

5. Шалугін В.С. Процеси та апарати промислових технологій : навчальний посібник / В.С. Шалугін, В.М. Шмандій ; М-во освіти і науки України, Кременчуцький державний політехнічний університет імені Михайла Остроградського. – К.: Центр учбової літератури, 2008. – С. 59–77.

Разработана кинетическая модель процесса отстаивания отжатой подсолнечной масляной массы.

Отстаивание, кинетика, седиментация, масло, осадок.

The kinetic model of process of defending of the wrung out sunflower oily mass is developed.

Defending, kinetics, sedimentation, butter, sediment.

УДК 621.873

ОПТИМІЗАЦІЯ РЕЖИМУ РОЗГОНУ ОДНОМАСОВОЇ ДИНАМІЧНОЇ СИСТЕМИ ІЗ ВРАХУВАННЯМ СИЛ ОПОРУ

***В.С. Ловеїкін, доктор технічних наук
Ю.О. Ромасевич, кандидат технічних наук***

Приведено розв'язання оптимізаційної задачі керування рухом динамічної системи. Критеріями оптимізації виступають інтегральні функціонали з підінтегральними виразами „енергій” прискорень та ривків системи із врахуванням сили опору. Розв'язання оптимізаційних задачі виконується методом варіаційного числення. Рівняння Ейлера-Пуассона розв'язується при симетричних та несиметричних крайових умовах.

Оптимізація перехідних режимів, одномасова динамічна модель, сила опору.

Постановка проблеми. До сучасних механізмів і машин пред'являються високі вимоги щодо продуктивності, економічності, енергоефективності, надійності тощо. Для забезпечення цих вимог необхідно певним чином обирати режими їх руху. Одним із способів виконати такий вибір є синтез потрібного режиму руху із забезпеченням різноманітних додаткових умов, наприклад: необхідно обрати режим руху механізму при забезпеченні мінімуму середнього значення квадрату прискорення деякої ланки механізму. Це дозволяє експлуатувати механізм при якнайменших динамічних навантаженнях, які виникають у елементах машини. Зменшення

© В.С. Ловеїкін, Ю.О. Ромасевич, 2012

динамічних навантажень сприяє подовженню терміну служби механізму та зменшенню енергетичних втрат у приводному механізмі. Крім того, необхідно також враховувати зовнішні збурення, які діють із боку середовища, у якому експлуатується механізм. Ці збурення (сили опору технологічного характеру) викликають відхилення реального руху механізму від оптимального. Тому вони повинні бути враховані вже на етапі вибору оптимізаційного критерію.

Аналіз останніх досліджень. Оптимізація режимів руху динамічних систем може виконуватись одним із методів: варіаційного числення [1], принципу максимуму Л.С. Понтрягіна [2], динамічного програмування [3]. Варіаційне числення використовується у тих випадках коли на процес керування динамічною системою не накладено обмежень. Принцип максимуму та динамічне програмування – це відносно „молоді” методи синтезу оптимального керування. Їх зародження припадає на кінець 50-х – початок 60-х років минулого сторіччя. Принцип максимуму дозволяє врахувати обмеження, накладені на керуючу функцію, однак при цьому невідомими залишаються моменти перемикання керування. Динамічне програмування пов’язане із ім’ям американського математика Р. Беллмана. Процес розв’язку оптимізаційної задачі за допомогою даного методу носить ітераційний характер. При збільшенні кількості ітерацій до нескінченності необхідна умова мінімуму оптимізаційного критерію представляється у вигляді нелінійного диференціального рівняння у частинних похідних.

Поряд із вказаними методами є іще один клас методів, які дозволяють знаходити наближено-оптимальне керування [4-8]. Ці методи досить різноманітні і використовуються для різних типів оптимізаційних задач.

Метою досліджень є оптимізація режиму розгону одномасової динамічної системи із врахуванням сили опору. Для досягнення поставленої мети ставляться такі задачі:

- 1) провести аналіз режиму розгону динамічної одномасової системи та змоделювати силу опору, яка діє на неї;
- 2) формалізувати оптимізаційну задачу та знайти необхідні умови досягнення мінімумів критеріїв оптимізації;
- 3) розв’язати рівняння Ейлера-Пуассона при різних крайових умовах (несиметричні та симетричні);
- 4) проаналізувати оптиматі результати.

