УДК 512.77:514.122:51(075.8)

Ф. В. МОЦНИЙ,
доктор фізико-математичних наук, професор,
завідувач кафедри прикладної математики,
Національна академія статистики, обліку та аудиту

Криві другого порядку та їх застосування в економіці

Частина II. Економічні задачі та криві другого порядку[1]

Вперше всебічно проаналізовано криві другого порядку на основі їх визначення і загального рівняння. Розглянуто економічні задачі, які можна розв'язати із застосуванням цих кривих.

Ключові слова: *криві другого порядку, рівняння канонічне, рівняння загальне, виробництво, ринок, попит, пропозиція, парадокс Р. Гіффена, крива А. Лаффера.*

Криві другого порядку знаходять також застосування в економіці. Розглянемо кілька таких задач.

2.1. Розподіл ринку збуту

Дві кондитерські фабрики, відстань між якими s км, виготовляють печиво. Вартість 1 кг печива для обох фабрик однакова і коштує p грн. Транспортні витрати на перевезення 1 кг печива становлять c_1 грн/км для першої фабрики і c_2 грн/км – для другої фабрики. Знайдемо як треба розподілити ринок збуту печива між цими фабриками, щоб забезпечити найменші витрати споживачів.

Нехай перша фабрика знаходиться на початку координат в крапці *A(0;0)*, а друга фабрика – в крапці *B(s;0)*, і вони віддалені від ринку збуту *O(x;y)* на відстані s_1 і s_2 відповідно (рис. 7).

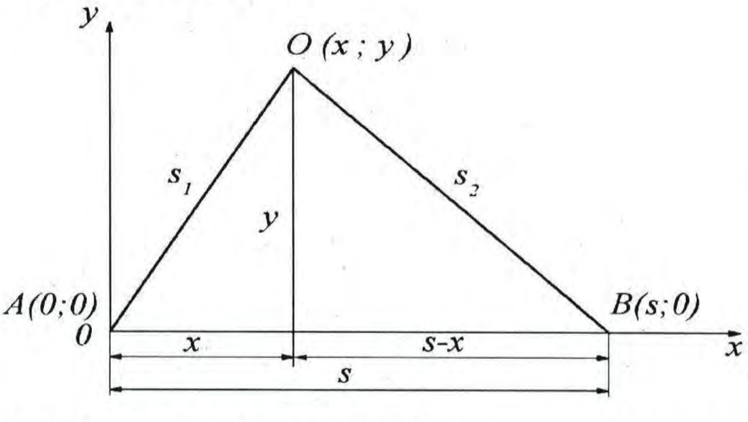


Рис. 7. До розподілу ринку збуту печива між двома кондитерськими фабриками

Джерело складено автором.

[1] Закінчення. Початок у № 2 (41), 2014 збірника наукових праць.

Використавши теорему Піфагора, отримаємо, що $s_1 = \sqrt{x^2 + y^2}$; $s_2 = \sqrt{(s - x)^2 + y^2}$. Тоді витрати першої фабрики на доставку 1 кг печива до місця реалізації становитимуть $e_1 = (p + c_1 s_1)$ грн, а другої фабрики – $e_2 = (p + c_2 s_2)$ грн. Знайдемо тепер множину крапок декартової системи координат, для яких витрати споживачів на купівлю печива обох фабрик будуть однаковими, тобто $e_1 = e_2$. В результаті отримуємо:

$$p + c_1 \cdot \sqrt{x^2 + y^2} = p + c_2 \cdot \sqrt{(s - x)^2 + y^2} \Rightarrow$$
$$\Rightarrow (x + s \cdot \frac{c_2^2}{c_1^2 - c_2^2})^2 + y^2 = (s \cdot \frac{c_1 \cdot c_2}{c_1^2 - c_2^2})^2 \Rightarrow (x')^2 + (y')^2 = R^2,$$

де $x' = x + s \cdot \frac{c_2^2}{c_1^2 - c_2^2}$; $y' = y$; $R = s \cdot \frac{c_1 \cdot c_2}{c_1^2 - c_2^2}$.

