



УДК 664.02.(075.8)

## Деякі основні співвідношення алгебри асиметричних узагальнених функцій в задачах неоднорідної теплопровідності і термопружності

В.О. Волос<sup>1</sup>, Б.Р. Циж<sup>1,2</sup>, Ю.Ю. Варивода<sup>1</sup>, М.І. Чохань<sup>1</sup>, Ф.М. Гончар<sup>3</sup>  
tsizhb@ukr.net

<sup>1</sup>Львівський національний університет ветеринарної медицини та біотехнологій імені С. З. Гжицького,  
вул. Пекарська, 50, м. Львів, 79010, Україна;

<sup>2</sup>Kazimierz Wielki University in Bydgoszcz, Bydgoszcz, Poland;

<sup>3</sup>Львівський національний університет «Львівська політехніка»,  
вул. Степана Бандери, 12, Львів, 79013, Україна

Запропоновано метод представлення теплофізичних і фізико-механічних характеристик кусково-однорідних робочих вузлів машин і механізмів харчових виробництв за допомогою асиметричних узагальнених функцій. Такі вузли, що складаються з окремих частин з різними, і не постійними в межах кожної із них, фізико-механічних характеристик, можуть бути записані для кусково-однорідного тіла як єдиного цілого за допомогою асиметричних одиничних функцій та повної дельта-функції Дірака.

Показано, що застосування апарату узагальнених функцій для дослідження теплового стану неоднорідних елементів конструкції є однією із ефективних теорій розв'язку проблем термомеханіки тіл неоднорідної структури на сучасному етапі її дослідження. Ця теорія в термомеханіці тіл неоднорідної структури призвела до виникнення нового напрямку – застосування узагальнених функцій в термомеханіці тіл неоднорідної структури: багатопшарових, армованих тіл, тіл із наскрізними і ненаскрізними включеннями, покриттями, із залежними від температури теплофізичними характеристиками, із неперервною неоднорідністю, з кусково-постійними коефіцієнтами тепловіддачі, багатоступеневих пластин, оболонок, валів. В запропонованій роботі показано, що відповідні неоднорідні характеристики можуть складатися не лише із постійних різних величин, що змінюються стрибкоподібно на межах спряження, але й із різних кусків неперервних функцій, заданих в області визначення кожної компоненти неоднорідного тіла як єдиного цілого.

Для цього отримано правила диференціювання розривних функцій, а також функцій, що представляються у вигляді добутку двох розривних функцій, і правила знаходження узагальненої похідної кусково-неперервної функції.

**Ключові слова:** нестационарна теплопровідність, термопружний стан неоднорідних тіл, коефіцієнт теплового розширення, чужорідні включення, кусково-однорідні тіла, асиметричні одиничні функції, односторонні границі, узагальнена похідна, точка розриву, класична похідна.

## Некоторые основные соотношения алгебры ассимметричных обобщенных функций в задачах неоднородной теплопроводности и термоупругости

В.О. Волос<sup>1</sup>, Б.Р. Циж<sup>1,2</sup>, Ю.Ю. Варивода<sup>1</sup>, М.І. Чохань<sup>1</sup>, Ф.М. Гончар<sup>3</sup>  
tsizhb@ukr.net

<sup>1</sup>Львовский национальный университет ветеринарной медицины и биотехнологий имени С. З. Гжицкого,  
ул. Пекарская, 50, г. Львов, 79010, Украина;

<sup>2</sup>Kazimierz Wielki University in Bydgoszcz, Bydgoszcz, Poland;

### Citation:

Volos, V.O., Tsizh, B.R., Varyvoda, Yu.Yu., Chokhan, M.I., Gonchar, F.M. (2016). Some basic relations of asymmetric distributions algebra in the tasks of inhomogeneous heat conduction and thermoelasticity. *Scientific Messenger LNUVMBT named after S.Z. Gzhytskyj*, 18, 2(68), 37–40.

