

УДК 664.02

**Варивода Ю.Ю.**, к.т.н., доцент, **Ціж Б.Р.**, д.т.н., професор,  
**Волос В.О.**, к.ф.-м.н., доцент, **Чохань М.І.**, к.т.н., ст.викл.,  
**Філіпсонов Р.В.**, лаборант

*Львівський національний університет ветеринарної медицини та біотехнологій  
імені С.З. Гжицького*

**Гончар Ф. М.**, к. ф. – м. н., доцент ©  
*НУ «Львівська Політехніка»*

## **ОЦІНКА ТОЧНОСТІ РОЗВ'ЯЗКІВ ЗАДАЧ ТЕПЛОПРОВІДНОСТІ ДЛЯ НЕОДНОРІДНИХ ЕЛЕМЕНТІВ КОНСТРУКЦІЙ, ЩО МІСТЯТЬ ЧУЖОРІДНІ ТОНКОСТІННІ ВКЛЮЧЕННЯ**

*Більшість неоднорідних вузлів машин та апаратів виробництва харчової промисловості містять чужорідні тонкостінні включення, які суттєво впливають на температурний режим роботи таких вузлів. Робота присвячена розрахунку та аналізу такого впливу. На прикладі довгого порожнистого із тонкостінним чужорідним включенням циліндра, поверхні якого підтримуються при різних температурах, проведена оцінка точності розв'язку задачі теплопровідності для тіл з тонкостінними включеннями. При цьому коефіцієнт теплопровідності представляється через симетричну і асиметричну дельта – функції Дірака. Показано, що наближений розв'язок можна отримати шляхом граничного переходу у точному розв'язку. На конкретному прикладі дослідженого межі допустимості застосування наближеного розв'язку.*

**Ключові слова:** *задача теплопровідності, неоднорідні тіла, чужорідні включення, точність розв'язків, узагальнені функції, коефіцієнт теплопровідності, дельта – функції, ступеневі асиметричні функції, алгебра узагальнених функцій, граничний метод спряження, тепловий контакт, температурний режим.*

**Вступ.** Широке застосування в різних галузях сучасної техніки харчової та переробної промисловостей знаходять тіла неоднорідної структури [1,2]. Розв'язання проблем міцності для неоднорідних вузлів апаратів і машин переробної промисловості, оптимізації технологічних процесів [3,4] вимагають розробки нових методів розв'язку задач термомеханіки тіл неоднорідної структури. Першим етапом для дослідження теплового стану таких тіл служить знаходження температурних полів в неоднорідних елементах конструкцій. При цьому відомо [5-8], що однією із ефективних теорій розв'язку проблем термомеханіки тіл неоднорідної структури на сучасному етапі її дослідження є теорія, що базується на застосуванні апарату узагальнених функції [9-13]. Ця теорія в термомеханіці тіл неоднорідної структури призвела до виникнення нового наукового напрямку в термомеханіці деформівного твердого тіла,

значний вклад в розвиток яким внесли львівські вчені Я. С. Підстригач та Ю. М. Коляно. Ними, наприкінці минулого століття, був започаткований і розвинутий новий науковий напрямок в термомеханіці – застосування узагальнених функцій в термомеханіці тіл неоднорідної структури: багат шарових, армованих тіл, тіл із наскрізними і ненаскрізними включеннями, покриттями, із залежними від температури теплофізичними характеристиками, із неперервною неоднорідністю, з кусково-постійними коефіцієнтами теплопровідності, багатоступеневих пластин, оболонок, валів. Про цей науковий напрямок яскраво відмічається в роботах всевітньо відомих вчених в області термодинаміки неоднорідних структур академіків М. М. Рикаліна та О. О. Углова [14] та інших вчених [15-17]. При цьому теплофізичні і фізико - механічні характеристики та їх комбінації для кусково-однорідних тіл, коефіцієнти теплопровідності з їх поверхонь можуть бути описані для всього неоднорідного тіла як єдиного цілого за допомогою асиметричних одиничних або характеристичних функцій, а фізико - механічні характеристики тіл з неперервною неоднорідністю та із залежними від температури характеристиками можуть бути апроксимовані за допомогою ступеневих функцій. В результаті підстановки представлених таким чином характеристик в диференціальні рівняння термомеханіки неоднорідних тіл, приходимо до диференціальних рівнянь або граничних умов, які містять коефіцієнтами ступеневі функції, симетричну або асиметричні дельта – функції Дірака та їх похідні. В цьому випадку, за вихідні приймаються рівняння термодинаміки однорідних тіл, а також появляється можливість враховувати на поверхнях спряження однорідних елементів розглядуваних тіл умов контакту більш загальних, ніж ідеальний контакт. Це значно спрощує і зменшує трудомісткість подібного роду задач, розв'язки отримуються, в основному, методом спряження та виникає можливість отримання розв'язків крайових задач термодинаміки неоднорідних тіл, що є єдиними для всієї ділянки їх визначення [18,19].