Якщо $x' = 0$, то $x = -s \cdot \frac{c_2^2}{c_1^2 - c_2^2}$; $y = R = s \cdot \frac{c_1 \cdot c_2}{c_1^2 - c_2^2}$.

Таким чином, отримали *канонічне рівняння кола* з центром $O(-s \cdot \frac{c_2^2}{c_1^2 - c_2^2}; s \cdot \frac{c_1 \cdot c_2}{c_1^2 - c_2^2})$ і радіусом $R = s \cdot \frac{c_1 \cdot c_2}{c_1^2 - c_2^2}$.

Зокрема, якщо $s = 100$ км, $c_1 = 10$ грн /км, $c_2 = 6$ грн /км, то $|x| = 56{,}25$ км, $y = R = 93{,}75$ км, тобто центр кола є таким: O (–56,25; 93,75).

Отже, печиво першої фабрики вигідно купувати споживачам, які проживають у колі з центром $O(-s \cdot \frac{c_2^2}{c_1^2 - c_2^2}; s \cdot \frac{c_1 \cdot c_2}{c_1^2 - c_2^2})$ і радіусом $R = s \cdot \frac{c_1 \cdot c_2}{c_1^2 - c_2^2}$, тоді як печиво другої фабрики – споживачам, які проживають за межами цього кола.

2.2. Виробнича діяльність фірми

Фірма виготовляє і реалізує світлодіоди за оптовою ціною p за один світлодіод. Щомісячні витрати на виготовлення світлодіодів у кількості q задаються квадратичною залежністю $y_{витр} = aq^2 + bq + c$, де a, b і c – довільні коефіцієнти, відмінні від нуля. Знайдемо щомісячний обсяг виготовлення і реалізації світлодіодів для забезпечення рівноваги доходів і витрат фірми та умови, при яких виробнича діяльність фірми буде рентабельною, а при яких – збитковою.

Нехай щомісячний дохід фірми від реалізації світлодіодів становить $y_{дох} = pq$. При рівновазі доходів і витрат маємо:

$$pq = aq^2 + bq + c \Rightarrow aq^2 + (b - p)q + c = 0.$$

- Якщо дискримінант $D > 0$, то рівняння має два дійсні різні корені

$$q_1 = \frac{(p-b) - \sqrt{(p-b)^2 - 4ac}}{2a} \text{ і } q_2 = \frac{(p-b) + \sqrt{(p-b)^2 - 4ac}}{2a}.$$

- Якщо дискримінант $D = 0$, то рівняння має два дійсні однакові корені

$$q_1 = q_2 = \frac{p-b}{2a}.$$

- Якщо ж дискримінант $D < 0$, то рівняння має два уявні спряжені корені

$$q_1 = \frac{(p-b) - i \cdot \sqrt{-(p-b)^2 + 4ac}}{2a} \text{ і } q_2 = \frac{(p-b) + i \cdot \sqrt{-(p-b)^2 + 4ac}}{2a},$$

які не задовольняють умові задачі.

Отже, для забезпечення рівноваги доходів і витрат фірмі необхідно щомісяця виготовляти і реалізовувати таку кількість q світлодіодів:

$$\frac{(p-b) - \sqrt{(p-b)^2 - 4ac}}{2a}; \quad \frac{(p-b) + \sqrt{(p-b)^2 - 4ac}}{2a} \text{ або } \frac{(p-b)}{2a}.$$

Прибуток фірми від щомісячного випуску і реалізації світлодіодів становитиме:

$$P = y_{дох} - y_{витр} = pq - aq^2 - bq - c \Rightarrow$$
$$\Rightarrow -(aq^2 + (b-p)q + c) \Rightarrow -a(q - q_1)(q - q_2) =$$
$$= -a\left(q - \frac{(p-b) - \sqrt{(p-b)^2 - 4ac}}{2a}\right) \cdot \left(q - \frac{(p-b) + \sqrt{(p-b)^2 - 4ac}}{2a}\right).$$

Проаналізуємо цей результат.

