

## АПРОКСИМАЦІЯ МЕХАНІЧНОЇ ХАРАКТЕРИСТИКИ АСИНХРОННОГО ДВИГУНА ІЗ КОРОКТОЗАМКНЕНИМ РОТОРОМ

**В.С. Ловейкін, доктор технічних наук**  
**Ю.О. Ромасевич, кандидат технічних наук**

*В статті приведено метод побудови механічної характеристики асинхронного двигуна із короткозамкненим ротором. Метод реалізовано шляхом апроксимації характерних точок, через які повинна проходити механічна характеристика за допомогою поліноміального сплайна достатньо високого степеня.*

**Асинхронний електропривод, механічна характеристика, поліноміальна апроксимація.**

**Постановка проблеми.** Найпоширенішим двигуном, який використовується у сучасному виробництві є асинхронний із короткозамкненим ротором. Це зумовлено рядом переваг цього двигуна над іншими: надійністю, простотою виготовлення, незначною складністю монтажних та налагоджувальних робіт, невибагливістю до змінних показників джерела живлення тощо.

Величезна кількість різноманітних динамічних систем включають асинхронний двигун із короткозамкненим ротором (АДКЗ), який виступає у ролі збурюючого джерела, підводячи до динамічної системи механічну енергію. Для опису роботи (руху) тієї чи іншої динамічної системи необхідно мати адекватну механічну характеристику (МХ) АДКЗ, яка характеризує зміну крутного моменту двигуна від його кутової швидкості. Загальноприйнято для опису МХ АДКЗ використовувати рівняння Клосса [1]. Однак можна показати, що вказане рівняння не відображає важливі характеристики реальної МХ. Проілюструємо дане твердження (рис. 1). На рис. 1. показана характеристика АДКЗ АИР250М2 побудована із використанням рівняння Клосса:

$$M = \frac{2M_{\max}(1 + s_{кр})}{\frac{s}{s_{кр}} + \frac{s_{кр}}{s} + 2s_{кр}}, \quad (1)$$

де  $M_{\max}$  – максимальний момент АДКЗ;  $s_{кр}$  – критичне ковзання двигуна, яке відповідає максимальному моменту

$$s_{sp} = \frac{s_{ном} \left[ \frac{M_{max}}{M_{ном}} + \sqrt{\left( \frac{M_{max}}{M_{ном}} \right)^2 + 2s_{ном} \left( \frac{M_{max}}{M_{ном}} - 1 \right) - 1} \right]}{1 - 2s_{sp} \left( \frac{M_{max}}{M_{ном}} \right)}$$
;  $s$  – поточне ковзання

$$\text{АДКЗ} \left( s = \frac{\omega_0 - \omega}{\omega_0} \right).$$

Точками на рис. 1. показані моменти, які відповідають довідниковим даним [2] цього двигуна.

