

УДК 539.3

Онишко Л.Й., к.т.н., доцент^{1,2}, **Варивода Ю.Ю.**,² к.т.н., доцент
Пономаренко О.М., к.ф.-м. н., доцент^{3©}

¹ Фізико-механічний інститут ім. Г.В.Карпенка НАН України, м. Львів

² Львівський національний університет ветеринарної медицини
та біотехнологій імені С.З. Гжицького

³ Львівський національний аграрний університет

ДОСЛІДЖЕННЯ ДИНАМІЧНОЇ КОНЦЕНТРАЦІЇ НАПРУЖЕНЬ НА КРАЮ КОЛОВОГО ОТВОРУ ЗА ДІЇ НА НЬОГО НЕОСЕСИМЕТРИЧНОГО НАВАНТАЖЕННЯ

Методами скінченних різниць за часом та рядів Фур'є за кутовою змінною розв'язано плоску задачу теорії пружності про дію симетрично розташованих розподілених неосесиметричних навантажень на краю колового отвору у нескінченній площині. Особливістю модифікованого методу скінченних різниць за часом є можливість звести неоднорідні диференційні рівняння задачі до однорідних, методи розв'язку яких добре розроблені. Досліджено концентрацію напружень на краю колового отвору залежно від часу за різних коефіцієнтів Пуассона, коли навантаження моделюється трьома членами ряду Фур'є.

Ключові слова: динаміка, нескінченна пластина, коловий отвір, скінченні різниці, ряди Фур'є, неосесиметричне навантаження.

Вступ. Доволі часто у багатьох машинах та установках переробної та харчової промисловості є елементи конструкцій, які працюють під дією змінного в часі навантаження. Деякі з них можна змоделювати площиною з коловим отвором, який навантажено динамічними силами. Відзначимо, що в основному, розв'язування плоских динамічних задач теорії пружності, базуються на інтегральних перетвореннях Лапласа [1]. У багатьох випадках отримати обернені перетворення Лапласа є складно, тому для розв'язування динамічних задач використано новий аналітико-числовий метод [2], який можна застосовувати для будь якої геометрії тіл та навантаження. Він ґрунтується на застосуванні скінчених різниць тільки за часом, а за іншими просторовими змінними можна використовувати добре розроблені аналітичні підходи. За цим методом звичайні неоднорідні диференційні рівняння зводять до однорідних такого ж вигляду, як і при застосуванні до рівнянь руху перетворень Лапласа, що дозволяє використовувати добре розроблені підходи для їх розв'язування. Цим методом були розв'язані плоскі динамічні осесиметричні задачі теорії пружності для одно та двошарових порожнистих циліндрів [3–6].

У цій статті вище згаданим аналітико-числовим методом [2] та методом рядів Фур'є [7] розв'язано динамічну неосесиметричну задачу для кругового отвору.

Постановка задачі та метод її розв’язування. Розглянуто елемент конструкції у вигляді нескінченної площини, яка містить коловий отвір радіуса $r = a$. Систему полярних координат r, θ вибрано з початком у центрі кола. На краю отвору у початковий момент часу $t = 0$ прикладено розподілене динамічне навантаження $P(a, \theta, t)$ (рис. 1).

Для розв’язування задачі використано метод скінченних різниць за часом [1], який, як уже відзначалось раніше, полягає у тому, що замість перетворень Лапласа по часу використано скінченні різниці. При цьому рівняння руху зведено до системи неоднорідних диференціальних рівнянь відносно просторових змінних. Цю систему розбито на дві незалежні: однорідну, розв’язок якої задовольняє ненульові крайові умови та неоднорідну з нульовими крайовими умовами. За нульових початкових умов друга з них має нульовий розв’язок. Отже, розв’язок задачі зведено до розв’язування однорідних диференціальних рівнянь такого ж вигляду, як при застосуванні до рівнянь руху інших перетворень, які раніше використовувались у літературі.