Результати досліджень. Рух одномасової динамічної системи представляється диференціальним рівнянням другого порядку:

$$m\ddot{x} = F - W, \quad (1)$$

де x – узагальнена координата (лінійне переміщення машини); m – зведена до поступального руху маса машини та її приводного механізму; F – зведена до поступального руху сила приводного механізму; W – сила опору переміщення механізму у тому числі технологічного характеру.

Оптимізацію режиму розгону динамічної системи (1) виконаємо за критерієм мінімуму інтегрального функціоналу [9]:

$$I_V = \int_0^{t_1} \frac{1}{2} V dt = \int_0^{t_1} \frac{1}{2} m (\ddot{x} + \ddot{x}^*)^2 dt \rightarrow \min, \quad (2)$$

де V – повна „енергія” прискорень динамічної системи; t_1 – тривалість розгону механічної системи; \ddot{x}^* – уявна складова повного прискорення, яка стиснена силами опору:

$$\ddot{x}^* = \frac{F_0}{m}, \quad (3)$$

де F_0 – сила опору, що виникає в результаті руху тіла. Точка над символом означає диференціювання за часом.

Якщо прийняти, що сила опору залежить від відносної швидкості руху системи і при збільшенні швидкості ця сила зменшується пропорційно швидкості, то можна оптимізувати залежність:

$$F_0 = a - c\dot{x}, \quad (4)$$

де a – величина сили опору в момент зрушення тіла з місця; c – коефіцієнт пропорційності. Тоді:

$$\ddot{x}^* = \frac{a - c\dot{x}}{m}. \quad (5)$$

Також можемо записати:

$$V = \frac{1}{2} m \left(\ddot{x} + \frac{a - c\dot{x}}{m} \right)^2. \quad (6)$$

Запишемо необхідну умову мінімуму критерію за виразом (2) із врахуванням формули (6) – рівняння Ейлера-Пуассона [10]:

$$x - k\ddot{x} = 0, \quad (7)$$

де k – деякий коефіцієнт ($k = \sqrt{\frac{c}{m}}$). Для знаходження оптимального закону руху використаємо крайові умови:

$$\begin{cases} x(0) = \dot{x}(0) = 0; \\ \dot{x}(t_1) = v; \quad \ddot{x}(t_1) = 0, \end{cases} \quad (8)$$

де v – швидкість усталеного руху системи.

Запишемо розв'язок крайової задачі (7), (8):

$$x = - \frac{v Csch\left(\frac{kt_1}{2}\right)^2 (-kt \text{Cosh}(kt_1) + \text{Sinh}(k(t-t_1)) + \text{Sinh}(kt_1))}{2k}. \quad (9)$$

Розв'яжемо рівняння (7) при таких крайових умовах:

$$\begin{cases} x(0) = \dot{x}(0) = 0; \quad \ddot{x}(0) = 0; \\ \dot{x}(t_1) = v. \end{cases} \quad (10)$$

Різниця у крайових умовах (8) та (10) полягає у тому, що кінцеву умову $\ddot{x}(t_1) = 0$ із системи (8) замінено на початкову умову $\ddot{x}(0) = 0$ із системи (10). Запишемо розв'язок крайової задачі (7), (10):

$$x = \frac{v(\text{Sinh}(kt) - kt)}{k(\text{Cosh}(kt_1) - 1)}. \quad (11)$$

Для розв'язування рівняння (7) можна використати інші крайові умови – симетричні:

$$\begin{cases} x(0) = \dot{x}(0) = 0; \\ x(t_1) = s; \quad \dot{x}(t_1) = v, \end{cases} \quad (12)$$

де s – переміщення системи у кінці розгону.

У результаті розв'язку крайової задачі (7), (12) отримаємо екстремаль:

$$\begin{aligned} x = & \left[e^{-kt} (e^{2kt_1} (ks - v) + e^{k(t+2t_1)} (kt_1 - 1)(ks - v) + e^{2kt_1} (ks + v) - \right. \\ & e^{kt} (kt_1 + 1)(ks + v) + 2e^{k(t+t_1)} k(s + (t - t_1)v + e^{kt_1} (-ks + v + kt_1v) - \\ & \left. - e^{k(t+2t_1)} (v + k(s - t_1v))) \right] \left[(e^{kt_1} - 1)k(2 + kt_1 + e^{kt_1} (kt_1 - 2)) \right]^{-1}. \end{aligned} \quad (13)$$