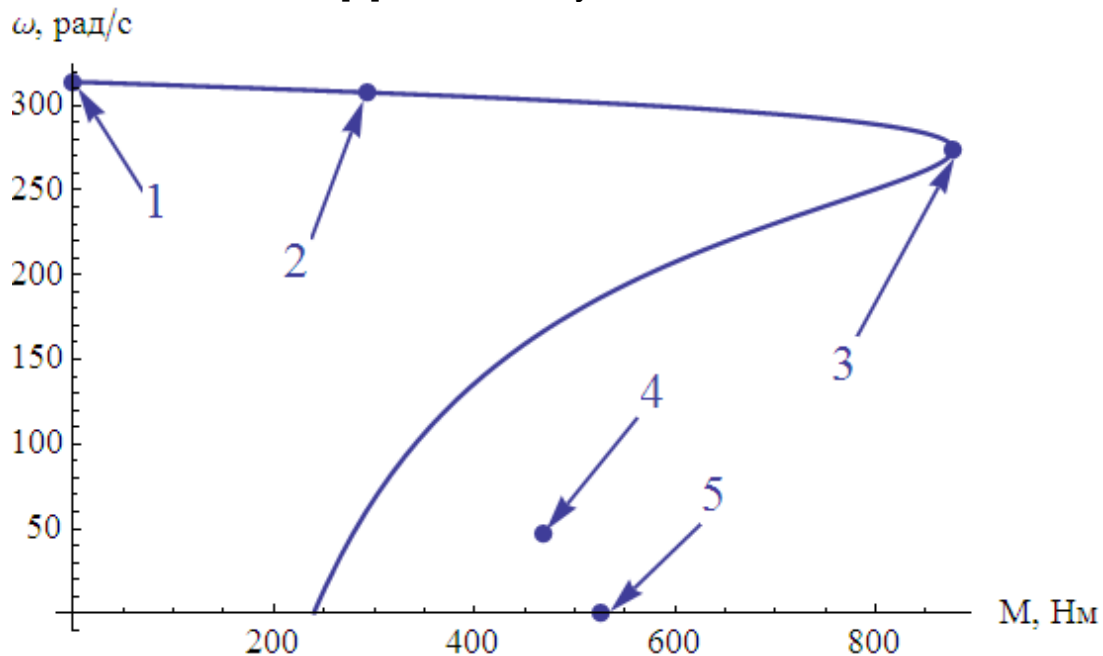


Рис. 1. МХ АДКЗ побудована за рівнянням (1) та довідникові значення моментів двигуна, що відповідають довідковим даним: 1 – момент ідеального холостого ходу; 2 – номінальний момент; 3 – максимальний момент; 4 – мінімальний момент; 5 – пусковий момент.

Із рис. 1 видно, що графік побудований за рівнянням Клосса добре апроксимує реальну МХ АДКЗ лише у області невеликих ковзань (робоча ділянка МХ АДКЗ). Однак, при дослідженні динаміки руху динамічних систем у багатьох випадках цікавляться саме перехідними режимами роботи (ділянка МХ від пускового до максимального моменту). Тут рівняння Клосса дає значну похибку і його використання є недоцільним.

Отже, актуальною є задача отримання рівняння, яке б достатньо точно відображало характер зміни моменту АДКЗ на всьому проміжку зміни кутової швидкості. Це дозволить більш точно оцінювати динамічні процеси, які відбуваються у технічних системах, обладнаних асинхронним електроприводом.

**Аналіз останніх досліджень.** Опис асинхронної машини, як електромеханічної системи досить повно викладений у різноманітних джерелах [3-5]. Однак, за дужками, як правило, залишається питання появи мінімального моменту (провалу у МХ) АДКЗ, яке пов'язує із дією вищих додаткових асинхронних електромагнітних моментів у двигуні. Методи розрахунку таких додаткових моментів досить складні та різноманітні, тому обмежуються лише якісною природою їх виникнення [6].

**Метою досліджень** є синтез аналітичного виразу, за яким із достатнім ступенем точності можна було б побудувати МХ АДКЗ. Для досягнення поставленої мети необхідно розв'язати такі завдання: 1) оцінити похибку від використання рівняння Клосса для режиму пуску динамічної системи; 2) виконати синтез апроксимаційної функції для МХ АДКЗ за допомогою полінома; 3) виконати синтез апроксимаційної функції для МХ АДКЗ за допомогою сплайнової функції.

**Результати досліджень.** З'ясуємо, яким чином можна синтезувати аналітичний вираз, який би враховував реальні значення пускового та мінімального моментів. Це можна зробити за допомогою поліноміальної апроксимації [7]. Задамо вираз, який описує МХ АДКЗ у вигляді полінома:

$$M = \sum_{i=1}^n A_i \omega^i, \quad (2)$$

де  $A_i$  – невідомі коефіцієнти, які необхідно певним чином підібрати;  $n$  – порядок полінома. Знайдемо мінімальне значення степеня полінома  $n$ . Для цього запишемо які значення повинен приймати даний поліном у вузлах апроксимації (координати вузлів апроксимації у даному випадку відповідають довідковим даним двигуна):

$$\left\{ \begin{array}{l} M(0) = M_n; \\ M(\omega_{\min}) = M_{\min}; \\ \dot{M}(\omega_{\min}) = 0; \\ M(\omega_{\max}) = M_{\max}; \\ \dot{M}(\omega_{\max}) = 0; \\ M(\omega_{\text{ном}}) = M_{\text{ном}}; \\ M(\omega_0) = 0, \end{array} \right. \quad (3)$$

де  $M_n$ ,  $M_{\min}$ ,  $M_{\max}$ ,  $M_{\text{ном}}$  – пусковий, мінімальний, максимальний та номінальний моменти двигуна відповідно;  $\omega_{\min}$ ,  $\omega_{\max}$ ,  $\omega_{\text{ін}}$  – кутові швидкості, які відповідають мініимальному, максимальному,

номінальному моментам;  $\omega_0$  – швидкість ідеального холостого ходу; крапка над символом означає диференціювання за часом.