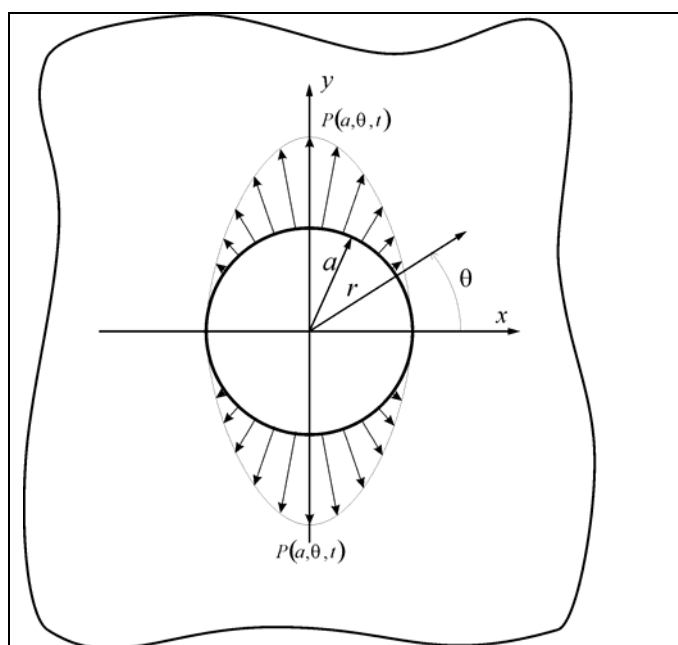


Рис.1 Коловий отвір у нескінченній пружній площині під дією розподіленого динамічного навантаження

Розподіл радіальних σ_{rr} , колових $\sigma_{\theta\theta}$ та дотичних $\sigma_{r\theta}$ напружень для поставленої задачі одержано за формулами [8]

$$\sigma_{rr} = \lambda \nabla^2 \varphi_1 + 2\mu \left(\frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial r^2} - \frac{1}{r^2} \frac{\partial \varphi_2}{\partial \theta} + \frac{1}{r} \frac{\partial^2 \varphi_2}{\partial r \partial \theta} \right),$$

$$\begin{aligned} \sigma_{\theta\theta} &= \lambda \nabla^2 \varphi_1 + \frac{2\mu}{r} \left(\frac{\partial \varphi_1}{\partial r} - \frac{1}{r} \frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial \theta^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \varphi_2}{\partial \theta} - \frac{\partial^2 \varphi_2}{\partial r \partial \theta} \right), \\ \sigma_{r\theta} &= \mu \left(\frac{2}{r} \frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial r \partial \theta} - \frac{2}{r^2} \frac{\partial \varphi_1}{\partial \theta} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \varphi_2}{\partial \theta^2} - \frac{\partial^2 \varphi_2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \varphi_2}{\partial r} \right), \quad \nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} \end{aligned} \quad (1)$$

через хвильові потенціали $\varphi_i (i = 1, 2)$, які знайдено з двох рівнянь руху:

$$\frac{\partial^2 \varphi_i}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \varphi_i}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \varphi_i}{\partial \theta^2} = \frac{1}{c_i^2} \frac{\partial^2 \varphi_i}{\partial t^2}, \quad i = 1, 2, \quad (2)$$

де c_1, c_2 – відповідно швидкості поздовжніх та поперечних хвиль, λ, μ – сталі Ляме.

Підставимо у рівняння (2) розвинення допоміжних функцій φ_i у ряди Фур'є:

$$\varphi_1(r, \theta, t) = \sum_{n=0}^{\infty} A_{1n}(r, t) \cos n\theta, \quad \varphi_2(r, \theta, t) = \sum_{n=0}^{\infty} A_{2n}(r, t) \sin n\theta, \quad (3)$$

де невідомі коефіцієнти $A_{kn} (k = 1, 2)$ у кожний момент часу подамо через нові