#### **Матеріали і методи.**

Проведемо оцінку точності розв'язку задачі теплопровідності для тіл з тонкостінними включеннями на наступному прикладі. Розглянемо довгий порожнистий циліндр, внутрішня  $r = r_0$  зовнішня  $r = R$  поверхні якого підтримуються відповідно при температурах  $t_{r_0}$  і  $t_R$ .

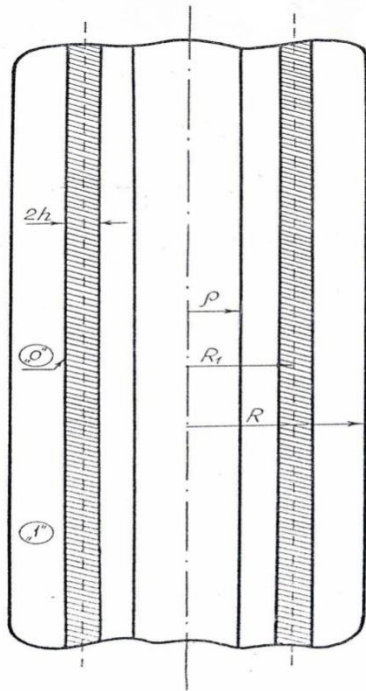


Рис. 1

Нехай циліндр містить кільцеве чужорідне включення середнього радіуса  $R_1$  і товщини стінки  $2h$  (рис.1). Допускаючи, що коефіцієнт теплопровідності включення відмінний від коефіцієнта теплопровідності основного матеріалу, зобразимо його для неоднорідного циліндра як єдиного цілого наступним чином:

$$\lambda_{\tau}(r) = \lambda_{\tau}^{(0)} + \lambda_{\tau}^{(1)} - \lambda_{\tau}^{(0)} N(r), (1)$$

або

$$\lambda_{\tau}(r) = \lambda_{\tau}^{(1)} + \lambda_{\tau}^{(0)} - \lambda_{\tau}^{(1)} N_{-}(r), (2)$$

де  $N(r) = S(r - R_1 + h) - S(r - R_1 - h)$ ,

$N_{-}(r) = S_{-}(r - R_1 + h)S_{+}(r - R_1 - h)$ - характеристичні функції,

$$S_{\pm}(z) = \begin{cases} 1, z > 0, \\ \frac{1}{2} \pm \frac{z}{2}, z = 0 \\ 0, z < 0 \end{cases} - \text{асиметричні одиничні функції.}$$

Визначимо спочатку стаціонарне температурне поле в неоднорідному циліндрі, якщо  $\lambda_{\tau}(r)$  зображено виразом (1). Для цього використаємо диференціальне рівняння в частинних похідних, стаціонарного двовимірного температурного поля в неоднорідному циліндричному тілі [1]

$$\lambda_{\tau}(r,z)\Delta t + \frac{\partial \lambda_{\tau}(r,z)}{\partial r} \frac{\partial t}{\partial r} + \frac{\partial \lambda_{\tau}(r,z)}{\partial z} \frac{\partial t}{\partial z} = 0, (3)$$

де  $\lambda_{\tau}(r,z)$  – неоднорідний коефіцієнт теплопровідності,

$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$  – оператор Лапласа. Таким чином, враховуючи (3), для