Поліном (2) повинен задовольняти системі (3). Отже, в даному випадку  $n=7$ . Знайшовши першу похідну виразу (2) та підставивши отримане у систему (3) сформуємо систему із семи рівнянь, які дають змогу знайти невідомі коефіцієнти  $A_i$ . Ці коефіцієнти є функціями відповідних значень швидкостей та моментів:

$$A_i = f(M_n, M_{\max}, M_{\min}, M_{\text{ном}}, \omega_{\max}, \omega_{\min}, \omega_{\text{ном}}, \omega_0). \quad (4)$$

Приведемо графіки, які відповідають апроксимованій МХ АДКЗ та побудовані із використанням рівняння Клосса (рис. 2). Точками на рис. 2. позначені дійсні (довідникові) дані для двигуна. Як видно із рис. 2 поліноміальна апроксимаційна функція краще описує реальну МХ АДКЗ аніж рівняння Клосса. Оцінкою покращення опису МХ АДКЗ за допомогою функції поліноміальної апроксимації є інтеграл:

$$\Delta P = \int_0^{\omega_{\text{ном}}} \left[ \sum_{i=1}^n A_i \omega^i - \frac{2M_{\max}(1+s_{\text{сп}})}{\frac{s}{s_{\text{сп}}} + \frac{s_{\text{сп}}}{s} + 2s_{\text{сп}}} \right] d\omega, \quad (5)$$

де  $\Delta P$  – похибка підведеної до динамічної системи потужності протягом розгону системи.

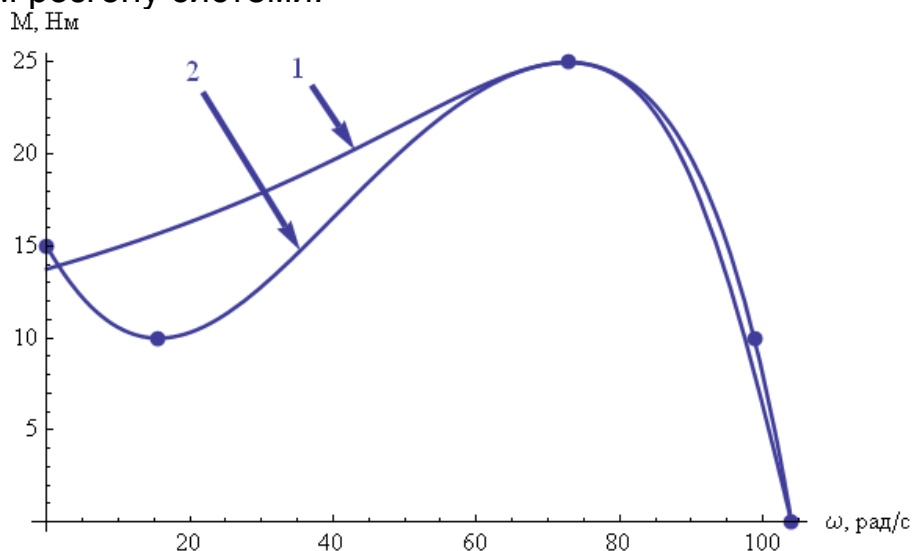


Рис. 2. Порівняння МХ побудованих за різними залежностями: 1 – за рівнянням Клосса; 2 – за допомогою поліноміальної апроксимації.

