

якісними показниками. У подальших дослідженнях доцільно вивчати вплив вмісту гелів альгінатів кальцію на структурно-механічні показники м'ясопродуктів.

#### Література

1. Производство мясной продукции на основе биотехнологии. / [Лисицын А. Б., Липатов Н. Н., Кудряшов Л. С., Алексахина В. А.]; под общей ред. Н. Н. Липатова. – М.: ВНИИМП, 2005. – 369 с.
2. Пивоварова О. Дослідження стану води та вологоутримуючої здатності структурованих систем на основі альгінату натрію / Ольга Пивоварова, Євгеній Пивоваров // Прогресивні техніка та технології харчових виробництв ресторанного господарства і торгівлі Харк. держ. ун-т. харчування та торгівлі. – 2009. – Вип. № 2 (10). – С. 170–177. 5.
3. Булдаков А. С. Пищевые добавки. Справочник / Булдаков А. С. – М. : ДеЛи принт, 2001. – 435 с.
4. Пестина А. Кинетика гелеобразования в системе «альгинат натрия – CaCO<sub>3</sub> D-глюконо-д-лактон» / А. Пестина, Е. Пивоваров // Вісник Національного технічного університету Харківський політехнічний інститут. – 2008. – № 10. – С. 17–22.
5. Возможность использования альгината натрия при производстве структурированных продуктов : материалы XI Междунар. конф. молодых ученых [«Пищевые технологии и биотехнологии»], (Казань, 13–16 апр. 2010 г.)/ В. Н. Пасичный, Ю. А. Ястреба // М-во образования и науки РФ, КГТУ – К.: КГТУ, 2010. –156 с.

Стаття надійшла до редакції 2.09.2015

УДК 664.9

**Федишин Я. І.**, к.ф.-м.н., професор<sup>©</sup>

*Львівський національний університет ветеринарної медицини та біотехнологій  
імені С.З.Гжицького*

**Гембара Т.В.**, к.т.н., доцент (taras.gembara@gmail.com.)

**Боднар Г.Й.**, к.т.н., доцент

*Львівський державний університет безпеки життєдіяльності*

**Федишин Т.Я.**, к.в.н., доктор філософії

#### ОПТИМАЛЬНЕ УПРАВЛІННЯ СИСТЕМОЮ З РОЗПОДІЛЕНИМИ ПАРАМЕТРАМИ ДЛЯ ОСЕСИМЕТРИЧНОЇ ЗАДАЧІ СТЕРИЛІЗАЦІЇ

*Розроблено методика застосування фундаментальних закономірностей теорії управління системами з розподіленими параметрами стосовно визначення температурно-часових режимів стерилізації на прикладі технології стерилізації м'ясних консервів. Її основу складають постановки та розв'язання задач оптимального за швидкодією керування процесом нагрівання з урахуванням основних фазових обмежень, до яких, насамперед, відносяться фазові обмеження на максимальну температуру і максимум допустимої втрати харчової цінності у процесі стерилізації в автоклавах неперервної дії. В результаті запропоновано алгоритми температурно-часових режимів стерилізації. При тому забезпечена допустима харчова цінність, як відносна біологічна цінність за лабільністю білків до ферментативного гідролізу.*

**Ключові слова:** розподілені параметри, оптимізація, управління, принцип максимуму, харчова цінність, температурне поле, стерилізація.

УДК 664.9

**Федишин Я. И.**, к.ф.-м.н., профессор  
*Львовский национальный университет ветеринарной медицины и биотехнологий имени С.З.Гжицкого*  
**Гембара Т.В.**, к.т.н., доцент (taras.gembara @ gmail.com.)  
**Боднар Г.И.**, к.т.н., доцент  
*Львовский государственный университет безопасности жизнедеятельности*  
**Федишин Т.Я.**, к.в.н., доктор философии

### **ОПТИМАЛЬНОЕ УПРАВЛЕНИЕ СИСТЕМОЙ С РАСПРЕДЕЛЕННЫМИ ПАРАМЕТРАМИ ДЛЯ ОСЕСИММЕТРИЧНЫХ ЗАДАЧ СТЕРИЛИЗАЦИИ**

*Разработана методика применения фундаментальных закономерностей теории управления системами с распределенными параметрами по определению температурно-временных режимов стерилизации на примере технологии стерилизации мясных консервов. Ее основу составляют постановки и решения задач оптимального по быстродействию управления процессом нагрева с учетом основных фазовых ограничений, к которым, прежде всего, относятся фазовые ограничения на максимальную температуру и максимум допустимой потери пищевой ценности в процессе стерилизации в автоклавах непрерывного действия. В результате предложены алгоритмы температурно-временных режимов стерилизации. При этом обеспечена допустимая пищевая ценность, как относительная биологическая ценность за лабильностью белков к ферментативному гидролизу.*