точного виразу температурного поля  $t_{\tau}$  отримаємо рівняння теплопровідності :

$$\frac{d^2 t_{\tau}}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dt_{\tau}}{dr} + \frac{1}{\lambda_{\tau}(r)} \frac{d\lambda_{\tau}(r)}{dr} \frac{dt_{\tau}}{dr} = 0 (4)$$

Граничні умови прийемо у вигляді

$$t_{\tau} = t_{\rho} \text{ при } r = \rho, t_{\tau} = t_R \text{ при } r = R (5)$$

Диференціальне рівняння теплопровідності в частинних похідних (3) із врахуванням співвідношення (2) можна переписати [2] :

$$\lambda_t(r,z)\Delta t + (\lambda_t^{(0)} - \lambda_t^{(1)}) \{ [\delta_- (r - R_1) \frac{\partial t}{\partial r} |_{r=R_1} - \delta_+ (r - R_2) \frac{\partial t}{\partial r} |_{r=R_2}] S_-(d - z) - N(r) \delta_- (d - z) \frac{\partial t}{\partial z} |_{z=d} \} = 0 \text{ де, } \delta_{\pm}(z) = \frac{d S_{\pm}(z)}{dz} \quad (6)$$

або в іншому вигляді

$$\frac{d^2 t_T}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dt_T}{dr} = (1 - K_{\lambda}^{-1}) \left[ \frac{dt_T}{dr} |_{r=R_1-h} \delta_-(r - R_1 + h) - \frac{dt_T}{dr} |_{r=R_1+h} \delta_+(r - R_1 - h) \right], \quad (7) \text{ де } K_{\lambda} = \frac{\lambda_t^{(0)}}{\lambda_t^{(1)}}.$$

Використовуючи метод варіації довільних сталих, знаходимо розв'язок останнього [3-6]:

$$t_T = C_1 \ln r + C_2 + (1 - K_{\lambda}^{-1}) \left[ \frac{dt_T}{dr} |_{r=R_1-h} (R_1 - h) \ln \frac{r}{R_1-h} S_-(r - R_1 + h) - \frac{dt_T}{dr} |_{r=R_1+h} (R_1 + h) \ln \frac{r}{R_1+h} S_+(r - R_1 - h) \right] \quad (8)$$

Із співвідношення

$$\frac{dt_T}{dr} = \frac{C_1}{r} + (1 - K_{\lambda}^{-1}) \frac{1}{r} \left[ \frac{dt_T}{dr} |_{r=R_1-h} (R_1 - h) S_-(r - R_1 + h) - \frac{dt_T}{dr} |_{r=R_1+h} (R_1 + h) S_+(r - R_1 - h) \right]$$

впливає, що  $\frac{dt_T}{dr} |_{r=R_1-h} = C_1 \frac{K_{\lambda}}{R_1-h}, \frac{dt_T}{dr} |_{r=R_1+h} = C_1 \frac{K_{\lambda}}{R_1+h} \quad (9)$

Сталі інтегрування, що входять у (8), визначимо із граничних умов (5) із врахуванням (9) у вигляді

$$C_1 = M, C_2 = t_{\rho} - M \ln \rho, \quad (10), \text{ де } M = \frac{t_R - t_{\rho}}{\ln \frac{R}{\rho} - (1 - K_{\lambda}) \ln \frac{R_1+h}{R_1-h}} \text{ Підставляючи}$$

$$(10) \text{ у вираз (8), запишемо розв'язок межової задачі (4) - (5) остаточно}$$

$$t_T = t_{\rho} + M \left[ \ln \frac{r}{\rho} - (1 - K_{\lambda}) L(r) \right], \quad \text{де}$$

$$L(r) = \ln \frac{r}{R_1-h} S_-(r - R_1 + h) \ln \frac{r}{R_1+h} S_+(r - R_1 - h).$$

Покажемо, що як при зображенні коефіцієнта теплопровідності неоднорідної системи ( або ж будь – якої іншої теплофізичної характеристики) у вигляді (1), чи у вигляді (2) умови ідеального теплового контакту на границі спряження «включення – основний матеріал» зберігаються. Для цього розглянемо температуру  $t_T$  і тепловий потік  $q$  окремо для кожної із трьох кусково – однорідних областей (див. рис.1).

