

MAPLE-МОДЕЛЬ РУХУ ЧАСТИНКИ ПО СТАЦІОНАРНІЙ ШОРСТКІЙ ВНУТРІШНІЙ ПОВЕРХНІ СФЕРИ

В.М. Несвідомін, доктор технічних наук

Розроблено maple-модель руху частинки по нерухомій шорсткій внутрішній поверхні сфери та наведено результати комп'ютерного дослідження її траєкторно-кінематичних властивостей.

Рух частинки, шорстка поверхня, сфера, система диференціальних рівнянь, траєкторія, швидкість.

Постановка проблеми. Використання сферичних поверхонь для переміщення сипучих матеріалів потребує розуміння закономірностей руху матеріальної частинки по її шорсткій внутрішній частині [2]. Визначення траєкторно-кінематичних характеристик руху частинки приводить до необхідності формування системи диференціальних рівнянь 2-го порядку та її наближеного аналізу, що є дуже трудомісткими процесами і без застосування сучасних пакетів символічної алгебри здійснити практично не можливо.

Аналіз існуючих досліджень. Розробку програмних додатків в області імітаційного моделювання взаємодії «шорстка поверхня – рухома частинка» здійснимо в середовищі символічної алгебри Maple [1]. Для опису руху частинки по поверхні в проекціях на осі тригранника Дарбу скористаємося дослідженнями із праці [3].

Мета досліджень. Розробити для середовища символічної алгебри Maple [1] імітаційну модель руху частинки по шорсткій сферичній поверхні та за допомогою обчислювальних експериментів з'ясувати її траєкторно-кінематичні властивості в залежності: 1) кута α_0 напрямку кидання частинки; 2) коефіцієнта зовнішнього тертя f ; 3) початкової швидкості V_0 ; 4) її початкового положення $[u_0, v_0]$ в момент її руху.

Результати досліджень. Якщо частинку кинути на внутрішню поверхню сфери то під дією сили тяжіння вона буде рухатися по певній траєкторії до найнижчої точки сфери, в околі якої і зупиниться. В проекціях на осі тригранника Дарбу *OTPN* закону руху частинки матиме вигляд [3]:

$$\begin{cases} OT := m W_\tau = F_g \cos(\widehat{\mathbf{G}, \boldsymbol{\tau}}) - f(F_g \cos(\widehat{\mathbf{G}, \mathbf{N}}) \pm F_c \cos(\widehat{\mathbf{n}, \mathbf{N}})) \\ OP := m W_n \sin(\widehat{\mathbf{n}, \mathbf{N}}) = F_g \cos(\widehat{\mathbf{G}, \mathbf{P}}) \\ ON := 0 = F_g \cos(\widehat{\mathbf{G}, \mathbf{N}}) \pm F_c \cos(\widehat{\mathbf{n}, \mathbf{N}}) \end{cases}, \quad (1)$$

© В.М. Несвідомін, 2012

де $g = 9,81 \text{ м/с}^2$ – константа прискорення вільного падіння тіла;
 $\mathbf{G} = [0, 0, -1]$ – напрямок сили тяжіння $F_g = m g$ в системі $Oxyz$;
 $F_N = F_g \cos(\widehat{\mathbf{N}, \mathbf{G}}) \pm F_C \cos(\widehat{\mathbf{N}, \mathbf{n}})$ – сила нормальної реакції;
 $F_g = mg$ і $F_C = m V^2 k$ – сила тяжіння та відцентрова сила;
 $W_\tau = \frac{d}{dt} V(t)$ – тангенціальне прискорення у функції часу t ;
 $W_n = V^2 k$ – нормальне прискорення частинки;
 k – кривина траєкторії \mathbf{r} частинки, м^{-1} ;
 V – швидкість частинки, м/с ;
 \mathbf{N} – нормаль до поверхні $\mathbf{R}(u, v)$ в точках траєкторії \mathbf{r} ;
 \mathbf{n} – головна нормаль траєкторії \mathbf{r} частинки на поверхні;
 $\boldsymbol{\tau}$ – вектор дотичної траєкторії \mathbf{r} ;
 $\mathbf{P} = \mathbf{N} \times \boldsymbol{\tau}$ – вектор Дарбу тригранника $O\boldsymbol{\tau}PN$;
 f – коефіцієнт зовнішнього тертя.