Знаючи екстремаль функціонала, не важко знайти його кінцевий вираз. Для цього необхідно знайти першу та другу похідні із виразу (13) за часом та підставити знайдені вирази у підінтегральну функцію критерію (2). Надалі візьмемо інтеграл (2). Вираз інтегралу є досить громіздким, тому не будемо приводити його. Зазначимо, що інтеграл є функцією невідомого параметру s , який можна підібрати таким чином, щоб мінімізувати критерій (2). Для мінімізації функціоналу (2) за параметром s необхідно розв'язати таке рівняння:

$$\frac{\partial I_V}{\partial s} = 0. \quad (14)$$

Запишемо розв'язок цього рівняння:

$$s = \frac{act_1 + m(cv - 2a)tgh\left(\frac{ct_1}{2m}\right)}{c^2}. \quad (15)$$

Підставляючи знайдений розв'язок (15) у вираз (13), знайдемо вираз екстремалі функціонала (2).

Таким чином, знайдено три екстремалі (9), (11), (13) при різних крайових умовах відповідно (8), (10), (12). Крайові умови (8) і (10) називаються несиметричними, оскільки порядок похідних функцій у моменти часу $t=0$ та $t=t_1$ є різним. Крайові умови (12) – симетричні, оскільки порядок похідних функцій у задані моменти часу однаковий. Для отриманих законів руху побудовані графіки функцій (рис. 1 –

рис. 3). На рис. 1 – рис. 3 дрібна штриховка показує кінематичні функції екстремалі (9), груба штриховка – екстремалі (11), суцільна лінія – екстремалі (13).

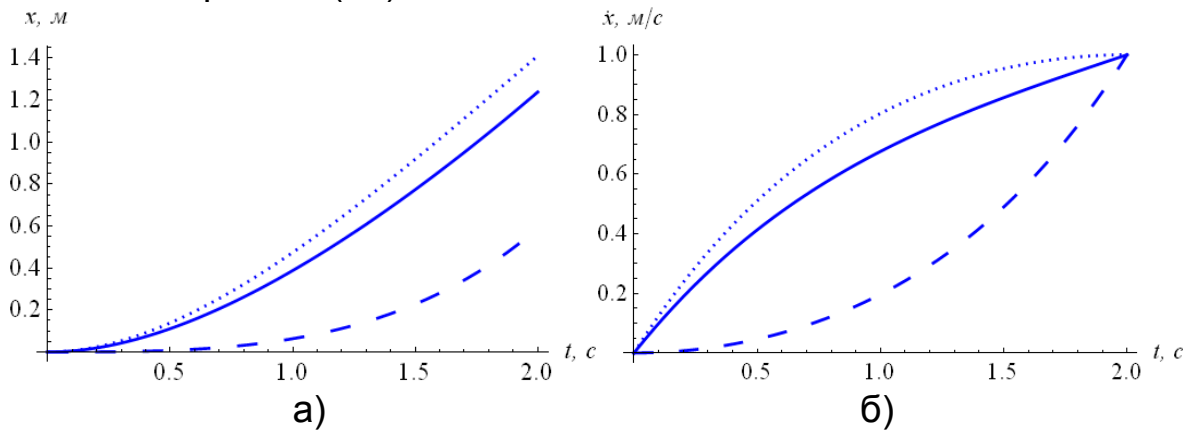


Рис. 1. Графіки функцій переміщення (а) та швидкості (б) динамічної системи.