функції \widehat{A}_{kn}^v [7]:

$$A_{kn}^j = \sum_{v=1}^j w_{jv} \widehat{A}_{kn}^v, \quad t_j = \sum_{k=1}^j \Delta t_k, \quad \Delta t_k = t_k - t_{k-1}; \quad t_0 = 0, \quad (4)$$

а похідну за часом подано через різницеві рівняння

$$\left. \frac{\partial^2 A_{kn}}{\partial t^2} \right|_{t=t_j} = \frac{A_{kn}^j - A_{kn}^{j-1}}{\Delta t_j^2} - \frac{A_{kn}^{j-1} - A_{kn}^{j-2}}{\Delta t_j \Delta t_{j-1}}; \quad j = 2, 3, \dots \quad (5)$$

У результаті на основі нового методу скінченних різниць за часом [2] отримано

однорідну систему рівнянь відносно невідомих функцій \widehat{A}_{kn}^v

$$\frac{\partial^2 \widehat{A}_{kn}^j}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \widehat{A}_{kn}^j}{\partial r} - \left(\frac{n^2}{r^2} + s_{kj}^2 \right) \widehat{A}_{kn}^j = 0, \quad s_{kj}^2 = \frac{1}{c_k^2 \Delta t_j^2} \quad (6)$$

за умов виконання рекурентних співвідношень для коефіцієнтів w_{jv}

$$w_{jj} = 1; \quad w_{j,j-1} = \Delta\tau_{j-1}/(\Delta\tau_{j-1} - \Delta\tau_j); \quad (j = 2,3,\dots),$$

$$w_{j,j-n} = \frac{\Delta\tau_{j-n}^2}{\Delta\tau_{j-n}^2 - \Delta\tau_j^2} \left[\left(1 + \frac{\Delta\tau_j}{\Delta\tau_{j-1}} \right) w_{j-1,j-n} - \frac{\Delta\tau_j}{\Delta\tau_{j-1}} w_{j-2,j-n} \right]; \quad (j = 3,4,\dots; n = 2,3,\dots,j-1).$$
(7)

Загальний розв’язок рівнянь (6) запишемо через функції Макдональда $K_n(s_{kj}r)$ n -го порядку:

$$\widehat{A}_{kn}^j = C_{kn}^j(s_{kj})K_n(s_{kj}r) \tag{8}$$

Розподіл напружень визначено за формулами (1) врахувавши вирази (3) – (8)

$$\sigma_{rr}^j(t, r, \theta) = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{v=1}^j [C_{1n}^v(s_{1j})L_{1n}^v(r) + C_{2n}^v(s_{2j})L_{2n}^v(r)] w_{jv}^n \cos n\theta,$$

$$\sigma_{r\theta}(t, r, \theta) = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{v=1}^j [C_{1n}^v(s_{1v})L_{3n}^v(r) + C_{2n}^v(s_{2v})L_{4n}^v(r)] w_{jv}^n \sin n\theta, \tag{9}$$

$$\sigma_{\theta\theta}(t, r, \theta) = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{v=1}^j [C_{1n}^v(s_{1j})L_{5n}^v(r) + D_{1n}^v(s_{1v})L_{6n}^v(r)] w_{jv}^n \cos n\theta,$$

де

$$L_{1n}(r) = (\lambda + 2\mu)K_n''(s_{1j}r) + \frac{\lambda}{r}K_n'(s_{1j}r) - \frac{\lambda}{r^2}K_n(s_{1j}r)$$

$$L_{2n}(r) = \frac{1}{r}K_n'(s_{2j}r) - \frac{1}{r^2}K_n(s_{2j}r)$$

$$L_{3n}(r) = (\lambda + 2\mu)I_n''(s_{1j}r) + \frac{\lambda}{r}I_n'(s_{1j}r) - \frac{\lambda}{r^2}I_n(s_{1j}r)$$

$$L_{4n}(r) = \frac{1}{r}I_n'(s_{2j}r) - \frac{1}{r^2}I_n(s_{2j}r), \quad L_{5n}(r) = -\frac{2K_n'(s_{1j}r)}{r} + \frac{2K_n(s_{1j}r)}{r^2}$$

$$L_{6n}(r) = -K_n''(s_{2j}r) + \frac{K_n'(s_{2j}r)}{r} - \frac{K_n(s_{2j}r)}{r^2}.$$