- Якщо

$$q = \frac{(p-b) - \sqrt{(p-b)^2 - 4ac}}{2a} \text{ або } q = \frac{(p-b) + \sqrt{(p-b)^2 - 4ac}}{2a},$$

тоді $P = 0$, доходи фірми дорівнюватимуть витратам.

- Якщо

$$\frac{(p-b) - \sqrt{(p-b)^2 - 4ac}}{2a} < q < \frac{(p-b) + \sqrt{(p-b)^2 - 4ac}}{2a},$$

тоді $P > 0$, виробнича діяльність фірми буде прибутковою.

- Якщо ж

$$q < \frac{(p-b) - \sqrt{(p-b)^2 - 4ac}}{2a} \text{ або } q > \frac{(p-b) + \sqrt{(p-b)^2 - 4ac}}{2a},$$

тоді $P < 0$, виробнича діяльність фірми буде збитковою.

Наведемо деякі оцінки. Нехай $q = 10^4$ світлодіодів; $p = 5$ грош. од./світлодіод, тоді $y_{дох} = 5\cdot10^4$ грош. од. Якщо вважати, що $a = 10^{-4}$ грош. од./світлодіод^2; $b = 3{,}5$ грош. од./світлодіод, $c = 5\cdot10^3$ грош. од., отримаємо, що $q_1 = 5\cdot10^3$ і $q_2 = 10^4$ світлодіодів. Це свідчить, що для забезпечення рівноваги доходів і витрат фірмі необхідно щомісяця виготовляти і продавати світлодіоди в кількості $5\cdot10^3$ або 10^4, причому їх виробництво буде прибутковим, якщо $5\cdot10^3 < q < 10^4$, і збитковим, якщо $q < 5\cdot10^3$ або $q > 10^4$ світлодіодів.

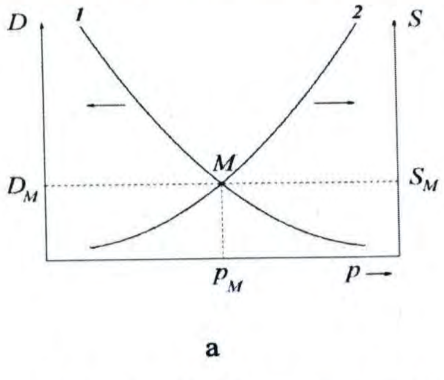
Якщо ж $c = \frac{2{,}25}{4}\cdot10^4$ грош. од., а інші параметри задачі залишаться без зміни, то рівновага доходів і витрат фірми буде досягнута при $q = 7{,}5\cdot10^3$ світлодіодів. У цьому випадку відхилення випуску світлодіодів від рівноваги як в один бік ($q < 5\cdot10^3$ світлодіодів), так і в другий ($q > 10^4$ світлодіодів) призведе до збитковості виробництва ($P < 0$).

2.3. Попит і пропозиція на товар на ринку вільної конкуренції

Добре відомо, що на ринку вільної конкуренції ціна p на товар встановлюється в результаті балансу попиту $D(p)$ і пропозиції $S(p)$. На рис. 8,а показано криві попиту 1 і пропозиції 2 для випадку стабільного ринку в момент часу t. Видно, що при зростанні ціни попит на товар падає, тоді як пропозиція на нього зростає. При рівновазі попиту і пропозиції маємо:

$$D(p) = S(p). \tag{2.1}$$

Розв'язавши це рівняння, знайдемо ринкову ціну p_M товару. Якщо ринок нестабільний, попит і пропозиція на товар будуть змінюватись з часом. В результаті ціна на товар залежатиме також від часу і не визначатиметься рівнянням (2.1), оскільки баланс між попитом і пропозицією порушується. Один із таких можливих випадків наведено на рис. 8,б, де суцільні криві 1 і 2 відповідають попиту і пропозиції для моменту часу t_1, а пунктирні криві 3 і 4 – попиту і пропозиції для моменту часу t_2. У цьому випадку ціни на товар, як показано нижче, будуть змінюватися за іншим законом.