Якщо до параметричного рівняння uv – координатної сітки сфери:

$$\mathbf{R}(u, v) = \mathbf{R}[a \cos(u) \cos(v), a \sin(u) \cos(v), a \sin(v)], \quad (2)$$

підставити вирази $u = u(t)$ і $v = v(t)$ шуканої траєкторії у внутрішніх u, v – координатах, то одержимо траєкторію частинки $\mathbf{r}(t)$ у системі декартових координат $Oxyz$ у наступному вигляді:

$$\mathbf{r}(t) = \mathbf{r}[u(t) \cos(v(t)), u(t) \sin(v(t)), a v(t)]. \quad (3)$$

За рівняннями (2) і (3) визначаються всі геометро-кінематичні складові, які входять до рівняння (1). Розроблене програмне забезпечення для пакету символної алгебри Maple дозволяє всю послідовність досить громіздких аналітичних викладок здійснити автоматично. Одержимо наступний вигляд систем диференціальних рівнянь закону руху частинки по шорсткій внутрішній поверхні сфери:

$OT :=$

$$\begin{aligned} & a \left(\cos(v(t))^2 \frac{d}{dt} u(t) \frac{d^2}{dt^2} u(t) + \frac{d}{dt} v(t) \left(-\sin(v(t)) \cos(v(t)) \left(\frac{d}{dt} u(t) \right)^2 + \right. \right. \\ & \left. \left. \frac{d^2}{dt^2} u(t) \right) \right) = \\ & -f \left(a \left(\frac{d}{dt} v(t) \right)^2 + a \cos(v(t))^2 \frac{d}{dt} u(t) - \right. \\ & \left. g \sin(v(t)) \right) \sqrt{\left(\frac{d}{dt} v(t) \right)^2 + \cos(v(t))^2 \left(\frac{d}{dt} u(t) \right)^2 + \cos(v(t)) \frac{d}{dt} v(t)} \end{aligned} \quad (4)$$

$$OP := a \left(\cos(v(t)) \frac{d}{dt} u(t) \frac{d^2}{dt^2} v(t) - \cos(v(t)) \frac{d}{dt} v(t) \frac{d^2}{dt^2} u(t) + \right. \\ \left. \sin(v(t)) \frac{d}{dt} u(t) \left(2 \frac{d}{dt} v(t) \right)^2 + \cos(v(t))^2 \left(\frac{d}{dt} u(t) \right)^2 \right) = \\ - g \cos(v(t))^2 \frac{d}{dt} u(t)$$

Початковими умовами для знаходження шуканих залежностей $u(t)$ і $v(t)$ із одержаної системи (4) диференціальних рівнянь є:

$$O_i := \frac{d}{dt} u(t_0) = \frac{V_0 \sin(\alpha_0)}{a \cos(\alpha_0)}, \quad u(t_0) = u_0, \quad \frac{d}{dt} v(t_0) = \frac{V_0 \cos(\alpha_0)}{a}, \quad v(t_0) = v_0. \quad (5)$$

Розв'язати систему рівнянь (4) можливо тільки наближено, наприклад, за методом Рунге-Кутта [1]. Підстановка знайдених залежностей $u(t)$ і $v(t)$ у дискретному вигляді до рівняння (3) дозволяє унаочнити траєкторію $r(t)$ частинки по поверхні сфери. За цим рівнянням знаходяться і всі інші кінематичні параметри руху частинки - її швидкість $V(t)$, прискорення $V(t)$, сили $F_N(t)$ нормальної реакції, кривина $k(t)$.

На рис. 1,а побудовано траєкторії частинки по сфері за умови $a = 2$ м, $V_0 = 4$ м/с, $u_0 = \pi$, $v_0 = 0$, $t = 2.3$ с, $\alpha_0 = 0^\circ, 45^\circ, 90^\circ, 135^\circ$, $f = 0.3$. За графіками (рис. 1,б) швидкостей $V(t)$ можна бачити, що частинки через певні проміжки часу зупиняться і в момент зупинки, їх нормальна реакція $F_N(t)$ буде дорівнювати $F_N = 9,81$ Н (рис.1,в) за умови $m = 1$ кг. Причому, для частинки кинутої вздовж меридіани ($\alpha_0 = 0^\circ$), її нормальна реакція $F_N(t)$ на проміжку $t = [0.3..1.6]$ буде від'ємною, що означає її відрив від поверхні сфери – частинка почне здійснювати вільне падіння в просторі сфери.