<sup>3</sup>Львовский национальный университет «Львовская политехника»,  
ул. Степана Бандеры, 12, Львов, 79013, Украина

*Предложен метод представления теплофизических и физико-механических характеристик кусочно-однородных рабочих узлов и механизмов пищевых производств с помощью асимметричных обобщенных функций. Такие узлы, состоящие из отдельных частей с разными, и не постоянными в пределах каждой из них, физико-механических характеристик, могут быть записаны для кусочно-однородного тела как единого целого с помощью асимметричных единичных функций и полной дельта- функции Дирака.*

*Показано, что применение аппарата обобщенных функций для исследования теплового состояния неоднородных элементов конструкции является одной из эффективных теорий решения проблем термомеханики тел неоднородной структуры на современном этапе ее исследования. Эта теория в термомеханике тел неоднородной структуры привела к возникновению нового направления – применения обобщенных функций в термомеханике тел неоднородной структуры: многослойных, армированных тел, тел со сквозными и не сквозными включениями, покрытиями, с зависимыми от температуры теплофизическими характеристиками, с непрерывной неоднородностью, с кусочно-постоянными коэффициентами теплоотдачи, многоступенчатых пластин, оболочек, валов. В предлагаемой работе показано, что соответствующие неоднородные характеристики могут состоять не только из постоянных различных изменяющихся скачкообразно на границах сопряжения, но и из разных кусков непрерывных функций, заданных в области определения каждой компоненты неоднородного тела как единого целого.*

*Для этого получены правила дифференцирования разрывных функций, а также функций, которые представляются в виде произведения двух разрывных функций, и правила нахождения обобщенной производной кусочно-непрерывной функции.*

**Ключевые слова:** нестационарная теплопроводность, термоупругое состояние неоднородных тел, коэффициент теплового расширения, инородные включения, кусочно-однородные тела, асимметричные единичные функции, односторонние пределы, обобщенная производная, точка разрыва, классическая производная.

## Some basic relations of asymmetric distributions algebra in the tasks of inhomogeneous heat conduction and thermoelasticity

V.O. Volos<sup>1</sup>, B.R. Tsizh<sup>1,2</sup>, Yu.Yu. Varyvoda<sup>1</sup>, M.I. Chokhan<sup>1</sup>, F.M. Gonchar<sup>3</sup>  
tsizhb@ukr.net

<sup>1</sup>Lviv national university of veterinary medicine and biotechnologies named after S. Gzhytskyj,  
Pekarska Str., 50, Lviv, 79010, Ukraine;

<sup>2</sup>Kazimierz Wielki University in Bydgoszcz, Bydgoszcz, Poland;

<sup>3</sup>Lviv National Polytechnic University «Lviv Polytechnic»,  
Stepan Bandera Str., 12, Lviv 79013, Ukraine;

*The method of presenting thermophysical and physical and mechanical properties of piecewise homogeneous production nodes and mechanisms of food facilities using asymmetric distributions has been suggested. These nodes, consisting of separate parts with different and nonconstant physical and mechanical characteristics within each of them, can be written for a piecewise homogeneous solid as a whole using asymmetric unit functions and full Dirac delta function.*

*It is shown that the use of the apparatus of generalized functions study for the thermal state of heterogeneous elements of the design is one of the effective solution of problems theories thermomechanics bodies heterogeneous structure at the present stage of its investigation. This theory termomehanitsi bodies heterogeneous structure led to a new direction – the use of distributions in termomehanitsi heterogeneous body structure: multilayer reinforced bodies, the bodies of the cross and not cross inclusions coated with temperature-dependent thermophysical characteristics of continuous heterogeneity, with piecewise constant coefficients of heat transfer, multi-plates, shells, walls. In the proposed paper shows that the relevant heterogeneous characteristics may consist not only of different values of constant changing abruptly at the boundaries of interface, but with different pieces of continuous functions defined in the definition of each component inhomogeneous body as a whole.*

*For this received the differentiation rules of discontinuous functions and functions that are represented as the product of two discontinuous functions and the rules of determination of the generalized derivative of piecewise continuous function have been obtained. It is shown that close task solving problem can be obtained by limiting transition in precise upshot. In particular example it was investigated limit of the admissibility of the application of the approximate upshot.*

*Some basic relations of asymmetric distributions algebra in the tasks of inhomogeneous heat conduction and thermoelasticity.*

**Keywords:** transient heat conduction, thermoelastic state of inhomogeneous solids, thermal expansion coefficient, foreign inclusions, piecewise homogeneous solids, asymmetrical unit functions, unilateral boundaries, distributional derivative, points of discontinuity, classic derivative.