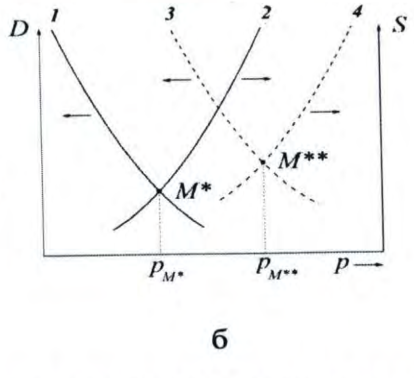


Рис. 8. Графіки попиту (крива 1) і пропозиції (крива 2) для стабільного ринку (а) і попиту (криві 1, 3) і пропозиції (2, 4) для нестабільного ринку (б) у різні моменти часу

Джерело: складено автором.

Дійсно, нехай ринок до певного моменту часу t_0 знаходився в стані рівноваги, з якого його вивела якась зовнішня короткодіюча подія, внаслідок чого ціна p на товар змінилася і стала іншою, ніж ринкова ціна p_M. Після припинення збурення ціна p на товар починає під дією одних лише внутрішніх ринкових причин поступово спадати до попередньої рівноважної ціни p_M. Вважаємо, що при незначних відхиленнях від рівноваги швидкість зміни ціни на товар з часом буде пропорційною різниці між попитом і пропозицією [5], тобто буде визначатися рівнянням:

$$\frac{\Delta p(t)}{\Delta t} = \xi \cdot [D(p(t)) - S(p(t-\tau))]\,. \tag{2.2}$$

Тут коефіцієнт $\xi > 0$ характеризує швидкість реакції ринку на зміну попиту і пропозиції; τ – час запізнення пропозиції відносно попиту і збуту. Іншими словами, пропозиція в момент часу t буде визначатися попитом в попередній момент часу $t-\tau$. Розмірність коефіцієнта ξ відповідає розмірності ціни, бо розмірності величин D і S є оберненими у часі. При незначних відхиленнях ціни p на товар від рівноваги криві $D(p)$ і $S(p)$ можна апроксимувати прямими лініями і записати їх у вигляді лінійних залежностей таким чином:

$$D(p) = D_0 \cdot (1 - \frac{p}{p_D}); \quad S(p) = S_0 \cdot (\frac{p}{p_S} - 1),$$

де D_0, S_0, p_D, p_S – ринкові параметри.

Підставивши ці вирази у рівняння (2.1) і (2.2), отримаємо ринкову ціну на товар

$$p_M = \frac{D_0 + S_0}{D_0/p_D + S_0/p_S} \tag{2.3}$$

і швидкість її зміни з часом:

$$\frac{\Delta p(t)}{\Delta t} = \xi \cdot [D_0 + S_0 - \frac{D_0}{p_D} \cdot p(t) - \frac{S_0}{p_S} \cdot p(t-\tau)]\,. \tag{2.4}$$

Звідки слідує, що зміна ціни на товар з часом залежатиме від швидкості реагування пропозиції на попит. Так, якщо запізнення відсутнє, пропозиція без затримки відреагує на попит. Якщо ж запізнення пропозиції матиме місце, то залежність ринкової ціни від часу буде іншою і визначатиметься рівнянням (2.4).

2.4. Парадокс Р. Гіффена

Зупинимося тепер на парадоксі Р. Гіффена. Сутність цього парадокса полягає у тому, що в середині XIX ст. під час голоду в Ірландії об'єм попиту на картоплю суттєво збільшувався при зростанні ціни на неї, що суперечило класичній постановці закону попиту – при зростанні ціни на товар, як уже зазначалося, кількість придбаного товару мала б зменшуватися. Пояснення парадокса Р. Гіффена є простим. Основним продуктом харчування ірландських бідняків була картопля. Тому збільшення ціни на картоплю змушувало їх зменшити використання інших, більш дорогих і якісних продуктів. Оскільки картопля залишалася найбільш дешевим продуктом, то попит на неї природно зростав. Зрозуміло, що подібна ситуація є єдино можливим виключенням із загального закону попиту.