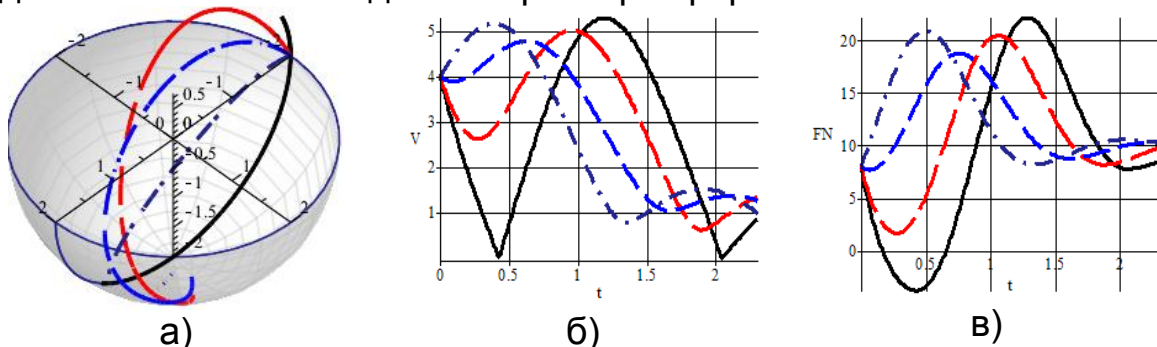


Рис. 1. Траєкторії $r(t)$ частинки, графіки її швидкості $V(t)$ та сили $F_N(t)$ нормальної реакції в залежності кута α_0 її кидання.

На рис. 2 побудовано траєкторії $r(t)$ частинки, графіки її швидкості $V(t)$ та кривини $k(t)$ в залежності коефіцієнта тертя $f = 0.01, 0.15, 0.3, 0.45$ та за умови $\alpha_0 = 90^\circ$ і $V_0 = 4$ м/с. Зрозумілим є те, що чим більший коефіцієнт тертя f , тим швидше частинка зупиниться. Звернемо увагу, що місце зупинки частинки буде в околі

найнижчої точки на сфері, радіус якого суттєво залежить від коефіцієнта тертя f .

Як бачимо із рис.2, в кривина $k(t)$ на початку руху частинки дорівнює $k = 1/a$, а потім характер поведінки кривини становиться зигзагоподібним – аналогічним до траєкторії $r(t)$ частинки.

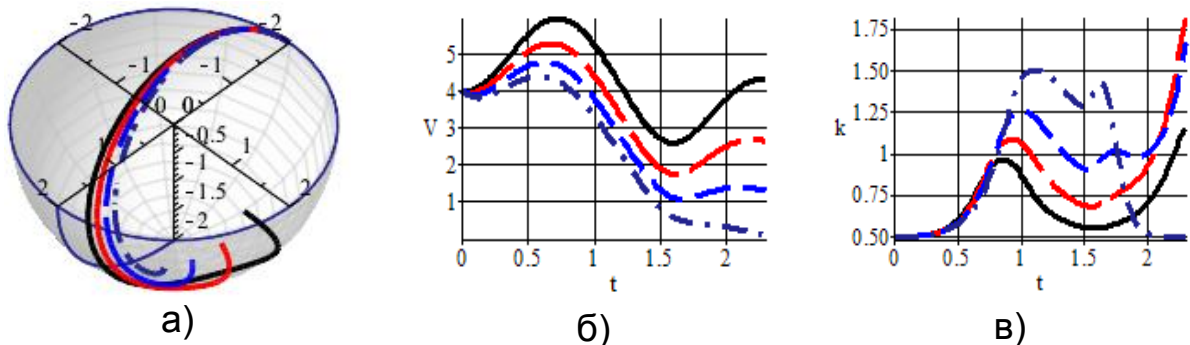


Рис. 2. Траєкторії $r(t)$ частинки, графіки її швидкості $V(t)$ та кривини $k(t)$ в залежності коефіцієнта тертя f .

Існують доволі складні взаємозв'язки між початковою швидкістю V_0 , кутом кидання α_0 , коефіцієнтом зовнішнього тертя f і траєкторно-кінематичними характеристиками частинки.