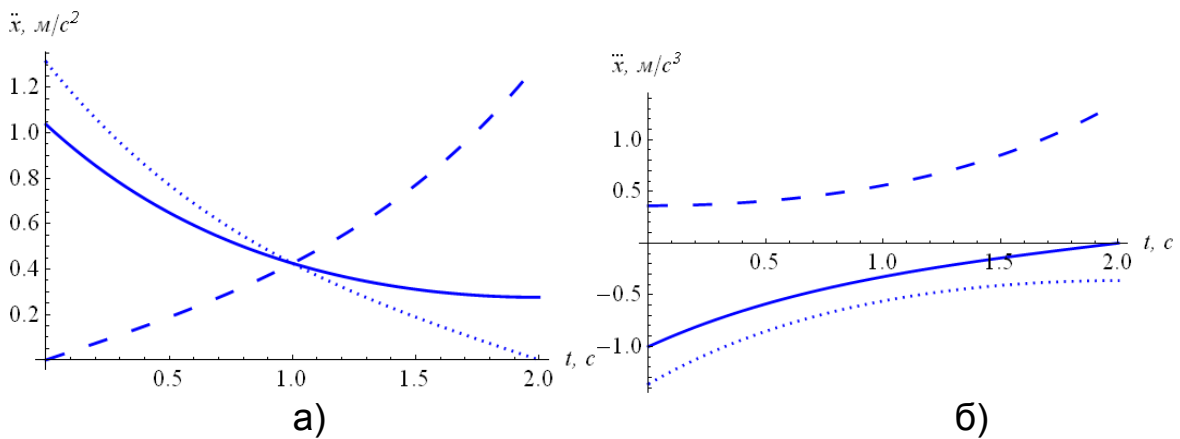


Рис. 2. Графіки функцій прискорення (а) та ривка (б) динамічної системи.

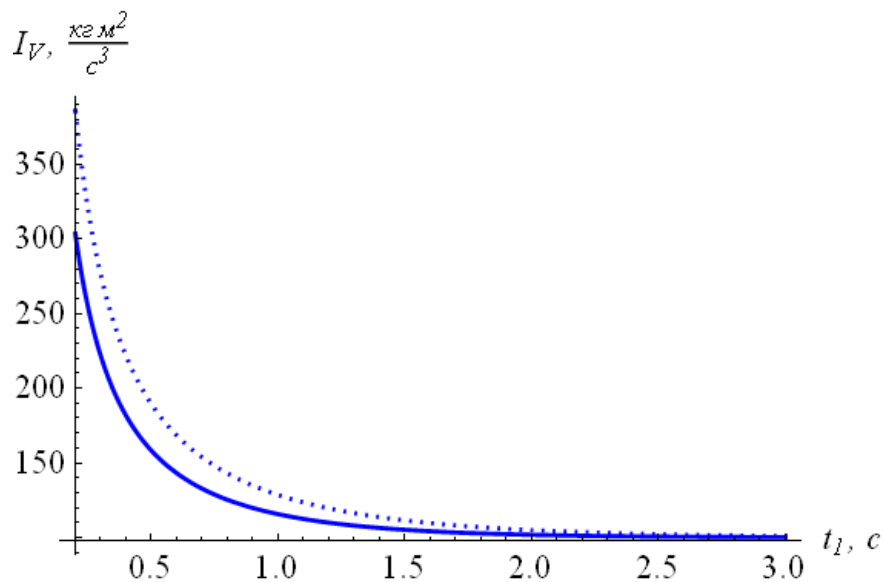


Рис. 3. Графіки функціонала (2) при несиметричних (8) і (10) при симетричних (12) крайових умовах.

Порівняємо значення функціоналів отриманих при розв'язанні варіаційної задачі (2) при різних крайових умовах. Для цього побудуємо графіки функціоналів як функцій тривалості розгону динамічної системи (рис. 3). На рис. 3 штриховою лінією показано графік функціонала як функції тривалості руху системи для несиметричних крайових умов, а суцільною – для симетричних. Виявляється, що постановка несиметричних крайових умов приводить до того, що значення функціонала однакові. У цьому сенсі екстремалі (9) та (11) є тотожними.

Із приведених графіків видно, що розв'язання варіаційної задачі при симетричних крайових умовах дає менше значення функціоналу. Однак при збільшенні тривалості руху системи різниця між значеннями функціоналів майже зникає. Цей результат важливо враховувати при розгоні динамічних систем коли розгін є нетривалим.

Значення функціоналу є не єдиним критерієм, за яким можна дати оцінку якості перебігу перехідного процесу. У табл. 1 зведено основні показники, які відносяться до отриманих вище результатів і які відображають якість режиму розгону динамічної системи.

1. Значення показників якості руху динамічної системи для екстремалей (9), (11) та (13).