Задачу розв’язуємо за нульових початкових

$$u_r = \partial u_r / \partial t = 0, \quad u_\theta = \partial u_\theta / \partial t = 0$$

та наступних крайових умов

$$\sigma_{rr}|_{r=a} = P(a, \theta, t), \quad \sigma_{r\theta}|_{r=a} = 0 \tag{10}$$

Для розв’язування задачі розвинено прикладене навантаження у ряд Фур’є

$$P(t, \theta, a) = \sum_{n=0}^{\infty} p_n(a, t) \cos n\theta \quad (11)$$

Виходячи з крайових умов (10) та співвідношень (9), (11) отримано систему алгебраїчних рівнянь для визначення $C_{kn}^j(s_{kj})$:

$$\begin{aligned} C_{1n}^j(s_{1j})L_{1n}(a) + C_{2n}^j(s_{2j})L_{2n}(a) &= \widehat{p}_n^j \\ C_{1n}^j(s_{1j})L_{3n}(a) + C_{2n}^j(s_{2j})L_{4n}(a) &= 0 \end{aligned} \quad (12)$$

Розв'язавши цю систему, запишемо невідомі коефіцієнти $C_{kn}^j(s_{kj})$ наступним чином:

$$C_{1n}^j(s_{1j}) = \frac{\widehat{p}_n^j L_{4n}(a)}{L_n(a)}, \quad C_{2n}^j(s_{2j}) = -\frac{\widehat{p}_n^j L_{3n}(a)}{L_n(a)}, \quad (13)$$

де

$$\begin{aligned} L_n(a) &= L_{4n}(a)L_{1n}(a) - L_{2n}(a)L_{3n}(a) \\ L_{1n}(r)|_{r=a} &= L_{1n}(a), & L_{2n}(r)|_{r=a} &= L_{2n}(a), \\ L_{5n}(r)|_{r=a} &= L_{3n}(a), & L_{6n}(r)|_{r=a} &= L_{4n}(a) \end{aligned}$$

$$\widehat{p}_n^j = p_n^j(t) - \sum_{m=1}^{j-1} w_{jm}^n \widehat{p}_n^m.$$

Прикладені на краю отвору розподілені сили моделюємо трьома членами ряду Фур'є

$$P(t, \theta, a) = \sum_{n=0}^{\infty} p_n(a, t) \cos n\theta = p(1 - \cos 2\theta), \quad (14)$$

де його коефіцієнти матимуть вигляд:

$$p_0(a, t) = p, \quad p_1(a, t) = 0, \quad p_2(a, t) = -p, \quad p_n(a, t) = 0, \quad n = 3, 4, \dots \quad (15)$$

Скориставшись співвідношеннями (9) розв'язано поставлену задачу за початкових та крайових умов (10), (11), (14). Знайдено співвідношення для визначення розподілу напружень для плоского елемента конструкції з коловим отвором у безрозмірних величинах

$$\frac{\sigma_{rr}(t, r, \theta)}{p} = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{v=1}^j \left[\frac{\bar{p}_n^v}{L_n(\bar{s}_{1v}, \bar{s}_{2v})} (\bar{L}_{4n}(\bar{s}_{2v}) \bar{L}_{1n}(\bar{s}_{1v}, \tilde{s}_{1v}) - \bar{L}_{3n}(\bar{s}_{1v}) \bar{L}_{2n}(\bar{s}_{2v}, \tilde{s}_{2v})) \right] w_{jv}^n \cos n\theta$$