На рис. 3 побудовано траєкторії $r(t)$ частинки, графіки швидкості $V(t)$, відцентрової сили $F_C(t)$, сили нормальної реакції $F_N(t)$, прискорення $W(t)$ та кривини $k(t)$ за початковою швидкістю $V_0 = 2, 4, 6, 8$ м/с та значеннями $\alpha_0 = 90^\circ$ і $f = 0.3$.

Можна бачити (рис.3,б), що графіки швидкостей $V(t)$ частинки незалежно від її початкової швидкості V_0 , вже через проміжок $t \approx 2$ с починають сходиться.

Є суттєва розбіжність у величинах нормальної реакції на початку руху $t = 0$ частинки, а вже через проміжок часу $t \approx 0.8$ с – ця різниця майже відсутня (рис. 3,г).

Якщо на початку руху графіки кривини $k(t)$ її траєкторії $r(t)$ дещо однакові, то в момент зупинки – доволі відрізняються.

Якщо частинку кидати з однаковою початковою швидкістю $V_0 = 4$ м/с в різних місцях на меридіані сфери в напрямку паралелей, то їх траєкторії $r(t)$ в певній точці наближаються (рис. 4,а). Найшвидше зупиниться та частинка, яка була найнижче, хоча найвищі сповільнюють свій рух швидше (рис. 4,б).

Характер графіків кривини (рис. 4,в) дещо відрізняються від попередніх графіків, оскільки на початку руху частинки кривина $k(t)$ траєкторій є різною.

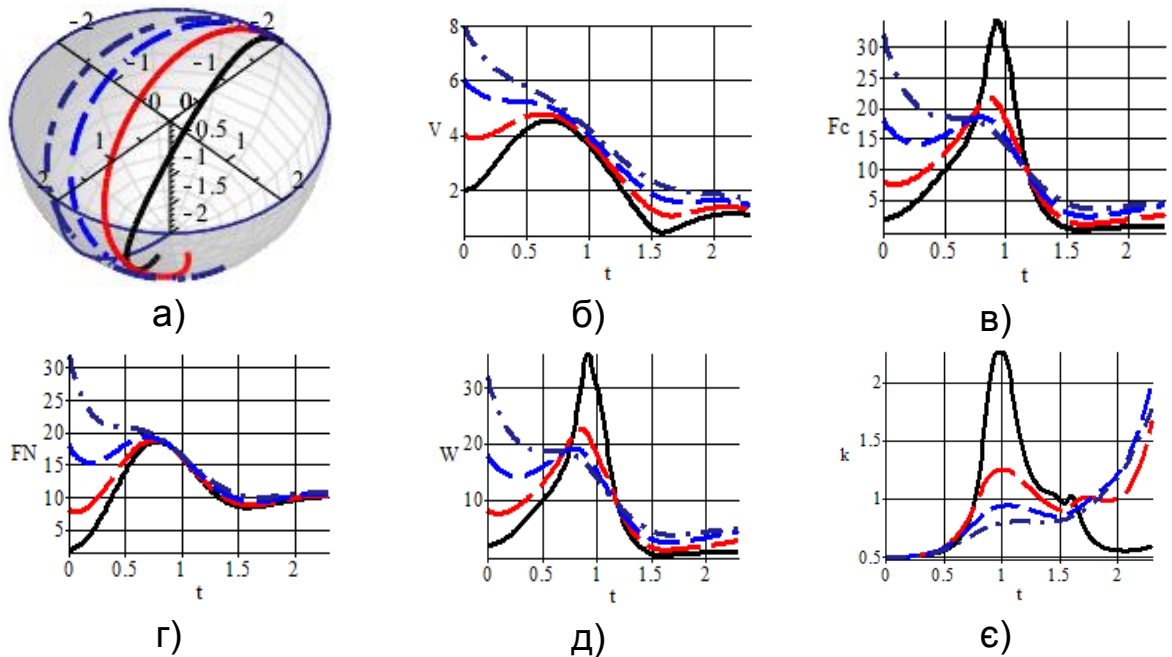


Рис. 3. Траєкторії $r(t)$, графіки швидкості $V(t)$, відцентрової сили $F_C(t)$, сили нормальної реакції $F_N(t)$, прискорення $W(t)$ та кривини $k(t)$ у функції коефіцієнта f тертя.