**Ключевые слова:** *распределенные параметры, оптимизация, управление, принцип максимума, пищевая ценность, температурное поле, стерилизация.*

UDC 664.9

**Fedyshyn J. I.**, Ph.D., professor  
*Lviv National University of Veterinary Medicine and Biotechnologies  
named after S.Z.Gzhytskyj*  
**Hembara T.V.**, Ph.D., associate professor (taras.gembara @ gmail.com.)  
**Bodnar G.J.**, Ph.D., associate professor  
*Lviv State University of Life Safety*  
**Fedyshyn T.J.**, Ph.D.

### **OPTIMAL CONTROL OF SYSTEMS WITH DISTRIBUTED PARAMETERS FOR AXYSYMMETRIC PROBLEMS STERILIZATION**

*The method of application of the fundamental laws of the theory of control systems with distributed parameters concerning the definition of temperature and time regimes sterilization technology for example sterilization of canned meat was established. Its basis is the formulation and solution of problems of optimum speed for the heating process control with the main phase restrictions, which primarily include the phase limitation on the maximum temperature and maximum acceptable loss of nutritional value in the process of sterilization in autoclaves continuous action. The proposed algorithms modes of temperature and time of sterilization. While permissible provided food value, the relative biological value proteins by lability to enzymatic hydrolysis.*

**Key words:** *distributed parameters, optimization, control, the principle of maximum, nutritional value, temperature field, sterilization.*

**Вступ.** Процеси теплової обробки харчові продукти, як об'єкти для математичного моделювання та управління, з точки зору фундаментальних наукових досліджень є складними системами з розподіленими параметрами. Для задач стерилізації м'ясних консервів в автоклавах неперервної дії розв'язано ряд задач математичного моделювання [1-3], де враховано теплофізичні властивості робочих середовищ стерилізаційних апаратів, та м'ясних консервів. Встановлено температурно-часовий режим стерилізації, який забезпечує мінімальні вартісні витрати, наприклад, теплові енерговитрати на стерилізацію. При оцінці мікробіологічної безпеки продукту ефективною виявилась методика розрахунку концентрації мікробних клітин, температури та тривалості її підтримування в елементарному об'ємі, який найповільніше нагрівається. Водночас проведена оцінка харчової цінності продукту, зазвичай в його поверхневих шарах. На базі математичної моделі [1,2] можна будувати алгоритми управління, які встановлюють залежність дій управління від вихідних параметрів та кінцевого стану керованого процесу. Відомі труднощі розв'язання крайових задач оптимального управління такими динамічними об'єктами в класичному двохточковому формулюванні набувають принциповий характер стосовно до нескінченновимірних систем з розподіленими параметрами. Вони поглиблюються в багатьох ситуаціях, які становлять практичний інтерес, некерованістю об'єкта щодо необхідних кінцевих станів за типової причини їх неузгодженості з граничними умовами математичних моделей, що описують поведінку об'єкта [4-5]. Можливий спосіб подолання зазначених труднощів полягає в переході до розв'язуваної задачі оптимального управління із заданою цільовою множиною в нескінченномірному фазовому просторі систем з розподіленими параметрами.

**Матеріали і методи.** Чисельні методи розв'язування задач теплопровідності, методи математичної теорії управління.

**Результати дослідження.** Для розв'язування задачі управління нагрівом м'ясних консервів, процес стерилізації розглядається в якості об'єкта оптимізації з розподіленими параметрами. Стан об'єкта однозначно визначається просторово-часовим розподілом температури тіла, що нагрівається в часі і по радіальній координаті.

В якості математичної моделі об'єкта управління використовується осесиметрична нелінійна одномірна модель процесу нагріву, з урахуванням основних нелінійностей і виразів для відносних характеристик.

