УДК 519.21

КРАЙОВІ ЗАДАЧІ ДЛЯ СИСТЕМ З ІМПУЛЬСНОЮ ДІЄЮ І ЇХ РОЗВ'ЯЗАННЯ

Р.Ф. Овчар, кандидат фізико-математичних наук

Запропоновано алгоритм знаходження умов існування і побудови розв'язків лінійної системи з прямокутною матрицею коефіцієнтів. Наведено приклад, який ілюструє основні теоретичні твердження даної статті.

Лінійна система з прямокутною матрицею коефіцієнтів, ядро оператора, ортопроектор, фундаментальна матриця, псевдообернена матриця по Муру-Пенроузу, норма нев'язки.

Результати досліджень. Розглядається наступна задача: знайдемо умови існування і побудови розв'язків лінійної системи з прямокутною матрицею коефіцієнтів.

$$Qc = b, \tag{1}$$

де Q – довільна $(m \times n)$-вимірна матриця рангу n_1, $rank\, Q = n_1 \le \min(m; n)$; c – шуканий вектор-стовпець із R^n; b – відомий вектор-стовпець із m-вимірного дійсного евклідового простору R^m. Позначимо через $N(Q)$ і $N(Q^*)$ нуль-простори матриць (ядра операторів) Q і Q^*=Q^{T} відповідно:

$$N(Q) = \{c: c \in R^n, Qc = 0\},\ N(Q^*) = \{s: s \in R^m, Q^*s = 0\},$$

а через $R(Q) = im\, Q$ і $R(Q^*) = im\, Q^*$ - образи матриць Q і Q^*.

Тоді

$$R^n = R(Q^*) + N(Q);\ R^m = R(Q) + N(Q^*).$$

Позначимо через P_Q і P_{Q^*} ортопроектори, які проектують R^n і R^m на нуль-простори $N(Q)$ і $N(Q^*)$ матриць Q і Q^* відповідно, так що

$$P_Q: R^n \to N(Q), N(Q) = P_Q R^n; P_{Q^*}: R^m \to N(Q^*), N(Q^*) = P_{Q^*} R^m;$$

$$I_n - P_Q: R^n \to R(Q^*), I_m - P_{Q^*}: R^m \to R(Q);\ (I_n - P_Q)^2 = I_n - P_Q,$$

$$(I_m - P_{Q^*})^2 = I_m - P_{Q^*},\ P_Q^2 = P_Q,\ P_{Q^*}^2 = P_{Q^*}.$$

Алгебраїчна система (1) розв'язана тоді і тільки тоді, коли її вільний член b належить ортогональному доповненню $N^1(Q^*) = R(Q)$ підпростору $N(Q^*)$. Отже,

$$P_{Q^*} b = 0. \tag{2}$$

При цьому, загальний розв'язок системи (1) має вигляд:

$$c = Q^+ b + \bar{c}, \tag{3}$$

де $\bar{c}$ – довільний стовпець із нуль-простору $N(Q)$: $\bar{c} = P_Q c$, $\bar{c} = P_Q \bar{c} \in N(Q)$, Q^+ – єдина $(n \times m)$-вимірна матриця, псевдообернена(узагальнено-обернена) по Муру-Пенроузу до $(m \times n)$-вимірної матриці Q. Так як розмірність нуль-простору $N(Q)$ рівна дефекту матриці Q, а $rank\, Q = n_1$, то $dim\, N(Q) = n - rank\, Q = n - n_1 = r$. Враховуючи, що $rank\, Q = rank\, Q^*$, для розмірності нуль-простору $N(Q^*)$ отримуємо $dim\, N(Q^*) = m - rank\, Q = m - n_1 = d$, тому $rank\, P_Q = r$, $rank\, P_{Q^*} = d$. Отже, умова (2) складається із d лінійно незалежних умов і $(m \times m)$-вимірну матрицю $P_{Q^*} b$ (2) можна замінити $(d \times m)$-вимірною матрицею $P_{Q_d^*}$, рядки якої є d лінійно незалежними рядками матриці P_{Q^*}. Далі, позначаючи через $(P_i), i = 1, \dots, r$ базис нуль-простору $N(Q)$, складаємо фундаментальну $(n \times r)$-вимірну матрицю P_{Q_r} розв'язків однорідної системи (1), стовпці якої - r лінійно незалежні вектори, що складають базис $N(Q)$. Тоді довільний вектор-стовпець $\bar{c} = P_Q c$ із нуль-простору $N(Q)$ можна записати у вигляді $\bar{c} = P_{Q_r} c_r$, де c_r – довільний r-вимірний вектор-стовпець із R^r. Таким чином, справедлива наступна теорема:

Теорема. Якщо $rank\, Q = n_1$, то алгебраїчна система (1) розв'язана тоді і тільки тоді, коли вектор-стовпець $b \in R^m$ задовольняє умові

$$P_{Q_d^*} b = 0,\ d = m - n_1 \tag{4}$$

і при цьому має r-параметричне сімейство розв'язків виду

$$c = P_{Q_r} c_r + Q^+ b, r = n - n_1. \tag{5}$$

Наслідок. Якщо $rank\, Q = n_1 = n$, то система (1) розв'язана тоді і тільки тоді, коли вектор-стовпець $b \in R^m$ задовольняє умові

$$R_{Q^*} b = 0, d = m - n \tag{6}$$

і при цьому має єдиний розв'язок

$$c = Q^+ b. \tag{7}$$

Останнє твердження випливає із теореми, так як $dim\, N(Q) = n - n_1 = r = 0$, $d = m - n_1 = m - n$. Крім того відмітимо, що з припущення $rank\, Q = n$ випливає нерівність $m \geq n$. В випадку $m = n$ умова (6) виконується при будь-яких $b \in R^m$, $P_{Q_d^*} = P_{Q_d} = 0$, $Q^+ = Q^{-1}$. Якщо $rank\, Q = 0$, то $Q = 0$, $Q^+ = 0$, $P_Q = I_n$, $P_Q^* = I_m$. При невиконанні умови (4) отримуємо некоректну задачу [2]. Алгебраїчна система (1) несумісна і не існує розв'язків, проте існує так званий псевдорозв'язок, який мінімізує норму нев'язки $||Qc - b||$ на всьому просторі R^n. Множина R_+ псевдорозв'язків визначається формулою (5), причому серед цієї множини існує єдиний нормальний псевдорозв'язок $c_+ \in R_+ \subset R^n$, ортогональний нуль-простору $N(Q)$:

$$c_+ = Q^+ b \tag{8}$$

Цей розв'язок є найкращим (за методом найменших квадратів) наближеним розв'язком системи (1), який мінімізує норму нев'язки

$$||Qc_+ - b|| = \min_{c \in R^n} ||Qc - b|| \tag{9}$$

і із всіх векторів $c \in R_+$, для яких реалізується мінімум, вектор c_+ має найменшу довжину

$$||c_+|| = \min_{c \in R_+} ||c||, \ ||c|| = \left(\sum_{i=1}^{n} |c_i|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \tag{10}$$

При цьому норма нев'язки дорівнює нормі виразу, який входить в ліву частину критерію (2) розв'язності системи (1):

$$||Qc_+ - b|| = ||QQ^+b - b|| = ||P_{Q^*}b||.$$

Таким чином, якщо умова (4) виконується, то нев'язка дорівнює нулю і псевдорозв'язок (8) є розв'язком системи (1).

На завершення приведемо формули, необхідні для побудови псевдообернених матриць і ортопроекторів:

$$Q^+ = Q_1^*(Q_1 Q_1^*)^{-1}(Q_2^* Q_2)^{-1} Q_2^*, \tag{11}$$

$$P_Q = I_n - Q^+Q, \ P_{Q^*} = I_m - QQ^+, \tag{12}$$

тут $(m \times n_1)$-вимірна матриця Q_1 і $(n_1 \times n)$ – вимірна матриця Q_2 є базисним розкладом матриці Q:

$$Q = Q_1 Q_2, \quad rank\ Q_1 = rank\ Q_2 = n_1.$$

Приклад. Як ілюстрацію запропонованого вище алгоритму дослідження лінійних алгебраїчних систем розглянемо задачу про розв'язність і побудову розв'язку матричного рівняння

$$Qc = b, \ Q = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, b = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \ \ c \in R^2 \tag{13}$$

Перш за все, використовуючи формули (11) і (12) будуємо матриці

$$Q^+ = \frac{1}{6}\begin{bmatrix} -3 & 3 & 0 \\ 2 & 2 & 2 \end{bmatrix}, \ P_Q = 0, \ \ P_{Q^*} = \frac{1}{6}\begin{bmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & -2 \\ -2 & -2 & 4 \end{bmatrix}.$$

Далі перевіряємо умову розв'язності (2) системи (13):

$$P_{Q^*}b = \frac{1}{3}col(-1,-1,2)$$

Таким чином, рівняння (13) не має розв'язку, але можна знайти псевдорозвязок

$$c_+ = Q^+b = \frac{1}{6}\begin{bmatrix} -3 & 3 & 0 \\ 2 & 2 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \frac{1}{6}\begin{bmatrix} 0 \\ 2 \end{bmatrix},$$

який мінімізує норму нев'язки (9).

Висновок. Одержано умови існування і побудови розв'язків лінійної системи з прямокутною матрицею коефіцієнтів. Запропонований алгоритм розв'язання поставленої задачі проілюстровано на прикладі.

Список літератури

1. *Самойленко А.М.* Линейные нетеровы краевые задачи для дифференциальных систем с импульсным воздействием / *А.М. Самойленко, А.А. Бойчук* // Украинский математический журнал. – 1992. – №4. – С. 564–570.
2. *Бойчук А.А.* Конструктивные методы анализа краевых задач / *А.А. Бойчук*. – К.: Наукова думка, 1990. – 96 с.

Предложен алгоритм нахождения условий существования и построения решений линейной системы с прямоугольной матрицей коэффициентов. Приведен пример, иллюстрирующий основные теоретические утверждения данной статьи.

***Линейная система с прямоугольной матрицей коэффициентов, ядро оператора, ортопроектор, фундаментальная матрица, псевдообратная матрица по Муру-Пенроузу, норма невязки*.**

The algorithm for finding the conditions for existence and construction of solutions of linear system with square coefficient matrix. An example to illustrate the basic theoretical statements in this paper. Linear system with square matrix of coefficients.

Linear system with square coefficient matrix, kernel, orthogonal projector, fundamental matrix, pseudoinverse matrix on Moore-Penrose, norm of residual.