Для першої області  $\rho < r < R_1 - h$  маємо:

$$t_{T1} = t_\rho + M \ln \frac{r}{\rho}, \quad q_1 = M \frac{\lambda_t^{(1)}}{r}$$

Для другої області  $R_1 - h < r < R_1 + h$  буде:

$$t_{T2} = t_\rho + M \left[ \ln \frac{r}{\rho} - (1 - K_\lambda) \ln \frac{r}{R_1 - h} \right], \quad q_2 = MK_\lambda \frac{\lambda_t^{(0)}}{r}$$

Для третьої області  $R_1 + h < r < R$  знаходимо:

$$t_{T3} = t_\rho + M \left[ \ln \frac{r}{\rho} - (1 - K_\lambda) \ln \frac{R_1 + h}{R_1 - h} \right], \quad q_3 = M \frac{\lambda_t^{(1)}}{r}$$

На внутрішній границі  $r = R_1 - h$  контакту включення з основним матеріалом, отримуємо, що

$$t_{T1}|_{r=R_1-h} = t_\rho + M \ln \frac{R_1-h}{\rho},$$

$$q_1|_{r=R_1-h} = M \frac{\lambda_t^{(1)}}{R_1-h},$$

$$t_{T2}|_{r=R_1-h} = t_\rho + M \left[ \ln \frac{R_1-h}{\rho} - (1 - K_\lambda) \ln \frac{R_1-h}{R_1+h} \right],$$

$$q_2|_{r=R_1-h} = MK_\lambda \frac{\lambda_t^{(0)}}{R_1-h}.$$

Звідси випливає, що  $t_{T1}|_{r=R_1-h} = t_{T2}|_{r=R_1-h}$ ,  $q_1|_{r=R_1-h} = q_2|_{r=R_1-h}$

На зовнішній границі  $r = R_1 + h$  контакту знаходимо

$$t_{T2}|_{r=R_1+h} = t_\rho + M \left[ \ln \frac{R_1+h}{\rho} - (1 - K_\lambda) \ln \frac{R_1+h}{R_1-h} \right], \quad q_2|_{r=R_1+h} = MK_\lambda \frac{\lambda_t^{(0)}}{R_1+h}.$$

$$\text{Та } t_{T3}|_{r=R_1+h} = t_\rho + M \left[ \ln \frac{R_1+h}{\rho} - (1 - K_\lambda) \ln \frac{R_1+h}{R_1-h} \right], \quad q_3|_{r=R_1+h} = MK_\lambda \frac{\lambda_t^{(1)}}{R_1+h}.$$

Отже  $t_{T2}|_{r=R_1+h} = t_{T3}|_{r=R_1+h}$ ,  $q_2|_{r=R_1+h} = q_3|_{r=R_1+h}$ .

У випадку представлення коефіцієнта теплопровідності неоднорідної системи співвідношенням (2) отримуємо, що температурне поле має вигляд виразу (11), в якому замість  $S_+(r - R_1 - h)$  буде  $S_-(r - R_1 - h)$ . При цьому також виконуються умови ідеального теплового контакту.

Розглянемо випадок тонкостінного включення. В цьому випадку коефіцієнт теплопровідності можна представити у вигляді [9]

$$\lambda_t = \lambda_t^{(1)} + \Lambda_t^{(0)}(1 - K_\lambda) \delta(r - R_I), \quad (12)$$

$$\lambda_t^f = \lambda_t^{(1)} + \Lambda_t^{(0)}(1 - K_\lambda) \delta_-(r - R_I), \quad (13)$$

де  $\Lambda_t^{(0)} = 2 \lambda_t^{(0)} h$  - приведена теплопровідність включення,  $K_\lambda = \frac{\lambda_t^{(1)}}{\lambda_t^{(0)}}$ .