За базовий критерій оптимальності розглядається узагальнена продуктивність автоклава, обумовлена часом процесу нагріву консервів до необхідних температурних кондицій (задача оптимальної швидкодії). Використовуючи інтегральну форму подання, можна записати критерій оптимальності в наступному вигляді:

$$I = \int_0^{\tau_k} d\tau = \tau_k \rightarrow \min . \quad (1)$$

Зміну температури стерилізації  $T_c$ , що дозволяє змінювати температурне поле консерви, можна розглядати як зосереджений керуючий вплив, підпорядкований обмеженню

$$0 \leq T_c(\tau) \leq T_{c_{\max}} . \quad (2)$$

Обмеження, що накладаються на основні фазові координати об'єкта температурне поле у консерві і поле локальних споживчих властивостей, - записуються у формі

$$T_{\max}(\tau) = \max_{l \in [0,1]} T(l, \tau) \leq T_{\text{дон}}, 0 < \tau \leq \tau_{\kappa}; \quad (3)$$

$$c_{\max}(\tau) = \max_{l \in [0,1]} c(l, \tau) \leq c_{\text{дон}}, 0 < \tau \leq \tau_{\kappa}. \quad (4)$$

Температурне поле та вирази для споживчих властивостей – харчової цінності  $c(\tau)$  використано наведені в [1], умовна оцінка дається коефіцієнтом:

$$C(\tau) = \tau \cdot 10^{\frac{\tau - T_0}{Z_0}}, \quad (5)$$

величину  $Z_0$  ( $Z$  – фактор) з достатньою точністю можна використовувати для оцінки більшості кваліметричних характеристик при стерилізації м'ясопродуктів (таблиця 1).

Таблиця 1

**Статистичний аналіз змін кваліметричних характеристик яловичини при нагріванні**

Кваліметричний показник	$Z_0, ^\circ C$	Середнє квадратичне відхилення $\Delta Z_0, ^\circ C$	Відносна похибка, %
Запах	22	$\pm 0,7$	3
Колір	22	$\pm 0,1$	0,5
Смак	19	$\pm 0,4$	2
Білкова цінність	30	$\pm 0,1$	0,3
Вміст тіаміну	23	$\pm 0,15$	0,6

Зауважимо, що за іншу характеристику споживчих властивостей можна використати параметр санітарно-мікробіологічної безпеки – летальне число  $L(\tau)$  [2, 3].

В якості початкової умови розглядається початкове температурний розподіл по радіусу консерви:

$$T(l, \tau) = T(l, 0) = T_0(l). \quad (6)$$

Точність наближення температури при закінченні процесу до необхідного значення оцінюється за максимальною величиною абсолютного відхилення в межах просторової області, займаної об'єктом, інакше кажучи, у рівномірній чебишевській метриці:

$$\max_{l \in [0,1]} |T(l, \tau_{\kappa}) - T^*| \leq \varepsilon_0. \quad (7)$$

Отже, задача оптимального по швидкодії управління процесом нагрівання в загальному вигляді може бути сформульована наступним чином.

Необхідно знайти такий змінний у часі керуючий вплив  $Tc(\tau) = Tc_{\text{opt}}(\tau)$ , який обмежений (2) та забезпечує «перехід» виробу, що нагрівається, з

початковими умовами (6) в задану цільову множину, згідно (7), при мінімально можливому значенні критерію (1) в умовах виконання фазових обмежень (3) і (4).

В якості еквівалентного представлення лінійного об'єкта управління отримано його модальний опис нескінченною системою диференціальних рівнянь у нормальній формі Коші щодо часових мод  $\bar{T}_n$  температурного поля. Застосування до рівняння теплопровідності з початковими і граничними умовами скінченних інтегральних перетворень по просторовому аргументу з ядром, рівним його власним функціям  $\varphi_n(\mu_n, l)$ ,  $n = 1, 2, \dots$ , приводить до представлення об'єкта нескінченною системою рівнянь:

$$\frac{d\bar{T}_n(\mu_n, \tau)}{d\tau} = \frac{1}{c\gamma} \left( -\mu_n^2 \bar{T}_n(\mu_n, \tau) + \bar{\varphi}_l(\mu_n) u(\tau) \right), \quad (8)$$

$$\bar{T}_n(\mu_n, 0) = \bar{T}_0(\mu_n); \quad n = 1, 2, \dots, N, \quad N \rightarrow \infty$$

де  $\bar{\varphi}_l(\mu_n)$  і  $\bar{T}_0$  – моди розкладу в ряд по власним функціям.