$$\frac{\sigma_{r\theta}(t, r, \theta)}{p} = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{v=1}^j \left[\frac{\bar{p}_n^v}{L_n(\bar{s}_{1v}, \bar{s}_{2v})} (\bar{L}_{4n}(\bar{s}_{2v}) \bar{L}_{3n}(\bar{s}_{1v}, \tilde{s}_{1v}) - \bar{L}_{3n}(\bar{s}_{1v}) \bar{L}_{4n}(\bar{s}_{2v}, \tilde{s}_{2v})) \right] w_{jv}^n \sin n\theta$$

$$\frac{\sigma_{\theta\theta}(t, r, \theta)}{p} = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{v=1}^j \left[\frac{\bar{p}_n^v}{L_n(\bar{s}_{1v}, \bar{s}_{2v})} (\bar{L}_{4n}(\bar{s}_{2v}) \bar{L}_{5n}(\bar{s}_{1v}, \tilde{s}_{1v}) - \bar{L}_{3n}(\bar{s}_{1v}) \bar{L}_{6n}(\bar{s}_{2v}, \tilde{s}_{2v})) \right] w_{jv}^n \sin n\theta$$

(16)

де $\bar{p}_n^v = \bar{p}_n^v(t) - \sum_{m=1}^{v-1} w_{vm}^n \bar{p}_n^m$ і коефіцієнти $\bar{p}_n^v(t)$ (15) у безрозмірному вигляді

будуть

$$\bar{p}_0^v(a, t) = 1, \quad \bar{p}_1^v(a, t) = 0, \quad \bar{p}_2^v(a, t) = -1, \quad \bar{p}_n^v(a, t) = 0, \quad n = 3, 4, \dots$$

а наступні параметри прийматимуть значення

$$\bar{L}_n(\bar{s}_{1v}, \bar{s}_{2v}) = [\bar{L}_{4n}(\bar{s}_{2v}) \bar{L}_{1n}(\bar{s}_{1v}) - \bar{L}_{2n}(\bar{s}_{2v}) \bar{L}_{3n}(\bar{s}_{1v})]$$

$$\bar{L}_{1n}(\tilde{s}_{1v}, \bar{s}_{1v}) = \left(\frac{\lambda}{\mu} + 2\right) K_n''(\tilde{s}_{1v}) \bar{s}_{1v}^2 + \frac{\lambda}{\mu} K_n'(\tilde{s}_{1v}) \frac{a}{r} \bar{s}_{1v} - n^2 \frac{\lambda}{\mu} \frac{a^2}{r^2} K_n(\tilde{s}_{1v}),$$

$$\bar{L}_{1n}(\bar{s}_{1v}) = \bar{L}_{1n}(\tilde{s}_{1v}, \bar{s}_{1v}) \Big|_{\tilde{s}_{1v}=\bar{s}_{1v}},$$

$$\bar{L}_{2n}(\tilde{s}_{2v}, \bar{s}_{2v}) = 2n \left[\frac{a}{r} K_n'(\tilde{s}_{2v}) \bar{s}_{2v} - \frac{a^2}{r^2} K_n(\tilde{s}_{2v}) \right],$$

$$\bar{L}_{2n}(\bar{s}_{2v}) = \bar{L}_{2n}(\tilde{s}_{2v}, \bar{s}_{2v}) \Big|_{\tilde{s}_{2v}=\bar{s}_{2v}},$$

$$\bar{L}_{3n}(\tilde{s}_{1v}, \bar{s}_{1v}) = 2n \left[-\frac{a}{r} K_n'(\tilde{s}_{1v}) \bar{s}_{1v} + \frac{a^2}{r^2} K_n(\tilde{s}_{1v}) \right],$$

$$\bar{L}_{3n}(\bar{s}_{1v}) = \bar{L}_{3n}(\tilde{s}_{1v}, \bar{s}_{1v}) \Big|_{\tilde{s}_{1v}=\bar{s}_{1v}},$$

$$\bar{L}_{4n}(\tilde{s}_{2v}, \bar{s}_{2v}) = -K_n''(\tilde{s}_{2v}) \bar{s}_{2v}^2 + \frac{a}{r} K_n'(\tilde{s}_{2v}) \bar{s}_{2v} - n^2 \frac{a^2}{r^2} K_n(\tilde{s}_{2v}),$$

$$\bar{L}_{4n}(\bar{s}_{2v}) = \bar{L}_{4n}(\tilde{s}_{2v}, \bar{s}_{2v}) \Big|_{\tilde{s}_{2v}=\bar{s}_{2v}},$$