### Вступ

Велика кількість елементів технологічного устаткування, оснастки і машин, що виготовляються із конструкційної сталі, і використовуються при підвищених температурах експлуатації знаходять широке застосування у багатьох галузях виробництв харчової

промисловості. В процесі виготовлення і експлуатації неоднорідні вузли таких машин зазнають миттєвих або тривалих теплових впливів. Працездатність таких неоднорідних елементів конструкцій при підвищених температурах обумовлена їх геометричною формою, фізико-механічними властивостями матеріалів та умовами експлуатації. При чому, якщо умови експлу-

атації, як правило задаються, то перші два фактори можуть варіюватися і повинні розглядатися у тісній взаємодії один з другим. Одним із визначальних критеріїв при виборі матеріалу і конструкційному виконанні неоднорідних матеріалів є їх термоміцність, під якою в даному випадку розуміють здатність неоднорідного елемента чинити опір впливом теплових навантажень не руйнуючись (Podstrigach et al., 198; Podstrigach et al., 1984; Plahotyń et al., 2016).

В роботі встановлено, що витривалість і характер руйнування твердих сплавів неоднорідних робочих вузлів визначається властивостями і особливостями структури окремих складових. Внаслідок різниці в коефіцієнтах теплового розширення матеріалів матриці і чужорідних включень, в зоні їх з'єднання виникають термічні напруження, які можуть досягати значної величини при великій різниці коефіцієнтів теплового розширення (Vladimirov, 1979; Panfylov, 1993). Оскільки міцнісні характеристики матеріалів матриці можуть бути досить низькими, то наявність неоднорідного включення може привести до руйнування з'єднання. Тому задача визначення термопружного стану в зоні з'єднання матриці і включення є дуже важливою.

### Матеріал та методи досліджень

Застосування методу представлення теплофізичних і термопружних характеристик неоднорідних елементів робочих вузлів машин і механізмів м'ясних і молочних галузей харчової промисловості вимагає теоретичного і практичного обґрунтування математичних викладок над операціями з узагальненими функціями та побудови спеціальної алгебри при отриманні основних співвідношень. Причому, перевірка, наприклад, збереження гіпотези незмінних нормалей (для випадку узагальненого плоского напруженого стану) показує що таке представлення приводить до «автоматичного» виконання умов ідеального теплового та механічного контакту на межі спряження чужорідних елементів. Встановлено достовірність отриманих результатів в основних часткових випадках: одновимірних і двовимірних задачах неоднорідної теплопровідності, які були розв'язані раніше методом «зшивання» на межі розділу окремих елементів, що в кінцевому підсумку приводить до суттєвого спрощення математичних викладок та представлення складних неоднорідних областей у вигляді єдиного цілого.

### Результати та їх обговорення

Представлення фізико-механічних характеристик неоднорідних тіл у вигляді асиметричних, симетричних, одиничних узагальнених функцій дозволяє шукати розв'язки задач неоднорідної теплопровідності і термопружності для всього неоднорідного тіла як єдиного цілого. У роботі показано, що запропонований метод є доцільним і справедливим для задач нестационарної теплопровідності і термопружності як для одно-двох так і для трьохвимірних неоднорідних структур. Причому, особливо зручним він є для запи-

су неоднорідних коефіцієнтів лінійного розширення окремих компонентів, коефіцієнтів об'ємної деформації, коефіцієнтів Ляме і Пуассона, модуля Юнга, а також змінних коефіцієнтів тепловіддачі з окремих частин неоднорідних тіл, початкових і граничних умов при відомих заданих функціях часу і розривних температурах зовнішнього середовища на окремих ділянках неоднорідного робочого вузла.

В подальшому будемо розглядати такі кусково-однорідні тіла, якими будемо моделювати неоднорідні робочі вузли механізмів і машин харчових виробництв. Припускаємо, в загальному, що ці тіла складаються із окремих частин з різними (та змінними в кожному з компонентів) фізико-механічними характеристиками. Опишемо ці характеристики для кожного конкретного випадку асиметричними одиничними функціями вигляду

$$S_{\pm}(x) = \begin{cases} 1, x > 0 \\ 0,5 \mp 0,5, x = 0 \\ 0, x < 0 \end{cases}$$

Проведемо деякі заміни, необхідні для отримання рівнянь теплопровідності тіл із включеннями [2].