Розподілений вихід об'єкта  $T(l, \tau)$  (температурний розподіл по перерізу консерви, що нагрівається з часом) записується за відомими значеннями мод  $\bar{T}_n(\mu_n, \tau)$  сумою нескінченного ряду:

$$T(l, \tau) = \sum_{n=1}^{\infty} \bar{T}_n(\mu_n, \tau) \varphi_n(\mu_n, l). \quad (9)$$

Подібно до відомих результатів для загальної нелінійної задачі оптимального за швидкістю керування процесами нестационарної теплопровідності, стандартні процедури принципу максимуму безпосередньо визначають, у тому числі, стосовно до кусково-лінійного модального подання математичної моделі у формі (8),  $\Delta^{(N)}$  – параметризоване представлення управляючого впливу  $Tc_{omn}(\tau)$  в формі кусково-сталої функції часу:

$$Tc_{omn}(\tau) = \frac{Tc_{\max}}{2} \left[ 1 + (-1)^{j+1} \right], \quad \sum_{i=1}^{j-1} \Delta_i < \tau < \sum_{i=1}^j \Delta_i, \quad j = \overline{1, N}, \quad (10)$$

яка однозначно задається з точністю до числа  $N$  і тривалістю  $\Delta_i, i = \overline{1, N}$  інтервалів, на яких функція приймає сталі значення, є шуканими параметрами і залежать тільки від точності нагрівання, яке  $\varepsilon_0$  в (7), де  $N$  можна знайти по заданій величині  $\varepsilon_0$  за загальною методикою [4,5] альтернансного методу. Далі реалізується процедура редукції вихідної задачі до задачі напівнескінченної оптимізації:

$$I(\Delta) = \sum_{i=1}^N \Delta_i \rightarrow \min_{\Delta}; \quad \Delta = (\Delta_1, \Delta_2, \dots, \Delta_N), \quad (11)$$

$$\Phi(\Delta) = \max_{l \in [0, R]} |T(l, \Delta) - T^*| \leq \varepsilon_0, \quad (12)$$

де залежності  $T(l, \Delta)$  знаходимо по чисельній скінченноелементній моделі об'єкта при управлінні виду (10).

У цій задачі передбачається оптимальна форма кривої радіального розподілу підсумкових температур і його альтернансні властивості, а саме згідно цих властивостей температура в кінці оптимального процесу відрізняється від потрібної на гранично допустиму величину  $\pm \varepsilon_0$  в деяких  $K$  точках  $l_j^0, j = \overline{1, K}$  на відрізку  $[0, R]$ , де  $K \in \{N, N + 1\}$ , загальна кількість яких стає рівною кількості всіх шуканих невідомих, що призводить до замкнутої щодо всіх параметрів оптимального процесу базової системи співвідношень:

$$\begin{cases} |T(l_j^0, \Delta^0) - T^*| = \varepsilon_0, j = 1, 2, \dots, K; 0 \leq l_1^0 < l_2^0 < \dots < l_K^0 \leq R; \Delta^0 = (\Delta_1^0, \Delta_2^0, \dots, \Delta_N^0); \\ K = \begin{cases} N, \text{ якщо } \varepsilon_{\min}^{(N)} < \varepsilon_0 < \varepsilon_{\min}^{(N-1)}; \\ N + 1, \text{ якщо } \varepsilon_0 = \varepsilon_{\min}^{(N)}. \end{cases} \end{cases} \quad (13)$$

де  $\varepsilon_{\min}^{(N)}$  – гранично досяжні відхилення результуючої температури від заданої в класі керуючих впливів з  $N$  інтервалами сталості, що складають спадний ряд нерівностей:

$$\varepsilon_{\min}^{(1)} > \varepsilon_{\min}^{(2)} > \dots > \varepsilon_{\min}^{(N)} > \varepsilon_{\min}^{(N+1)} > \dots > \varepsilon_{\min}^{(N^*)} = \varepsilon_{\inf} \geq 0, \quad (14)$$

в яких  $\varepsilon_{\inf}$  – гранично досяжна точність нагріву в класі кусково-сталих управлінь виду (10) з будь-яким числом інтервалів сталості.

Для редукції співвідношень (13) до відповідної системи рівнянь, побудованих на основі альтернансного методу, і їх подальшого розв'язку використана спеціальна обчислювальна процедура і відповідне програмне забезпечення, яке включає спеціальний чисельний алгоритм параметричної оптимізації з використанням чисельних моделей температурних полів і полів характеристик харчової цінності (санітарно-мікробіологічної безпеки). Обмін даними здійснюється через спільні для обох програм файли. Алгоритм чисельного розв'язку задачі напівнескінченної оптимізації заснований на використанні екстраполяції відхилень температури, що мінімізуються на кожній ітерації, що дозволяє скоротити число звернень до чисельної моделі. Для екстраполянта в чисельному алгоритмі використовуються псевдокубічні сплайни.