2.5. Податкова ставка, податкові надходження та крива А. Лаффера

Одним із важливих засобів державного впливу на соціально-економічний розвиток країни є податки. У далекому минулому податки збирали ті, хто стояв при владі, від тих, хто її не мав. З часом було запропоновано більш прогресивні підходи до податкової політики: частина доходу, що вилучалася, мала бути помірною, не пригнічувати виробництво. У розвиток цих ідей Адам Сміт сформулював у XVIII ст. засадничі принципи оподаткування, які стали класичними:

- піддані держави зобов'язані брати участь у покритті видатків уряду відповідно до їх доходу;
- податок має бути точно визначений, а не встановлений свавільно;
- час оплати податку, спосіб і розмір внеску повинні бути ясними та відомими як самому платнику, так і будь-кому іншому;
- кожен податок повинен сплачуватись у такий час і в такий спосіб, які є найбільш зручними для платника;
- необхідно так продумати і розробити податкову систему, щоб мало місце скорочення витрат на стягування податків.

Надмірні ставки оподаткування стали однією з причин байдужості населення до проблем підвищення виробничо-економічної і фінансової активності у 80-і роки минулого століття. Це спонукало групу економістів – прихильників економічної пропозиції, очолюваних А. Лаффером, Н. Туром та П. Робертсом, запропонувати і розробити нову теорію щодо використання методів стимулювання у системі оподаткування. Сутність цієї теорії знайшла відображення у так званій теоретичній кривій А. Лаффера, представленій на рис. 9.

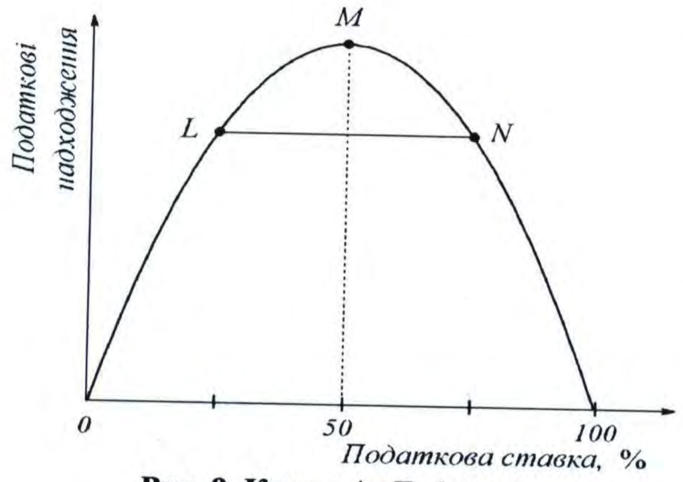


Рис. 9. Крива А. Лаффера

Джерело: складено автором.

Ця крива відображає зв'язок між податковою ставкою і податковими надходженнями до державного бюджету. При нульовій податковій ставці жодних податкових надходжень не буде. Якщо ж податки досягнуть 100%, то також ніхто не працюватиме, і знову не буде податкових надходжень.

Таким чином, крива А. Лаффера показує нульові податкові надходження при 0 і 100% ставці податків.

При збільшені ставки податку доходи держави починають спочатку зростати, а потім, коли податкова ставка перевищує максимум *M*, зменшуватися. Звертає на себе увагу той факт, що податкові надходження при більш високій ставці у крапці *N* і при більш низькій ставці у крапці *L* – однакові. Однак, якщо ставка у крапці *N* не стимулює подальше виробництво, інвестиції та збільшення національного доходу, то в крапці *L* ці стимули є. Отже, зниження граничних ставок оподаткування начебто відкривало широкі можливості і перспективи для економіки.