Значення показників	Оптимальний режим руху		
	Екстремаль (9)	Екстремаль (11)	Екстремаль (13)
$x(t_1)$	$v(kt_1 \cosh(kt_1) - \sinh(kt_1))A^{-1}$	$v(\sinh(kt_1) - kt_1)A^{-1}$	s (вираз (15))
$\ddot{x}(0)$	$kv\text{cth}(\frac{kt_1}{2})$	0	$k(-ks + kt_1v + ksc\cosh(kt_1) - v\sinh(kt_1))$
$\ddot{x}(t_1)$	0	$kv\text{cth}(\frac{kt_1}{2})$	$k(ks + k(t_1v - s)\cosh(kt_1) - v\sinh(kt_1))$
\ddot{x}_{\max}	$\ddot{x}(0)$	$\ddot{x}(t_1)$	$\ddot{x}(0)$
$\ddot{x}(0)$	$-k^2v\cosh(kt_1)D^{-1}$	k^2vD^{-1}	$-k^2(ks + e^{kt_1}(ks - v) + v)C^{-1}$
$\ddot{x}(t_1)$	$-k^2vD^{-1}$	$-k^2v\cosh(kt_1)D^{-1}$	$k^2(v - e^{kt_1}v - (1 + e^{kt_1})k(s - vt_1))C^{-1}$

У табл. 1 введени такі позначення: $A = k(\text{Cosh}(kt_1) - 1)$; $B = 2 - 2\text{Cosh}(kt_1) + kt_1\text{Sinh}(kt_1)$; $C = 2 + kt_1 + e^{kt_1}(kt_1 - 2)$; $D = \text{Cosh}(kt_1) - 1$.

Приведемо розв'язання іншої оптимізаційної задачі: мінімізувати інтегральний функціонал [9]:

$$I_{\dot{v}} = \int_0^{t_1} \frac{1}{2} \dot{V} dt = \int_0^{t_1} \frac{1}{2} m(\ddot{x} + \ddot{x}^*)^2 dt \rightarrow \min, \quad (16)$$

де \dot{V} – повна „енергія” ривків динамічної системи. Із врахуванням рівняння (6) необхідна умова екстремуму функціоналу (16) – рівняння Ейлера-Пуассона – набуває такого вигляду:

$$x - k^2 \overset{IV}{x} = 0. \quad (17)$$

Дане диференціальне рівняння будемо розв'язувати при несиметричних крайових умовах:

$$\begin{cases} x(0) = \dot{x}(0) = \ddot{x}(0) = 0; \\ \dot{x}(t_1) = v; \quad \ddot{x}(t_1) = \ddot{x}(t_1) = 0 \end{cases} \quad (18)$$

та

$$\begin{cases} x(0) = \dot{x}(0) = \ddot{x}(0) = \overset{IV}{x}(0) = 0; \\ \dot{x}(t_1) = v; \quad \ddot{x}(t_1) = 0. \end{cases} \quad (19)$$

Крім наведених умов диференціальне рівняння (17) розв'язано при симетричних крайових умовах:

$$\begin{cases} x(0) = \dot{x}(0) = \ddot{x}(0) = 0; \\ x(t_1) = s; \quad \dot{x}(t_1) = v; \quad \ddot{x}(t_1) = 0. \end{cases} \quad (20)$$

Не будемо приводити вирази, які описують розв'язки відповідних крайових задач, оскільки вони мають значний об'єм.

Для випадку крайових умов (20) екстремаль буде залежати від параметра s . Отже, функціонал (16) також є функцією цього параметра. Для мінімізації критерію (16) необхідно розв'язати рівняння:

$$\frac{\partial I_{\dot{v}}}{\partial s} = 0. \quad (21)$$

Розв'язком даного рівняння є вираз:

$$s = \frac{vt_1}{2}. \quad (22)$$

Підставивши даний вираз у розв'язок крайової задачі (17), (20), отримаємо екстремаль:

$$x = \frac{v(2 - 2e^{kt} - 2e^{k(t_1-t)} + kt(2+kt) + e^{kt_1}(2 + kt(kt-v)))}{2k(2 + kt_1 + e^{kt_1}(kt_1 - 2))}. \quad (23)$$

Для знайдених законів руху динамічної системи побудовано графіки (рис. 4, рис. 5). На рис. 4, рис. 5 штриховка показує кінематичні функції розв'язку крайової задачі (17), (18); груба штриховка – крайової задачі (17), (19), суцільна лінія – екстремалі (23).

Порівняємо значення функціоналів отриманих при розв'язанні варіаційної задачі (16) при різних крайових умовах. Для цього побудуємо графіки функціоналів як функцій тривалості розгону

динамічної системи (рис. 6). На рис. 6 штриховою лінією показано графік функціонала як функції тривалості руху системи для несиметричних крайових умов, а суцільною – для симетричних. Як і в попередній задачі постановка несиметричних крайових умов приводить до того, що значення функціонала однакові.