Підставивши (12) в загальне рівняння стаціонарної теплопровідності  $\frac{d}{dr} \left[ r \lambda_t(r) \frac{dt}{dr} \right] = 0$ , отримуємо рівняння для визначення наближеного температурного поля  $t_\Pi$

$$\frac{d}{dr} \{ r [\lambda_t^{(1)} + A_t^{(0)} (1 - K_\lambda) \delta(r - R_1) \frac{dt_n}{dr} ] = 0. \quad (14)$$

Інтегруючи рівняння (14) раз по  $r$ , маємо:

$$\frac{dt_n}{dr} - (1 - K_\lambda^{-1}) \frac{dt_n}{dr} \Big|_{r=R_1} 2h \delta(r - R_1) = \frac{C_1'}{\lambda_t^{(0)} r} \quad (15)$$

Взявши до уваги, що  $2h \delta(r - R_1) \approx N(r)$ , із (11) знаходимо

$$\frac{dt_n}{dr} \Big|_{r=R_1} = \frac{C_1'}{\lambda_t^{(0)} R_1} \quad (16).$$

Повторно інтегруючи (15) по  $r$  із врахуванням (16), маємо

$$t_\Pi = \left[ \frac{\ln r}{\lambda_t^{(0)}} + \frac{2h}{R_1} \left( \frac{1}{\lambda_t^{(0)}} - \frac{1}{\lambda_t^{(1)}} \right) S(r - R_1) \right] C_1' + C_2' \quad (17)$$

Сталі інтегрування  $C_1'$  і  $C_2'$  знаходимо із граничних умов (5) у вигляді

$$C_1' = M' \lambda_t^{(1)}, \quad C_2' = t_\rho - M' \ln \rho, \quad (18)$$

$$\text{де } M' = \frac{t_R - t_\rho}{\ln \frac{R}{\rho} - (1 - K_\lambda) \frac{2h}{R_1}}$$

Після підстановки (18) у (17) знаходимо наближений розв'язок крайової задачі теплопровідності у випадку тонкостінного включення

$$t_\Pi = t_\rho + M' \left[ \ln \frac{R}{\rho} - (1 - K_\lambda) L'(r) \right], \quad (19) \quad \text{де } L'(r) = \frac{2h}{R_1} S(r - R_1).$$

Користуючись представленням (13) рівняння теплопровідності, отримуємо вираз температурного поля у вигляді (19), в якому замість  $S(r - R_1)$  буде  $S_-(r - R_1)$ .

Покажемо, що розв'язок (19) рівняння теплопровідності (14) можливо також отримати, виходячи із точного розв'язку (11). Перетворимо коефіцієнт  $M$  у співвідношенні  $L(r)$  розв'язку (11) таким чином.

Розкладемо в коефіцієнті  $M$  вираз для логарифма  $\ln \frac{R_1+h}{R_1-h}$  в ряд за

$$\text{степенями } \frac{h}{R_1}: \ln \frac{R_1+h}{R_1-h} = \ln \frac{1+\frac{h}{R_1}}{1-\frac{h}{R_1}} = \frac{2h}{R_1} + \frac{2h^3}{3R_1^3} + \dots \quad (20)$$

У випадку тонкостінного включення в розкладі (20) можна обмежитись першим членом. Таким чином, виходимо на коефіцієнт  $M'$  розв'язку (19). Вираз  $L(r)$ , що входить в (11), перетворимо так:

$$\begin{aligned} L(r) &= \ln \frac{r}{R_1-h} S_-(r - R_1 + h) - \ln \frac{r}{R_1+h} S_+(r - R_1 - h) = \ln \frac{\frac{r}{1-\frac{h}{R_1}}}{\frac{r}{1+\frac{h}{R_1}}} S_-(r - R_1 + \\ &h) - \ln \frac{\frac{r}{1+\frac{h}{R_1}}}{\frac{r}{1-\frac{h}{R_1}}} S_+(r - R_1 - h) = \ln \frac{r}{R_1} N(r) - \ln \left( 1 - \frac{h}{R_1} \right) S_-(r - R_1 + h) + \\ &\ln \left( 1 + \frac{h}{R_1} \right) S_+(r - R_1 - h) \end{aligned} \quad (21)$$

Використавши після цього співвідношення (19) і враховуючи, що

$$\ln \left( 1 \pm \frac{h}{R_1} \right) \approx \pm \frac{h}{R_1},$$

Замість (21)