Похідні розглядуваних асиметричних  $S_{\pm}(x)$  і симетричної

$$S(x) = \begin{cases} 1, x > 0 \\ 0,5, x = 0 \\ 0, x < 0 \end{cases} \text{ одиничних функцій, визначаються такими символічними рівностями}$$

$$\delta(x) = S'(x), \delta_{\pm}(x) = S'_{\pm}(x). \quad (1)$$

Нехай  $f(x)$  – така функція, що односторонні границі

$$f(x_1 \pm 0), \quad f'(x_1 \pm 0), \dots, f^{(n)}(x_1 \pm 0)$$

існують, для асиметричних  $\delta_{\pm}(x - x_1)$  і симетричної  $\delta(x - x_1)$  імпульсних функцій ті їх похідних при  $b < x_1 < d$ . При цьому будемо мати наступні співвідношення:

$$\begin{aligned} \int_b^d f(x) \delta_{\pm}(x - x_1) dx &= f(x_1 \pm 0), \\ \int_b^d f(x) \delta^{(n)}(x - x_1) dx &= (-1)^n f^{(n)}(x_1 \pm 0), \\ \int_b^d f(x) \delta_{\pm}(x - x_1) dx &= \frac{1}{2} [f(x_1 - 0) + f(x_1 + 0)], \\ \int_b^d f(x) \delta^{(n)}(x - x_1) dx &= \frac{1}{2} (-1)^n [f^{(n)}(x_1 - 0) + f^{(n)}(x_1 + 0)]. \end{aligned}$$

Звідси випливає, що:

$$\begin{aligned} f(x) \delta_{\pm}(x - x_1) &= f(x_1 \pm 0) \delta_{\pm}(x - x_1), \\ f(x) \delta(x - x_1) &= \frac{1}{2} [f(x_1 - 0) + f(x_1 + 0)] \delta(x - x_1). \end{aligned}$$

Продиференціювавши (3) по  $x$ , знаходимо:

$$f(x)\delta_{\pm}'(x-x_1) = f(x_1 \pm 0)\delta_{\pm}'(x-x_1) - f'(x_1 \pm 0)\delta_{\pm}(x-x_1),$$

$$f(x)\delta_{\pm}'(x-x_1) = \frac{1}{2}[f(x_1-0) + f(x_1+0)]\delta'(x-x_1) - \frac{1}{2}[f'(x_1-0) + f'(x_1+0)]\delta(x-x_1).$$

Покладаючи у перших співвідношеннях (3) і (4)

$f(x) = S_{\pm}(x-x_1)$ , а у других :  $f(x) = S(x-x_1)$ , приходимо до наступних співвідношень:

$$S_+(x-x_1)\delta_+(x-x_1) = \delta_+(x-x_1), \quad S_-(x-x_1)\delta_-(x-x_1) = 0,$$

$$S'_+(x-x_1)\delta'_+(x-x_1) = \delta'_+(x-x_1), \quad S_-(x-x_1)\delta'_+(x-x_1) = 0,$$

$$S_-(x-x_1)\delta(x-x_1) = \frac{1}{2}\delta(x-x_1), \quad S(x-x_1)\delta'(x-x_1) = \frac{1}{2}\delta'(x-x_1).$$

Отримані останні формули дозволяють відмітити наступний факт.

Якщо теплофізичні і термopружні характеристики кусково-однорідного тіла представляються у вигляді

$$P(x) = p_1 + \sum_{i=1}^{n-1} (p_{i+1} - p_i) S_{\pm}(x-x_i), \quad (6)$$

то будь-яка їх комбінація за допомогою тотожностей

$$\frac{1}{p(x_1)} = \frac{1}{p_1} + \sum_{i=1}^{n-1} \left( \frac{1}{p_{i+1}} - \frac{1}{p_i} \right) S_{\pm}(x-x_i). \quad (7)$$

$$\prod_i S_{\pm}(x-x_i) = S_{\pm}(x - \max_i x_i) \quad (8)$$

також представляється у такому ж вигляді.

Аналогічно до вище приведених співвідношень може бути представлена будь-яка кусково-неперервна функція однієї змінної  $f(x)$  [3]:

$$f(x) = f_1(x) + \sum_{i=1}^{n-1} (f_{|x=x_i}^+ - f_{|x=x_i}^-) S_{\pm}(x-x_i), \quad (9)$$

де  $f_i(x)$  – неперервна функція, що задана на проміжку  $x_i < x < x_{i+1}$ ,

$x = x_i$  – точка розриву функції на цьому проміжку,  $f$  – число розривів.