Геометрична сутність даного інтегралу показує суму площ фігур, які утворюються при відніманні площ фігур під кривими (1) та (2). З'ясуємо фізичну сутність даного інтегралу. Очевидно, що один цей вимір інтеграла (5) є Ватт. Отже, можна припустити, що даний

інтеграл характеризує похибку  $\Delta P$  у розрахунку потужності підведеної до динамічної системи протягом її розгону при використанні рівняння Клосса та рівняння (2). Як видно із рис. 2 ця похибка є значною. Однак, необхідно зазначити, що отриманий результат не завжди адекватно описує МХ АДКЗ. Причиною є те, що поліном (2) може мати декілька екстремумів – як правило більше ніж два, що вимагається за умовами (3). На рис. 3. показано, як поліноміальна функція, проходячи через вузли апроксимації, незадовільно описує МХ АДКЗ.

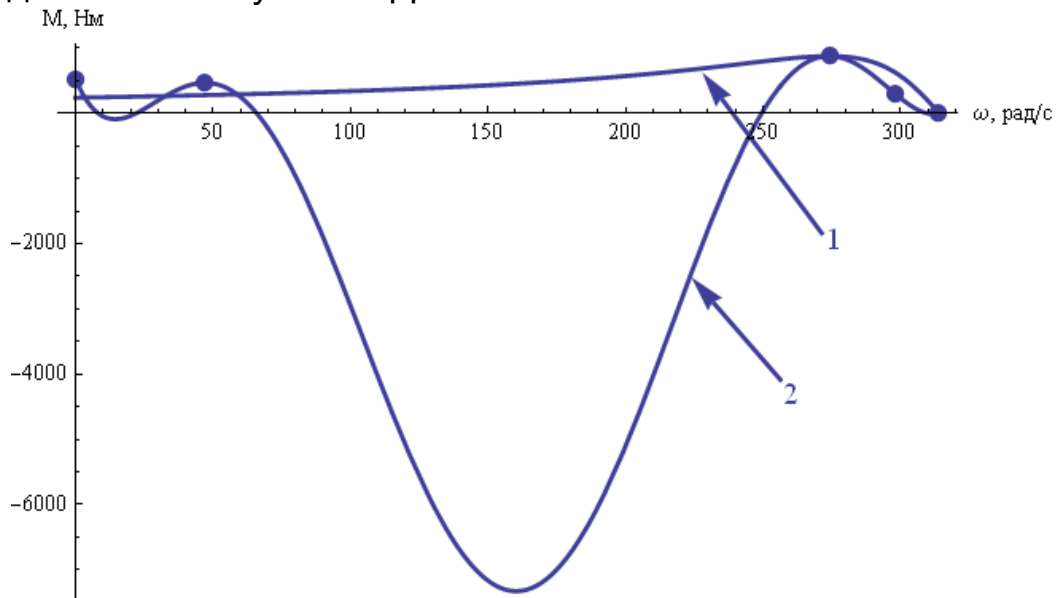


Рис. 3. Порівняння МХ побудованих за різними залежностями: 1 – за рівнянням Клосса; 2 – за допомогою поліноміальної апроксимації.

Очевидно, що для усунення цього недоліку необхідно розширити клас функцій, в яких шукається наближення до реальної функції МХ АДКЗ. Будемо шукати таке наближення у класі кусочно-гладких функцій, причому гладкість функцій на окремих проміжках може бути різною. Така апроксимація отримала назву сплайнової [8]. Звернемось до рис. 4 на якому показана функція, що задовольняє умови (3). Із рис. 4 видно, що сплайнова функція повинна складатись із чотирьох відрізків. З'ясуємо порядок поліноміальної функції – куска сплайна для кожного відрізка.

Для першого відрізка  $[0, \omega_{\min}]$  вимагається проходження функції через дві точки і рівність нулю першої похідної функції у кінці відрізка  $[0, \omega_{\min}]$ . Отже мінімальна степінь полінома для даного проміжку рівна двом. Для другого відрізка  $[\omega_{\min}, \omega_{\max}]$  вимагається проходження функції через дві точки і рівність нулю перших похідних на кінцях даного відрізка. Мінімальна степінь полінома для даного проміжку рівна трьом.