знаходимо

$$L(r) \approx \ln \frac{h}{R_1} 2h \delta(r - R_1) + \frac{h}{R_1} [S_-(r - R_1 + h) + S_+(r - R_1 - h)] =$$

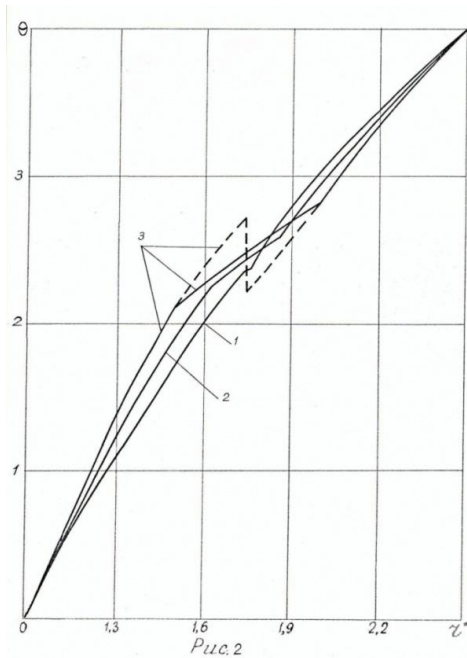
$$\frac{2h S_-(r - R_1 + h) + S_+(r - R_1 - h)}{R_1} \approx \frac{2h}{R_1} S(r - R_1)$$

Підставляючи результати перетворених співвідношень  $M$  і  $L(r)$  у розв'язок (11), отримуємо розв'язок (19).

**Результати дослідження.**

Досліджуємо далі на конкретному прикладі границі застосування наближеногорозв'язку (19). Нехай  $K_\lambda = 0,5$ ,

$t_R = 500^\circ C$ ,  $t_\rho = 100^\circ C$ ,  $\rho = 2 \cdot 10^{-2} \text{ м}$ ,  $R = 5 \cdot 10^{-2} \text{ м}$ ,  $R_1 = 3,5 \cdot 10^{-2} \text{ м}$



На рис.2 представлені графіки зміни надлишкових температурних полів

$$\theta_T = \frac{t_T - t_\rho}{t_\rho}, \quad \theta_\Pi = \frac{t_\Pi - t_\rho}{t_\rho}$$

потовщині  $r^* = \frac{r}{\rho}$

безмежного порожнистого циліндра з тонкостінним циліндричним включенням при різних значеннях товщини стінки включення. Суцільними лініями зображені криві зміни температурного поля, яке розраховане за точною формулою (11) при  $\frac{2h}{R_1} = \frac{1}{70} - \frac{1}{20}$  (крива 1),  $\frac{2h}{R_1} = \frac{1}{7}$  (крива 2),  $\frac{2h}{R_1} = \frac{1}{3}$  (крива 3), штриховими лініями – зміни наближеного температурного поля, що розраховані за формулою (19).

Криві, що відповідають точному розв'язку, представляють собою ламані лінії.

**Висновок.**

Із графіків випливає, що при наближене температурне поле співпадає з його точним виразом. Потім спостерігається деяка незначна відмінність і вже

при  $\frac{2h}{R_1} = \frac{1}{3}$  в області включення наближене температурне поле відрізняється від точного значення на 12%.