Узагальнена похідна цієї функції обчислюється за формулою

$$f'(x) = \{f\}' + \sum_{i=1}^{n-1} (f_{|x=x_i}^+ - f_{|x=x_i}^-) S_{\pm}(x-x_i), \quad (10)$$

де  $\{f\}'$  – класична похідна функції  $f$ ,

$f_{|x=x_i}^+ - f_{|x=x_i}^-$  – стрибок функції  $f$  в точці  $x = x_i$ ,

а  $f_{|x=x_i}^+, f_{|x=x_i}^-$  – відповідно границі функції  $f$  при прямуванні  $x \rightarrow x_i$  справа і зліва до точки розриву  $x = x_i$ .

Враховуючи, що:

$$\{f\}' = f'_1 + \sum_{i=1}^{n-1} (f'_{i+1} - f'_i) S_{\pm}(x-x_i),$$

$$\text{маємо } f' = f'_1 + \sum_{i=1}^{n-1} [(f'_{i+1} - f'_i) S_{\pm}(x-x_i) + (f_{i+1} - f_i) S_{\pm}(x-x_i)]. \quad (11)$$

Цікаво, що із отриманих співвідношень (9) (11) випливає, що при знаходженні узагальненої похідної кусково-неперервної функції (9) співвідношення (10) може не використовувати, а просто диференціювати (9), однак при цьому обов'язково врахувати, що

$$\dot{S}_{\pm}(x-x_i) = \delta_{\pm}(x-x_i).$$

Із формули (10) також можна зробити ще один дуже важливий висновок: при диференціюванні розривної функції, яка представляється у вигляді добутку двох розривних функцій  $u(x)$  і  $v(x)$  справедливе наступне співвідношення :

$$(uv)' = \{uv\}' + \sum_i [(uv)^+_{|x=x_i} - (uv)^-_{|x=x_i}] \delta_{\pm}(x-x_i). \quad (12)$$

Тут  $x = x_i$  – точки розриву добутку, а сам вираз для  $\delta_{\pm}(x-x_i)$  береться в залежності від того, якою саме асиметричною функцією зображуються функції  $u(x)$  та  $v(x)$ .

## Висновки

Використання отриманих співвідношень узагальнених ступеневих та імпульсних одиничних функцій дає можливість враховувати вплив цілого комплексу теплофізичних, фізико-механічних і термopружних характеристик на вивчення і дослідження термopружного стану неоднорідних вузлів конструкцій харчових виробництв під час їх експлуатації в робочих умовах та при різних змінах температури робочого середовища. Крім цього, застосування апарату узагальнених функцій приводить до розділення взаємозв'язаних систем диференціальних рівнянь термopружності в переміщеннях і компонентах тензора напружень для більшості часткових випадків, наприклад, випадки тонких чужорідних включень, або випадки зосереджених зовнішніх теплових або механічних впливів. Коефіцієнти при імпульсних функціях знаходяться в подальшому із систем лінійних алгебраїчних рівнянь, що значно спрощує і полегшує отримання розв'язків задач без застосування складних інтегральних перетворень змінних.

**Бібліографічні посилання**

- Podstrigach, Ja.S., Lomakin, V.A., Koljanno, Ju.M. (1984). Termouprugost' tel neodnorodnoj struktury (in Russian).
- Podstrigach, Ja.S., Koljano, Ju.M., Semerak, M.M. (1981). Temperaturnye polja i naprjazhenija v jelementah jelektrovakuumnyh priborov. Kiev: Nauk, dumka (in Russian).
- Vladimirov, V.S. (1979). Obobshhenye funkcii v matematicheskoj fizike. M.: Nauka (in Russian).
- Panfylov, V.A. (1993). Tehnologicheskie linii pishhevyh processov/ Teorija tehnologicheskogo procesa Agropromizdat (in Russian).
- Plahotyn, V.Ja., Tjurykova, I.S., Homych, T.P. (2016). Teoretychni osnovy tehnologii' harchovyh vyrobnyctv. Kyi'v (in Ukrainian).

*Стаття надійшла до редакції 20.09.2016*