(17)

$$\bar{L}_{5n}(\tilde{s}_{1v}, \bar{s}_{1v}) = \frac{\lambda}{\mu} K_n''(\tilde{s}_{1v}) \bar{s}_{1v}^2 + \left(\frac{\lambda}{\mu} + 2\right) \frac{a}{r} \bar{s}_{1v} K_n'(\tilde{s}_{1v}) - n^2 \left(\frac{\lambda}{\mu} + 2\right) \frac{a^2}{r^2} K_n(\tilde{s}_{1v})$$

$$\bar{L}_{5n}(\bar{s}_{1v}) = \bar{L}_{5n}(\tilde{s}_{1v}, \bar{s}_{1v}) \Big|_{\tilde{s}_{1v}=\bar{s}_{1v}},$$

$$\bar{L}_{6n}(\tilde{s}_{2v}, \bar{s}_{2v}) = 2n \left[\frac{a^2}{r^2} K_n(\tilde{s}_{2v}) - K_n'(\tilde{s}_{2v}) \frac{a}{r} \bar{s}_{2v} \right],$$

$$\bar{L}_{6n}(\bar{s}_{2v}) = \bar{L}_{6n}(\tilde{s}_{2v}, \bar{s}_{2v}) \Big|_{\tilde{s}_{2v}=\bar{s}_{2v}}, K_n'(\tilde{s}_{kv}) = -K_{n+1}(\tilde{s}_{kv}) + \frac{n}{\tilde{s}_{kv}} K_n(\tilde{s}_{kv}),$$

$$K_n'(\bar{s}_{kv}) = K_n'(\tilde{s}_{kv}) \Big|_{\tilde{s}_{kv}=\bar{s}_{kv}}$$

$$K_n''(\tilde{s}_{kv}) = -K_{n+1}'(\tilde{s}_{kv}) + \frac{n}{\tilde{s}_{kv}} K_n'(\tilde{s}_{kv}) - \frac{n}{(\tilde{s}_{kv})^2} K_n(\tilde{s}_{kv}), \quad K_n''(\bar{s}_{kv}) = K_n''(\tilde{s}_{kv}) \Big|_{\tilde{s}_{kv}=\bar{s}_{kv}},$$

коли $\bar{s}_{1v} = c_2/c_1 \Delta\tau_v$, $\bar{s}_{2v} = 1/\Delta\tau_v$, $\tilde{s}_{1v} = c_2 r/a c_1 \Delta\tau_v$, $\tilde{s}_{2v} = r/a \Delta\tau_v$, $\Delta\tau_v = c_2 \Delta t_v / a$.

Числові результати та висновки. За формулами(16), (17) проведено числові розрахунки розподілу напружень у нескінченній пластині з навантаженим динамічними розподіленими зусиллями коловим отвором. На рисунку 2 приведено графіки залежностей концентрації напружень $\sigma_{\theta\theta}(t, r, \theta)/p$ на краю отвору

($a/r=1$) у точці $\theta = 0$ від часу $\tau_j = \sum_{v=1}^j \Delta\tau_v$ для розподіленого динамічного

навантаження $P(t, \theta, a) = p(1 - \cos 2\theta)$ за різних значень коефіцієнтів Пуассона ($\nu = 0; 0,1; 0,2; 0,3; 0,4; 0,49$). У розрахунках використовувались вирази для c_2/c_1 та λ/μ через коефіцієнти Пуассона:

$c_2/c_1 = [(1 - 2\nu)/(1 - \nu)]^{1/2} / \sqrt{2}$, $\lambda/\mu = 2\nu/(1 - 2\nu)$. Видно, що значення

максимальних напружень $\sigma_{\theta\theta}(t, r, \theta)/p$ суттєво зростають (від 2,3 до 2,85) в діапазоні зміни коефіцієнта Пуассона ν від 0 до 0,49. Починаючи з $\tau_j=9$ концентрація колових напружень на краю отвору мало залежить від коефіцієнта Пуассона, а отже числовий розв'язок динамічної задачі близький до статичного.