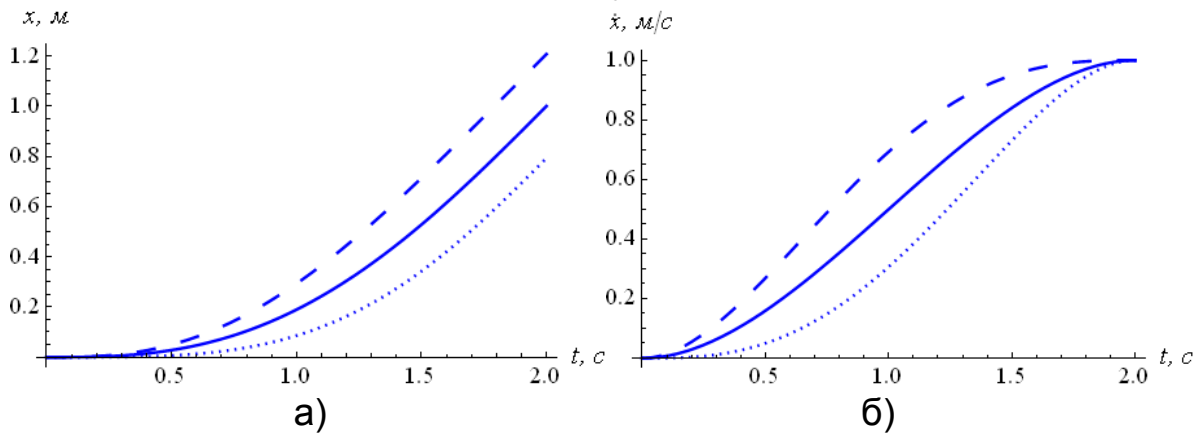


Рис. 4. Графіки функцій переміщення (а) та швидкості (б) динамічної системи.

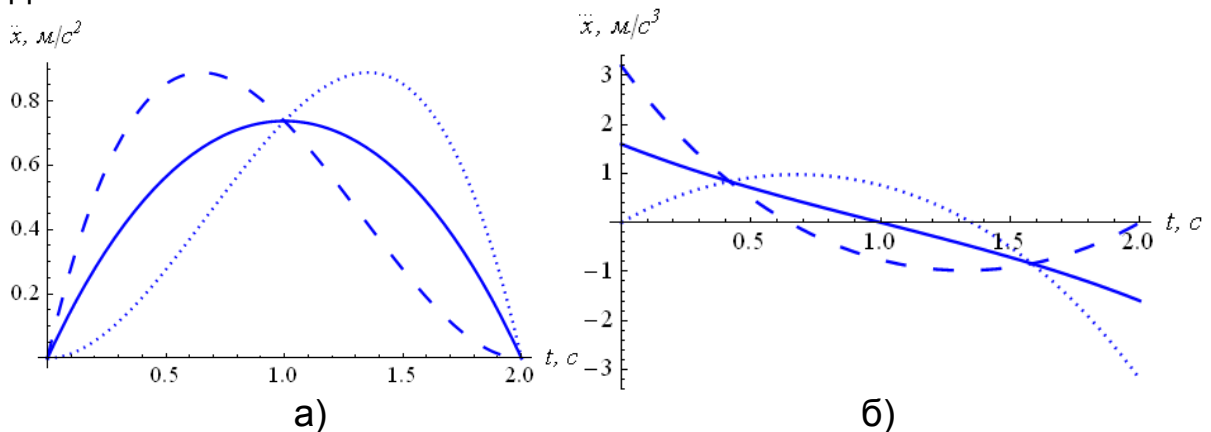


Рис. 5. Графіки функцій прискорення (а) та ривка (б) динамічної системи.