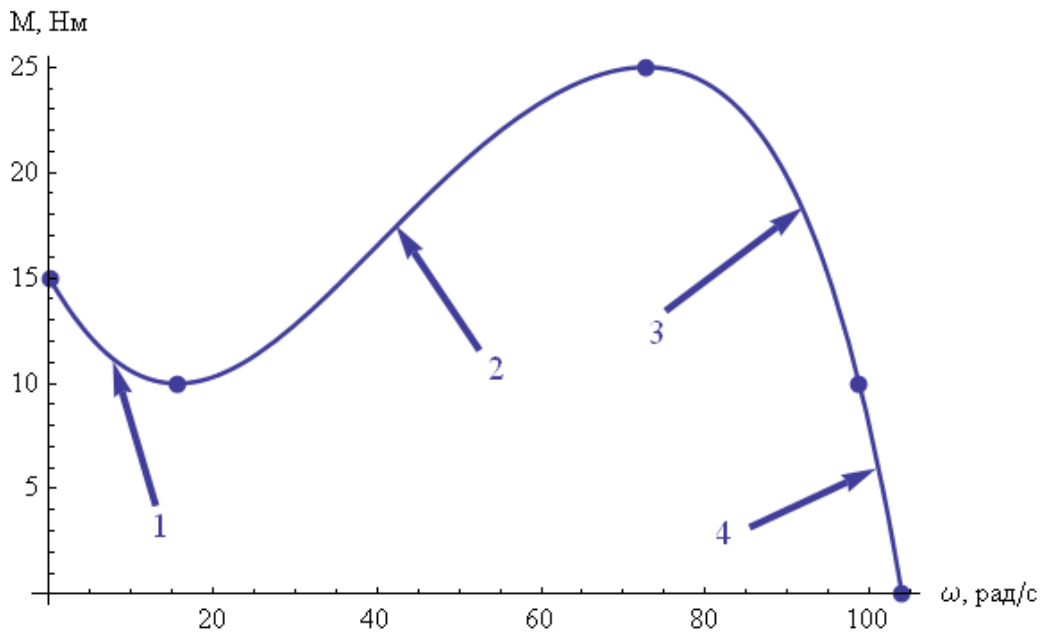


Рис. 4. Графік функції, яка задовольняє умови (3).

Для третього відрізка  $[\omega_{\max}, \omega_{\text{ном}}]$  вимагається проходження функції через дві точки і рівність нулю першої похідної на початку відрізка. Мінімальна степінь полінома для даного проміжку рівна двом.

Для четвертого відрізка  $[\omega_{\text{ном}}, \omega_0]$  вимагається проходження функції через дві точки. Отже мінімальна степінь полінома для даного проміжку рівна одному.

Прийmemo для подальшого розгляду поліноми із мінімальними степенями, оскільки це спростить розрахунки та дозволить уникнути недоліку неперервної на всьому проміжку  $[0, \omega_0]$  поліноміальної апроксимаційної функції пов'язаним із виникненням невідповідних реальній МХ АДКЗ екстремумів.

Запишемо у загальному вигляді вираз для сплайн-функції, що апроксимує МХ АДКЗ:

$$M = \begin{cases} \sum_{j=0}^2 B_j \omega^j & \text{при } \omega \in [0, \omega_{\min}]; \\ \sum_{j=0}^3 C_j \omega^j & \text{при } \omega \in [\omega_{\min}, \omega_{\max}]; \\ \sum_{j=0}^2 D_j \omega^j & \text{при } \omega \in [\omega_{\max}, \omega_{\text{ном}}]; \\ \sum_{j=0}^1 E_j \omega^j & \text{при } \omega \in [\omega_{\text{ном}}, \omega_0], \end{cases} \quad (6)$$

де  $B_j, C_j, D_j, E_j$  – невідомі коефіцієнти. Ці коефіцієнти знаходяться шляхом розв'язання системи рівнянь для кожного куска сплайн-функції. Опишемо процес знаходження функції для першого куска

$\sum_{j=0}^2 B_j \omega^j$ . Для цього знайдемо її першу похідну за часом:

$$\frac{d \sum_{j=0}^2 B_j \omega^j}{dt} = B_1 + 2B_2 \omega. \quad (7)$$

Використовуючи перші три умови із системи (3), запишемо систему рівнянь для знаходження невідомих коефіцієнтів:

$$\begin{cases} B_0 = M_n; \\ B_0 + B_1 \omega_{\min} + B_2 \omega_{\min}^2 = M_{\min}; \\ B_1 + 2B_2 \omega_{\min} = 0. \end{cases} \quad (8)$$