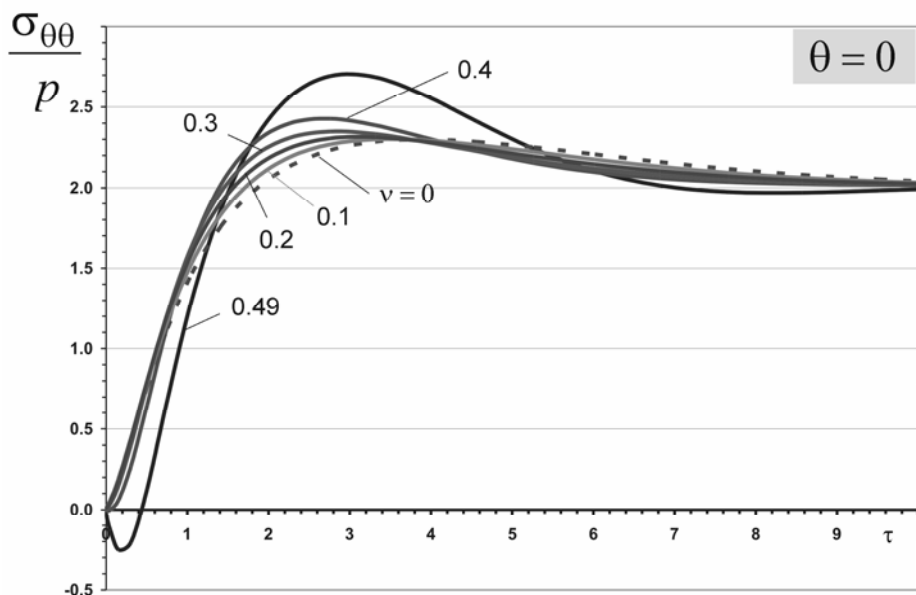


Рис.2 Залежність концентрації напружень $\sigma_{\theta\theta} / P$ на краю колового отвору від часу для різних значень коефіцієнтів Пуассона

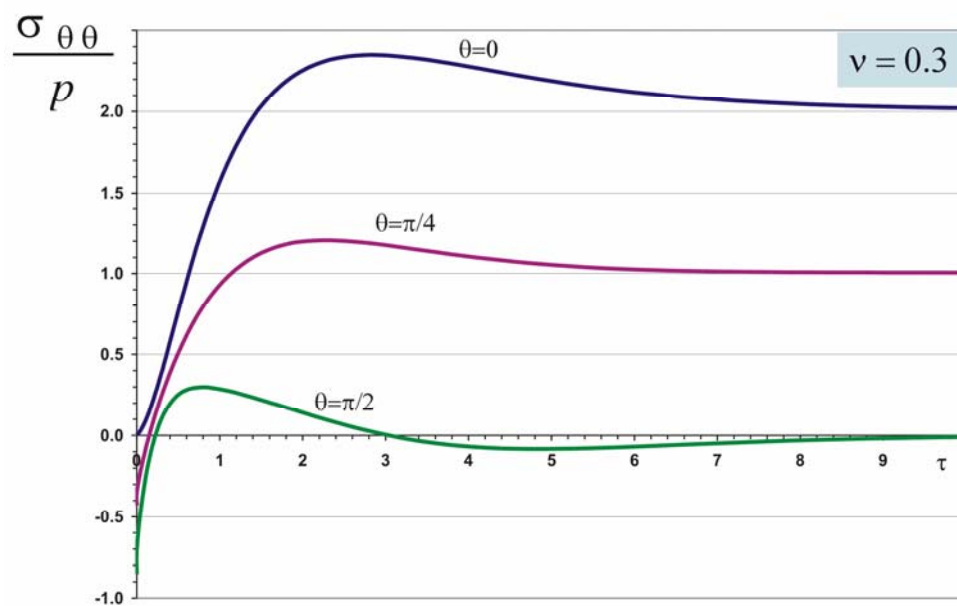


Рис.3 Залежність концентрації напружень $\sigma_{\theta\theta} / P$ на краю колового отвору від часу для різних значень кута θ