Результати розв'язку задачі оптимального управління в класі одноінтервальних управлінь для випадку  $\varepsilon_0 = \varepsilon_{\min}^{(1)}$  засвідчили, що задане допустиме за технологічними вимогами температурне відхилення  $\varepsilon_0 = 3^\circ\text{C}$  (до 10%) може бути дотримане тільки при харчовій цінності консервів (відносна біологічна цінність за лабільністю білків до ферментативного гідролізу) більшої ніж 1250с, яка в цілому вища задовільної. Це призводить до суттєвого збільшення часу нагрівання. Відхилення  $\varepsilon_{\min}^{(1)} = 6^\circ\text{C}$ , отримане при 1650с, означає нерівномірність нагріву, яка небажана за технологічними вимогами. Представляють інтерес результати розв'язування задачі оптимального управління в класі двоінтервальних управлінь (таблиця 2), що включають стадію нагріву з максимальною температурою стерилізації і подальшою стадією вирівнювання температур її центру і поверхні при

рівномірному охолодженні. Для даних задач також справедливий принцип максимуму Понтрягіна, який тут необхідно застосовувати у формі, встановленій для оптимальних процесів з обмеженими фазовими координатами.

Таблиця 2

**Розв'язки задачі управління режимів термічної стерилізації**

Температура стерилізації, °С	Час стерилізації $t$ , хв	Харчова цінність консервів (відносна біологічна цінність за лабільністю білків до ферментативного гідролізу) у с
112	106	1168
113	105	1214
114	104	1252
115	101	1321
116	96	1321
117	94	1420
118	91	1482
119	89	1544
120	86	1616
121	83	1679

Типовий алгоритм оптимального за швидкодією керування з урахуванням розглянутих технологічних обмежень приймає вигляд:

$$Tc_{opt}(\tau) = \begin{cases} Tc_{max}, \tau \in (0, \tau_{\sigma}); \\ Tc^{\sigma}(\tau) \cong a + be^{-\beta(\tau_{\sigma}-\tau)}, \tau \in (\tau_{\sigma}, \tau_T); \\ Tc^T(\tau) \cong a_1 + b_1e^{-\beta_1(\tau_T-\Delta_1^0)}, \tau \in (\tau_T, \Delta_1^0); \\ \frac{Tc_{max}}{2} [1 + (-1)^{j+1}], \tau_{j-1} < \tau < \tau_j, j = 2, 3, \dots, N. \end{cases} \quad (15)$$

де в першому наближенні управління  $Tc^{\sigma}(\tau)$  і  $Tc^T(\tau)$ , стабілізуючі відповідно харчову цінність і температуру на гранично допустимому рівні, представляються з достатньою точністю експоненціальними законами зміни в часі.

**Висновки.** На основі отриманих результатів у роботі запропонована загальна методика та обчислювальні алгоритми розв'язання задачі оптимального управління процесом нагрівання м'ясних консервів з урахуванням основних фазових обмежень на максимальну температуру і максимум допустимої втрати харчової цінності у процесі стерилізації в автоклавах неперервної дії. Розроблений чисельний метод комплексної оцінки ефективності температурно-часового режиму стерилізації показує задовільну кореляцію з відомими результатами [1-3]. В основу методу покладено розв'язок відповідної задачі оптимального управління складними системами з розподіленими параметрами, де ефективність обчислень забезпечена за рахунок застосування алгоритму чисельного рішення задачі напівнескінченної оптимізації, заснованого на використанні екстраполяції відхилень температури, що мінімізуються на кожній ітерації

### Література

1. Гембара Т. В., Федішин Я. І., Федішин Т. Я. Управління тепловою обробкою м'яса за параметрами біологічної цінності // Науковий вісник ЛДАВМ ім. С. З. Гжицького. – Львів – 2003. – Т.5, №1. – С. 149–152.
2. Бурдо О. Г., Федішин Т. Я., Гембара Т. В., Демків Т. М. Використання закону Арреніуса для теплофізичного розрахунку процесу стерилізації м'ясних консервів // Наукові праці Одеської держ. академ. харч. технол. – 2001. – Вип. 22. – С.152–159.
3. Федішин Я. І., Гембара Т. В., Федішин Т. Я. Дискретне математичне моделювання теплофізичного процесу стерилізації із застосуванням модифікованих біофізичних характеристик термостійкості та летальності // Науковий вісник ЛНУВМ та БТ ім.С.З. Гжицького – 2012. – Том 14, №2, Частина 3. – с. 276-281.
4. Бутковский А. Г. Методы управления системами с распределенными параметрами. М.: Наука, 1975.- 569 с.
5. Рапопорт Э. Я. Альтернативный метод в прикладных задачах оптимизации. – М.: Наука, 2000. – 336 с.

*Стаття надійшла до редакції 12.10.2015*