Розв'язуючи отриману систему рівнянь будемо мати:

$$\begin{cases} B_1 = \frac{2(M_{\min} - M_n)}{\omega_{\min}}; \\ B_2 = \frac{M_n - M_{\min}}{\omega_{\min}^2}. \end{cases} \quad (9)$$

Аналогічно можна знайти вирази для інших невідомих коефіцієнтів. У результаті проведених розрахунків отримаємо сплайн-функцію, яка описує МХ АДКЗ (рис. 5,а).

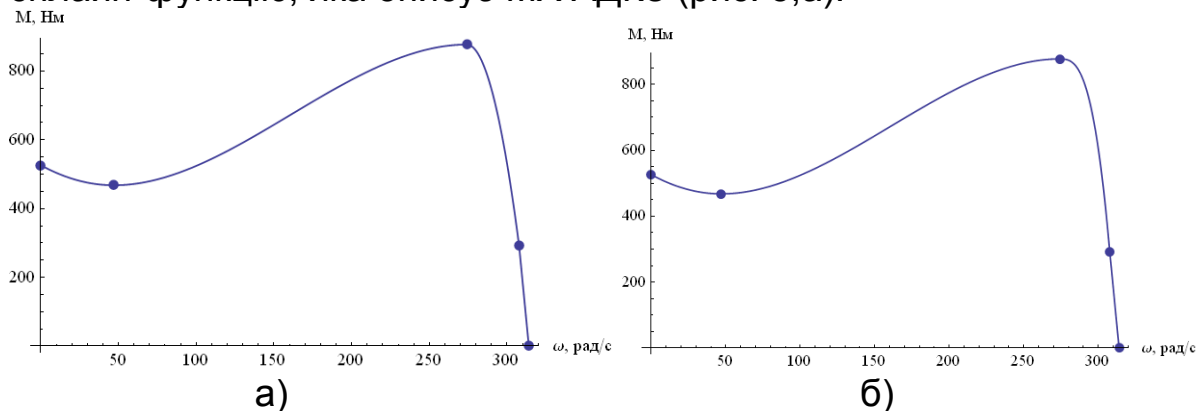


Рис. 5. Графіки сплайн-функцій, які апроксимують МХ АДКЗ.

Зазначимо, що у точках сполучення друга похідна кусків функцій може терпіти розриви першого роду. Це впливає на плавність сполучення кусків функції.

Для того, щоб уникнути цієї проблеми достатньо збільшити степені деяких поліномів та провести повторний розрахунок.

На рис. 5,б показано сплайн-функцію, яка у точці сполучення другого та третього куску не має розриву другої похідної.

Для отримання цього результату досить було збільшити порядок поліному третього куску на одиницю та розв'язати сформовану систему рівнянь. Додамо, що кількість рівнянь збільшується також на одиницю – дається рівняння:

$$\left. \frac{d^2 \sum_{j=0}^3 C_j \omega^j}{dt^2} \right|_{\omega=\omega_{\max}} - \left. \frac{d^2 \sum_{j=0}^3 D_j \omega^j}{dt^2} \right|_{\omega=\omega_{\max}} = 0. \quad (10)$$

Перевагою даного методу апроксимації (моделювання) МХ АДКЗ є те, що він дозволяє збільшувати точність моделі за рахунок збільшення вихідних даних, за якими вона будується, тобто вузлів апроксимації.

Узагальнимо отримані результати на випадки роботи АДКЗ у режимі генератора (рекуперативне гальмування). Для цього необхідно знати довідкові дані для крутних моментів та відповідних їм кутових швидкостей двигуна. Надалі сплайн-функцію необхідно доповнити іншими елементами (поліномами) та провести розрахунок коефіцієнтів цих поліномів, аналогічний тому який проведено у даному дослідженні.