На рисунку 3 приведені графіки залежності колових напружень на краю отвору від часу у різних його точках θ для конкретного значення коефіцієнта Пуассона ($\nu = 0,3$). Відзначимо, що як і у випадку осесиметричних задач [3–6] у початковий

момент часу спостерігається динамічний ефект – стрибок напружень (рис.3), величина якого суттєво залежить не тільки від пуассонівських коефіцієнтів, але і від самого розподілу заданих динамічних навантажень на краю колового отвору. Найбільше значення цього стрибка спостерігається при $\theta = \pi/2$ (рис.3) і є близьким до нуля в точці $\theta = 0$.

Література

1. Frangi A. Elastodynamics by BEM: a new direct formulation // Int. J. Numer. Meth. Eng.– 1999.– **45**.– Р. 721–740.
2. Саврук М.П. Новий метод розв'язування динамічних задач теорії пружності та механіки руйнування // Фіз.-хім. механіка матеріалів. – 2003.–№4. – С.194–198.
3. Варивода Ю.Ю.,Онишко Л.Й., Сенюк М.М. Напружений стан циліндричних порожнистих елементів конструкцій харчової та переробної промисловості за динамічних навантажень. // Науковий вісник ЛНУВМБТ ім. С.З. Гжицького Том 10, №2 (37). Частина 5, 2008. – С. 27 – 34.
4. Варивода Ю.Ю.,Онишко Л.Й., Сенюк М.М. Розподіл колових та радіальних напружень в порожнистому циліндрі за імпульсних навантажень на його поверхнях. // Науковий вісник ЛНУВМБТ ім. С.З. Гжицького Том 10, №3 (38). Частина 3, 2008. – С. 211–217.
5. Онишко Л.Й., Сенюк М. М. Напружений стан порожнистого двошарового циліндра під динамічним навантаженням // Фіз.-хім. механіка матеріалів. – 2009. – № 1. – С.55–61.
6. Варивода Ю.Ю., Онишко Л.Й., Сенюк М.М. Вплив на міцність циліндричних елементів конструкцій прямокутних імпульсних навантажень. // Науковий вісник ЛНУВМБТ ім. С.З. Гжицького Том.11, №.3 (42). Частина.3, 2009. – С.198–205.
7. Бронштейн И.Н., Семендяев К.А. Справочник по математике для инженеров и учащихся втузов. – М.:Наука,1981. – 720с.
8. Грінченко В.Т., Мелешко В.В. Гармонические колебания и волны в упругих телах. – Киев: Наук. Думка, 1981. – 284с.

Summary

Onyshko L. Yo., Varyvoda Yu. Yu., Ponomarenko O. M.

INVESTIGATION OF DYNAMIC STRESS CONCENTRATION AT THE CIRCULAR WHOLE BOUNDARY UNDER NONAXISYMMETRICAL LOADING

The plane elastic problem, about action of symmetrically located nonaxisymmetrical distributed loading at the circular whole boundary in unlimited plane is solved by the finite difference method with respect to the time variable and by the Fourier series with respect to the angular variable. The distinction of modified finite difference method with respect to the time is the possibility of reducing of non-homogeneous differential equations to homogeneous ones. The stress concentration at the circular whole boundary subject to the time for different Poisson's ratios and load modeling by three terms of the Fouries series is analysed.

Рецензент - д.т.н., проф. Білонога Ю.Л.