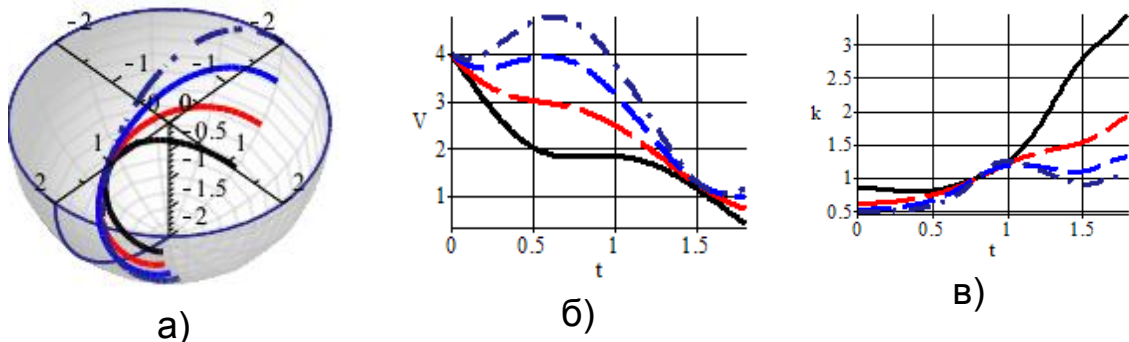


Рис. 4. Траєкторії $r(t)$, графіки швидкості $V(t)$ та кривини $k(t)$ в залежності її початкового положення на поверхні сфери.

Висновок. Імітаційне моделювання руху частинки по шорсткій внутрішній поверхні сфери дозволяє встановити досить складні взаємозв'язки між вихідними умовами кидання частинки по сфері та її траєкторно-кінематичними характеристиками. Зокрема, місце зупинки частинки як правило є не в найнижчій точці сфери і суттєво залежить від значення коефіцієнта тертя. Час до повної зупинки частинки суттєво залежить від коефіцієнта тертя, і не дуже залежить від її початкової швидкості.

Список літератури

1. Аладьев В.З. Программирование и разработка приложений в Maple / В.З. Аладьев, В.К. Бойко, Е.А. Ровба. – Гродно: ГрГУ, 2007. – 458 с.

2. Василенко П.М. Теория движения частицы по шероховатым поверхностям сельскохозяйственных машин / П.М. Василенко. – К.: УАСХН, 1960. – 283 с.
3. Пилипака С.Ф. Тригранник і формули Френе: теорія складного руху матеріальної точки та задачі на кінематику і динаміку при її русі по шорстких поверхнях / С.Ф. Пилипака // Академік П.М. Василенко – яскравий погляд у майбутнє. – К.: Хай-Тек Прес, 2010. – С. 297–397.

Создана maple-модель движения материальной частички по шероховатой стационарной шероховатой внутренней поверхности сферы и приведены результаты вычислительного анализа ее траекторно-кинематических свойств.

Движение частички, шероховатая поверхность, сфера, система дифференциальных уравнений, траектория, скорость.

It is created maple model of movement of material part on roughness surfaces of sphere and results of its computing researches trajectory-kinematic properties are resulted.

Part movement, rough surface, sphere, system of differential equations, trajectory, velocity.

УДК 631.365:635.54

ВИКОРИСТАННЯ МЕТОДІВ НЕЧІТКОГО МОДЕЛЮВАННЯ ПРИ ПРОЕКТУВАННІ СУШИЛЬНОГО ОБЛАДНАННЯ

І.В. Нездвєцька, аспірант*

С.М. Кухарець, кандидат технічних наук

Житомирський національний агроекологічний університет

Обґрунтовано техніко-економічні параметри установки для сушіння сипких харчових продуктів зі змішаним конвективно-інфрачервоним енергопідведенням. Запропоновано методику побудови математичної моделі установок даного типу на базі теорії нечітких множин.

Сушіння, швидкість сушіння, якість, математичне моделювання, нечітка логіка.

Постановка проблеми. У процесі переробки продукції рослинництва провідне місце належить сушінню, тому поліпшення

*Науковий керівник – кандидата технічних наук С.М. Кухарець

© І.В. Нездвєцька, С.М. Кухарець, 2012