У розвиток цих ідей і досліджень в США було проведено податкову реформу 1986 року. Максимальну ставку було зменшено від 46,0% (вересень 1987) до 34,0% (вересень 1988). Однак, реальне життя не підтвердило передбачення кривої А. Лаффера щодо зростання податкових надходжень після зменшення податків. Насправді виявилося, що норма особистих надходжень знизилася, а федеральний бюджет змінився з майже збалансованого у 1979 р. до дефіциту в 200 млрд дол. після 1983 р., що стало причиною відхилення теорії А. Лаффера і його однодумців.

Таким чином, проведений у даній роботі детальний аналіз кривих другого порядку в поєднанні з розглядом типових економічних задач буде корисним студентам, аспірантам, економістам, фінансистам, статистикам, викладачам математики та іншим. Отримані результати можна використати як додатковий матеріал до теми "Криві другого порядку" при вивченні дисципліни "Аналітична геометрія" – фундаментальної самостійної складової курсу "Вища математика".

Висновки

1. Проаналізовано криві другого порядку та розглянуто економічні задачі, які зводяться до цих кривих.

2. Досліджено розподіл ринку збуту печива між двома кондитерськими фабриками з метою забезпечення найменших витрат споживачів. Показано, що печиво першої фабрики вигідно купувати споживачам, які проживають у колі з центром $O(-s\cdot\frac{c_2{}^2}{c_1^2-c_2^2};\, s\cdot\frac{c_1\cdot c_2}{c_1^2-c_2^2})$ і радіусом $R=s\cdot\frac{c_1\cdot c_2}{c_1^2-c_2^2}$, тоді як печиво другої фабрики – споживачам, які проживають за межами цього кола. Зокрема, якщо s = 100 км, c_1 = 10 грн/км, c_2 = 6 грн/км, то R = 93,75 км і $O(-56{,}25;93{,}75)$.

3. Встановлено, яку кількість світлодіодів необхідно виготовляти і реалізовувати фірмі щомісяця для забезпечення рівноваги доходів і витрат. Знайдено, за яких умов виробнича діяльність фірми буде прибутковою, а за яких – збитковою.

4. Визначено ринкову ціну товару в стані рівноваги. Показано, що зміна ціни на товар з часом залежатиме від швидкості реагування пропозиції на попит, тобто якщо запізнення відсутнє, пропозиція без затримки відреагує на попит, якщо ж запізнення пропозиції матиме місце, то пропозиція в момент часу t визначатиметься попитом в попередній момент часу $t-\tau$.

5. Розглянуто парадокс Р. Гіффена і причини його виникнення.

6. Проаналізовано податкову ставку, податкові надходження та криву А. Лаффера.

Щиро вдячний доценту Г. В. Понежі за програмне втілення рисунків на персональному комп'ютері.