**Література**

1. Варивода Ю.Ю., Волос В.О., Гончар Ф.М., Сенів Р.В.  
Розрахунок температурних режимів у сховищах під час зберігання продовольчої сировини і готової харчової продукції. – В кн. «Матеріали Міжнародної наукової конференції ім. академіка М. Кравчука», Київ, 2012р., ч.І. Диференціальні та інтегральні рівняння, с. 91.
2. Варивода Ю.Ю., Волос В.О., Гончар Ф.М.  
Дослідження реологічних властивостей деяких харчових продуктів. – В кн. «Матеріали Міжнародної наукової конференції ім. академіка М. Кравчука», Київ, 2012р., ч.І. Диференціальні та інтегральні рівняння, с. 92.
3. Плахотін В.І., Тюрікова І.С., Хомич І.П.  
Теоретичні основи технологій харчових виробництв. – К. : Центр навч. літератури. 2006. – 640 с.
4. Білонога Ю.Л. Процеси і апарати харчових виробництв, Львів, Видав. «Ліга - Прес», 2003, 166 с.
5. Болотін В.В., Новічков Ю.М. Механіка багат шарових конструкцій – М. : Машинобудування, 1980. – 376 с.
6. Коляно Ю.М., Волос В.О. Рівняння термопружності пластин із не наскрізними тонкостінними включеннями – Доп. АН УРСР, сер. А., 1976, №9, с. 797-801.
7. Коляно Ю.М., Малкіель Б.С., Волос В.О., Кушнір Р.М.  
Температурні напруження в металевому – скляному вузлі тримача кольороподільної маски кольорового кінескопу. – В кн. «Якість, міцність, надійність і технологічність електровакуумних приладів», Київ: Наук. думка, 1976, с. 140-152.
8. Волос В.О., Фолькенфлік Ю.Я. Неусталені температурні напруження в металевому – скляному вузлі тримача оболонки кольорового кінескопу при його відкачці. – В кн. «Підвищення якості електронно – променевих приладів у Х- ій п'ятирічці» : Тези доповідей, Київ: Наук. думка, 1977, с. 6-7.
9. Коляно Ю.М. Застосування узагальнених функцій в термомеханіці кусково – однорідних тіл. – Мат. методи і фізико-механічні поля, 1978, вип.7 с. 7-11.
10. Іванов В.К. Про одну алгебру елементарних узагальнених функцій. – В кн. : Узагальнені функції та векторні поля. Праці Інституту математики, Свердловськ, 1979, вип.. 31, с. 3-15.
11. Підстригач Я.С., Коляно Ю.М. Узагальнена термомеханіка, Київ: Наук. думка, 1976. – 310 с.
12. Ломакін В.А. Теорія пружності неоднорідних тіл. – М. : Вид - во МДУ, 1976. – 367 с.
13. Коляно Ю.М., Микитишин М.І., Койфман Ю.І. Напруження у круглій пластині, що нагрівається по циліндричній і боковій поверхнях. – Теплові напруження в елементах конструкцій, 1976, вип. 16, с. 56-62.
14. Рикалін М.М., Углов О.О. Розвиток теплофізичних основ технологічних процесів, ФХОМ, 1981, №1, с. 7-18.



15. Самарський О.О. Рівняння параболічного типу із розривними коефіцієнтами. – Доп. АН СРСР, 1958, т. 121, №2, с. 225-228.
16. Тимофєєв Ю.О. Про один наближений метод розрахунку температурних полів кусково – однорідних тіл. – Журнал «Диференціальні рівняння», 1980, том XVI, №8, с. 1492-1503.
17. Хорошун Л.П. Про побудову рівнянь шаруватих пластин та оболонок. – Приклад. механіка, 1978, т.14, №10, с. 3-21.
18. Преображенський І.М., Комозін І.Т. Основні рівняння теорії пружності макронеоднорідних тіл. – Механіка композитних матеріалів, 1981, №1, с. 142-145.
19. Підстригач Я.С., Коляно Ю.М., Семерак М.М. Температурні поля і напруження в елементах електровакуумних приладів. – Київ: Наук. думка, 1981. – 342 с.

### Summary

*Evaluation of the accuracy of task solving of heat conduction problem for inhomogeneous structural elements containing alien thin inclusion.*

*Most of heterogeneous nodes machinery and apparatus manufacturing food containing alien thin inclusion, which significantly affect the temperature of such nodes. The work is devoted to the calculation and analysis of such effects. On the example of a long hollow thin-walled inclusion alien cylinder surface is maintained at different temperatures, the estimation accuracy of the solution heat conduction problem for bodies with thin-walled inclusions. The coefficient of thermal conductivity is represented by symmetrical and asymmetrical delta - function of Dirac. It is shown that the approximate solution can be obtained by passing to the limit in the exact solution. In the particular example studied limits of acceptability use approximate solution.*

Рецензент – к.т.н., доцент Чайковський Б.П.