Перевагою даного методу апроксимації (моделювання) МХ АДКЗ є те, що він дозволяє збільшувати точність моделі за рахунок збільшення вихідних даних, за якими вона будується, тобто вузлів апроксимації. Збільшення точності апроксимації МХ АДКЗ дозволяє отримати більш точну картину динамічних процесів, які протікають у системі при її розгоні на природній МХ двигуна.

**Висновок.** Приведені дослідження дають змогу більш точно моделювати МХ АДКЗ за допомогою поліноміальної та сплайнової апроксимації за характерними довідниковими даними для того чи іншого двигуна. Оскільки динамічні процеси різноманітних механічних систем вимагають якомога точнішого моделювання зовнішнього збурення у системі, то використання вказаних методів дозволяє проводити динамічний аналіз руху системи із врахуванням значень пускового та мінімального моментів АДКЗ.

### Список літератури

1. Чиликин М.Г. Общий курс электропривода : учебник [для студ. вузов] / М.Г. Чиликин, А.С. Сандлер. – [6-е изд., доп. и перераб.]. – М.: Энергоиздат, 1981. – 576 с.
2. Олійник В.С. Довідник сільського електрика / Олійник В.С., Гайдук В.М., Гончар В.Ф. – 3-е видання, переробл і доповн. – К.: Урожай, 1989. – 264 с.
3. Вешеневский С.Н. Характеристики двигателей в электроприводе / С.Н. Вешеневский. – М.: Энергия, 1977. – 432 с.
4. Фираго Б.И. Теория электропривода : учеб. пособие / Б.И. Фираго, Л.Б. Павлячик. – Мн.: ЗАО „Техноперспектива“, 2004. – 527 с.
5. Ключев В.И. Теория электропривода : учебник для вузов / В.И. Ключев. – 2-е изд. перераб. и доп. – М.: Энергоатомиздат, 2001. – 704 с.
6. Иванов-Смоленский А.В. Электрические машины : учебник для вузов ; в двух томах / А.В. Иванов-Смоленский. – 3-е изд., стереот. – М.: Издательский дом МЭИ, 2006. – Т. 1. – 652 с.
7. Дзядык В.К. Введение в теорию равномерного приближения функций полиномами / В.К. Дзядык. – М.: Наука, 1977. – 512 с.
6. Корнейчук Н.П. Сплайны в теории приближения / Н.П. Корнейчук. – М.: Наука, 1984. – 352 с.



*В статье приведен метод построения механической характеристики асинхронного двигателя с короткозамкнутым ротором. Метод реализован путем аппроксимации характерных точек, через которые должна проходить механическая характеристика с помощью полиномиального сплайна достаточно высокого степени.*

**Асинхронный электропривод, механическая характеристика, полиномиальная аппроксимация.**

*In paper the method of construction of mechanical characteristic of squirrel-cage motor is resulted. The method is realized by approximation of characteristic points through which there should take place the mechanical characteristic by means of polynomial-spline enough high degrees.*

**Squirrel-cage motor, mechanical characteristic, polynomial approximation.**

УДК 631.35: 633.63

## **ЛАБОРАТОРНІ ЕКСПЕРИМЕНТАЛЬНІ ДОСЛІДЖЕННЯ КОПІРНО-РОТОРНОГО ВІДОКРЕМЛЮВАЧА ГИЧКИ ЦУКРОВИХ БУРЯКІВ**

**В.М. Булгаков, доктор технічних наук, академік НААН України  
А.М. Борис, аспірант\***

*Розроблено новий копірно-роторний гичковідокремлювальний апарат, експериментальну установку та методику дослідження в лабораторних умовах процесу відокремлення гички цукрових буряків. В результаті проведених досліджень отримано залежності показників якості процесу від поступальної швидкості, висоти виступання головок коренеплодів та відхилення від умовної осьової лінії рядка. Визначені раціональні значення основних конструктивно-технологічних параметрів відокремлювача гички.*

**Коренеплід, головка коренеплоду, гичка, копірно-роторний відокремлювач гички, лабораторна установка.**

**Постановка проблеми.** Донедавна цукрова промисловість України була важливою стратегічною галуззю і займала провідне місце в економіці країни. Це зумовлено тим, що основний продукт

\*Науковий керівник – доктор технічних наук В.М. Булгаков

© В.М. Булгаков, А.М. Борис, 2012