Список використаних джерел

1. Harzlitt Henry. Economics in one lesson / Henry Harzlitt. – Crown publishers Inc. New York, 1979. – 218 p.
2. Cambell R. Micro-economics. Principles, Problems, and Policies / R. Cambell, Mc. Counell, L. Blue Stanley. – M. Graw-Hill Publishing Company, 1990. – Vol. 1, 2. – P. 1–1000.
3. Семюелсон Пол А. Мікроекономіка / Пол А. Семюелсон, Вільям Д. Нордгауз. – К. : Основи, 1998. – 678 с.
4. Замков О. О. Математические методы в экономике: [учебн.] / О. О. Замков, А. В. Толстопятенко, Ю. Н. Черемных. – М. : ДИС, 1998. – 365 с.
5. Бойко И. И. Основы аналитического маркетинга / И. И. Бойко, С. И. Козловский. – К. : Academia, 1999. – 411 с.
6. Пономаренко О. І. Сучасний економічний аналіз: [навч. посіб. для студентів економ. та мат. спец. вищ. навч. закладів] / О. І. Пономаренко, М. О. Перестюк, В. М. Бурим. – [у 2-х ч.]. – Ч. 1. : Мікроекономіка. – К. : Вища школа, 2004. – 262 с. ; Ч. 2. : Макроекономіка. – К. : Вища школа, 2004. – 208 с.
7. Вітлінський В. В. Моделювання економіки : [навч. посіб.] / В. В. Вітлінський. – К. : КНЕУ, 2005. – 497 с.
8. Моцний Ф. В. Моделювання сучасних економічних процесів / Ф. В. Моцний // Матер. 2-ї міжнарод. конфер. "Моніторінг, моделювання та менеджмент емерджентної економіки", 2010. – С. 160–162.
9. Руденко В. М. Математична статистика : [навч. посіб.] / В. М. Руденко. – К. : Центр учбової літератури, 2012. – 303 с.
10. Мічіо Кайку. Фізика майбутнього (Як наука вплине на долю людства і змінить наше повсякденне життя у XXI сторіччі) / Переклад з англ. А. Кам'янець. – Львів : ЛІТОПИС, 2013. – 432 с.
11. Бронштейн И. Н. Справочник по математике для инженеров и учащихся вузов / И. Н. Бронштейн, К. А. Семендяев. – М. : Наука. – 1986. – 544 с.
12. Ильин В. А. Аналитическая геометрия / В. А. Ильин, Э. Г. Позняк. – [2-е изд. стереотип]. – М. : Наука, 1971. – 232 с.
13. Fuller Gordon. Analytic Geometry / Gordon Fuller, Dalton Tarwater. – [7th Ed.]. – Addison Wesley, 1993. – 417 p.
14. Кудрявцев В. А. Краткий курс высшей математики / В. А. Кудрявцев, В. П. Демидович. – [2-е изд.]. – М. : Наука, 1985. – 576 с.
15. Шкіль М. І. Вища математика / М. І. Шкіль, Т. В. Колесник. – Т. 1. – К. : Либідь, 1999. – 279 с.

Ф. В. МОЦНЫЙ,
доктор физико-математических наук, профессор,
заведующий кафедрой прикладной математики,
Национальная академия статистики, учета и аудита

Кривые второго порядка и использование их в экономике

Впервые всесторонне проанализированы кривые второго порядка на основе их определения и общего уравнения. Рассмотрены экономические задачи, которые можно решить с использованием этих кривых.

Ключевые слова: *кривые второго порядка, уравнение каноническое, уравнение общее, производство, рынок, спрос, предложение, парадокс Р. Гиффена, кривая А. Лаффера.*

F. V. MOTSNYI,
Dr. Sc. (Phys. & Math.), Prof.,
Head of Department for Applied Mathematics,
National Academy of Statistics, Accounting and Audit

Second-Order Curves and Their Application in Economics

The second-order curves are plane curves that are described by a second-order algebraic equations on a Cartesian xy-coordinate rectangular plane. These are circles, ellipses, hyperbolas and parabolas. They had been well known in ancient Greece already.

Second-order curves have significant theoretical meaning and practical impact. They have found great application in economics. Theirs description can be found in numerous reference books, student's guides and textbooks. However, most of these editions have a very technical background, e.g. in physics or mathematics. Moreover, they are quite rare already, complicating studies and usage of the second-order curves in the practical economics by students.

The presented paper has been written taking into account modern achievements in analytical geometry and economical sciences. For the first time, the detailed analysis of the second-order curves and their impact on solutions to economic problems is clearly demonstrated. This analysis is based on the definition and general form of the second-order curves. In particular, product market share based on intrinsic cost, the manufacturing activity of a firm, the impact of demand and supply on a free competition market, Giffen good, impact of tax rate and income tax, and Laffer curve are overviewed in details.

The material is presented in a consistent, sufficiently strict and easy to understand manner.

For students, post-graduates, researchers and lecturers in mathematics, statistics, mathematical modeling, economic cybernetics and other economic subjects at universities. In addition, the paper can be found very interesting for all individuals active in practical economics.

Keywords: *second-order curves, canonical equation, general form of equation, manufacturing, demand, supply, Giffen good and Laffer curve.*