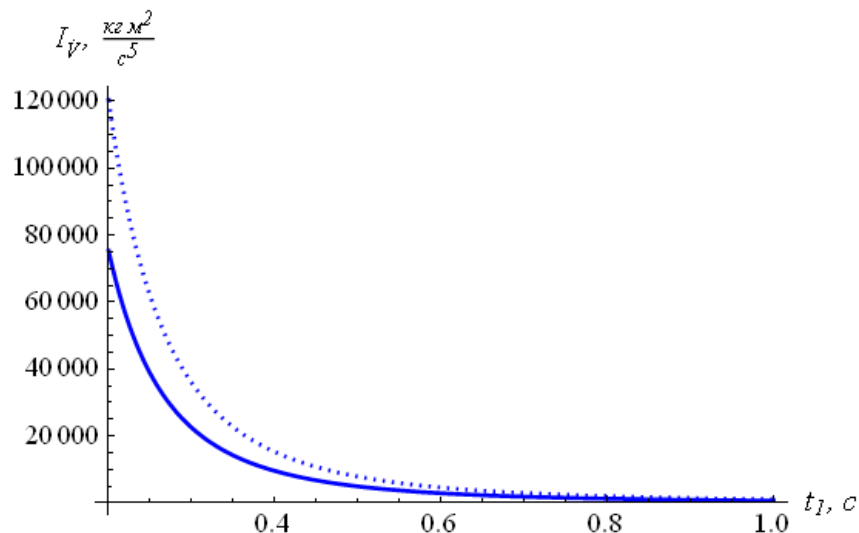


Рис. 6. Графіки функціонала (16) при несиметричних (18) і (19) при симетричних (20) крайових умовах.

Із приведених графіків видно, що розв'язання варіаційної задачі при симетричних крайових умовах дає менше значення функціоналу. Однак при збільшенні тривалості руху системи різниця між значеннями функціоналів майже зникає.

Проаналізуємо отримані результати шляхом визначення додаткових показників якості руху динамічної системи. Для цього усі показники занесемо у табл. 2.

2. Значення показників якості руху динамічної системи для розв'язків крайових задач (17), (18); (17), (19) та екстремалі (23).

Значення показників	Оптимальний режим руху		
	Розв'язок крайової задачі (17-18)	Розв'язок крайової задачі (17), (19)	Екстремаль (23)
$x(t_1)$	$2e^{kt_1}t_1v((kt_1)^2 - 12 + 2(6 + (kt_1)^2) \times \cosh(kt_1) - 9kt_1 \sinh(kt_1))(3C^2)^{-1}$	$2e^{kt_1}kt_1^2v(kt_1(2 + \cosh(kt_1) - 3\sinh(kt_1)))(3C^2)^{-1}$	s (вираз 22)
$\ddot{x}(0)$	0	0	0
$\ddot{x}(t_1)$	0	0	0
\ddot{x}_{\max}	$2(e^{kt_1} - 1)kv(kt_1 - \lg e^{kt_1})C^{-2}$ при $t = \frac{\lg e^{kt_1}}{k}$	$2(e^{kt_1} - 1)kv(kt_1 - \lg e^{kt_1})C^{-2}$ при $t = t_1 - \frac{\lg e^{kt_1}}{k}$	$kv(e^{\frac{kt_1}{2}} - 1)^2C^{-1}$ при $t = \frac{t_1}{2}$
$\ddot{x}(0)$	$2k^2v(e^{kt_1} - 1)^2C^{-1}$	0	$k^2v(e^{kt_1} - 1)^2C^{-1}$
$\ddot{x}(t_1)$	0	$-2k^2v(e^{kt_1} - 1)^2C^{-1}$	$-k^2v(e^{kt_1} - 1)^2C^{-1}$

Важливим питанням оптимізації режимів руху динамічної системи є питання встановлення того, чи функціонали (2) та (16) можуть бути мінімізовані. Оскільки рівняння Ейлера-Пуассона (7) та (17) є необхідними умовами перетворення у нуль перших варіацій функціоналів (2) та (16) відповідно, то їх розв'язки не обов'язково перетворюють їх мінімумами. Для встановлення типу екстремумів функціоналів (2) та (16) використаємо умову Лежандра [1]. Згідно із цією умовою для того, щоб був можливий мінімум інтегрального функціоналу необхідне виконання умови:

$$\frac{\partial^2 P}{\partial x^2} \geq 0, \quad (24)$$

де P – підінтегральна функція функціоналу; n – найвищий порядок похідної у виразі P . Для функціоналів (2) та (16) маємо:

$$\frac{\partial^2 V}{\partial \dot{x}^2} = \frac{\partial^2 \dot{V}}{\partial \ddot{x}^2} = m > 0. \quad (25)$$

Для обох інтегралів виконується посилена умова Лежандра. Це означає, що на екстремалях можуть досягатись мінімуми відповідних критеріїв.

Висновки

У даному дослідженні розв'язані дві оптимізаційні задачі мінімізації „енергії” прискорень та ривків динамічної одномасової системи із врахуванням сили опору технологічного характеру. Сила опору моделюється у вигляді лінійної функції від швидкості руху системи. Задачі розв'язуються методом варіаційного числення при симетричних та несиметричних крайових умовах. Для отриманих законів руху динамічної системи знайдені додаткові показники якості перехідного процесу. За даними показниками можна обрати той чи інший закон руху для конкретного технологічного процесу із врахуванням обмежень накладених на керування (обмеження крутного моменту приводного механізму).

