, з рівнянь (1.17) і (1.18) отримуємо *канонічні рівняння параболи* (1.10) і (1.11) із вершиною на початку координат $O(0;0)$.

Таким чином, криві другого порядку належать до кривих *параболічного типу,* коли добуток коефіцієнтів A і C дорівнює нулю, а сума квадратів цих коефіцієнтів не дорівнює нулю ($A \cdot C = 0$; $A^2 + C^2 \neq 0$).

Зауваження.

Криві *параболічного типу* не мають *центра симетрії*, тому вони належать до нецентральних кривих.

Продовження статті читайте в наступному номері.