У дослідженні показано, що постановка симетричних крайових умов дає змогу отримати такі закони руху системи, на яких інтегральні критерії набувають менших значень, ніж при законах, отриманих завдяки використанню несиметричних крайових умов. Крім того, виконано перевірку інтегральних функціоналів за умовою можливості досягнення мінімумів на екстремалях (умова Лежандра).

Список літератури

1. *Петров Ю.П.* Вариационные методы теории оптимального управления / *Ю.П. Петров.* – Л.: Энергия, 1977. – 280 с.
2. *Понтрягин Л.С.* Принцип максимума в оптимальном управлении / *Л.С. Понтрягин* ; изд. 2-е стереотипное. – М.: Едиториал УРСС, 2004. – 64 с.
3. *Беллман Р.* Динамическое программирование [пер. с англ. *И.М. Андреева, А.А. Корбут, И.В. Романовский, И.Н. Соколов*]. – М.: Изд-во иностранной литературы, 1960. – 400 с.
4. *Ловейкін В.С.* Оптимізація перехідних режимів руху механічних систем прямим варіаційним методом : монографія / *В.С. Ловейкін, Ю.О. Ромасевич.* – Ніжин: Видавець «ПП Лисенко М.М.», 2010. – 184 с.
5. *Сеньо П.С.* Прямые интервальные методы решения вариационных задач и задач оптимального управления / *П.С. Сеньо* // Динамические системы. – 2004. – Вып. 18. – С. 44–50.
6. *Барский И.Л.* Локальная интерполяция в прямых методах вариационного исчисления / *Барский И.Л., Румянцев И.А., Флеров Ю.А.* – М.: Вычислительный центр АН СССР, 1982. – 56 с.
7. *Черноусько Ф.Л.* Вариационные задачи механики и управления (численные методы) / *Ф.Л. Черноусько, Н.В. Баничук.* – М.: Наука, 1973. – 107 с.
8. *Моисеев Н.Н.* Численные методы в теории оптимальных систем / *Н.Н. Моисеев.* – М.: Наука, 1971. – 424 с.

9. Ловейкін В.С. Критерії оцінки режимів руху механізмів і машин / В.С. Ловейкін // Механізація сільськогосподарського виробництва. – К.: Національний аграрний університет. – 1998. – Т. 7. – С. 8–12.
10. Эльсгольц Л.Э. Дифференциальные уравнения и вариационное исчисление / Л.Э. Эльсгольц. – М.: Наука, 1969. – 424 с.

Приведено решение оптимизационной задачи управления движением динамической системы. Критериями оптимизации выступают интегральные функционалы с подинтегральными выражениями „энергий” ускорений и рывков системы с учетом силы сопротивления. Решения оптимизационных задач производится методом вариационного исчисления. Уравнение Эйлера-Пуассона решается при симметричных и несимметричных краевых условий.

Оптимизация переходных режимов, одномассовая динамическая модель, сила сопротивления.

The decision of an optimizing problem of traffic control of dynamic system is resulted. As criteria of optimization act integrated functional with integrand expression „energy” accelerations and jerks of system taking into account force of resistance. Decisions of optimizing problems it is made by a method of variation calculus. Euler-Puasson equation dares at symmetric and asymmetrical regional conditions.

Optimization of transitive modes, one-mass dynamic model, force of resistance.

УДК 662.62: 662.756.3

ЕФЕКТИВНІСТЬ ЗАСТОСУВАННЯ ТВЕРДОГО І РІДКОГО БІОПАЛИВА В УМОВАХ АГРОПРОМИСЛОВОГО КОМПЛЕКСУ УКРАЇНИ

**В.О. Дубровін, В.Г. Мироненко, доктори технічних наук
В.М. Поліщук, кандидат технічних наук**

Проведений аналіз ефективності застосування твердого та рідкого біопалива в умовах агропромислового комплексу України. Дані рекомендації стосовно його використання.

Біопаливо, біодизель, біоетанол, енергетична ефективність, теплота згорання, енергетичні рослини.

© В.О. Дубровін, В.Г. Мироненко, В.М. Поліщук, 2012