

11. Den-Hartog J.P. Forced Vibrations With Combined Coulomb and Viscous Friction / J.P. Den-Hartog // Transactions of ASME/ APM – 53. – 1931. – № 9. – P. 107–115.
12. Стрекис А.М. Вынужденные колебания с одной степенью свободы при наличии сухого трения и при произвольной вынужденной силе / А.М. Стрекис // Вопросы динамики и динамической прочности. – Рига, 1956. – Вып. IV. – С. 21.
13. Сакович В.Л. Вынужденные колебания вибратора при наличии сухого трения / В.Л. Сакович // Научн. труды Киевск. инж.-строит. ин-та. – 1964. – Вып. 20. – С. 116–127.
14. Крылов А.Н. О некоторых дифференциальных уравнениях математической физики / А.Н. Крылов. – М.-Л.: Физматгиз, 1950. – 204 с.
15. Якубович В.И. Вибрационное перемещение при колебаниях несущей плоскости по эллиптической траектории / В.И. Якубович // Механизация и автоматизация производства. – 1966. – № 8. – С. 18–20.

*Приведена математическая модель и осуществлен анализ режимов движения зерновых частиц вдоль вибрирующего наклонного решета, которое реализует поступательные колебания по эллиптическим траекториям параллельно плоскости наибольшего ската.*

**Модель, режим, движение, решето.**

*The paper deals with mathematical model and analysis of modes of grain parts of movement along inclined vibrating sieve, which does translational vibration along elliptic trajectories parallel to plane of greatest declivity.*

**Model, conditions, movement, sieve.**

УДК 631.01:534.1

## **ВПЛИВ ГАРМОНІЙНОЇ ЗБУРЮВАЛЬНОЇ СИЛИ НА ЕНЕРГЕТИЧНІ ПОКАЗНИКИ ЗМУШЕНИХ КОЛИВАНЬ**

**О.М. Черниш, В.В. Яременко, кандидати технічних наук**

*На підставі дослідження умов енергетичного балансу коливальних процесів сільськогосподарських машин визначені характеристики змушених коливань під дією гармонійної збурювальної сили.*

**Коливальні процеси, збурювальні сили, диференціальні рівняння, амплітуда, частота.**

**Постановка проблеми.** Коливальні процеси у сільськогосподарському виробництві суттєво впливають на якість,

© О.М. Черниш, В.В. Яременко, 2012

довговічність і надійність механічного обладнання, а прогнозування і розрахунок параметрів заданих вібраційних режимів є основою для створення високоефективних машин вібраційної дії [3-6]. Тому дослідження коливальних процесів необхідні як на стадії проектування машин, так і в процесі їх експлуатації.

**Аналіз останніх досліджень.** На сьогоднішній день механічним колюванням і їх практичному застосуванню присвячено багато наукових досліджень і публікацій [1-3, 5-7, 9]. Але проблема вибору методики досліджень та розрахунків при розв'язанні наукових і технічних задач залишається актуальною.

**Результати досліджень.** У цьому зв'язку енергетичні дослідження коливального руху розкривають не тільки фізичну сутність коливальних процесів, але також надають можливість їх прогнозування та розрахунку.

Для отримання енергетичних співвідношень по-перше запишемо рівняння гармонійного коливального руху, коли узагальнена координата  $q$  і її похідна змінюються пропорційно синусу (косинусу) із аргументом, що лінійно залежить від часу:

$$q = A \cdot \sin(\omega t + \alpha), \quad (1)$$

де  $A$  – амплітуда;  $\omega$  – колова або циклічна частота;  $\alpha$  – початкова фаза колювань.

При цьому будемо вважати амплітуду  $A$  – повільно мінливою функцією, припускаючи, що за один період колювань  $T = \frac{2\pi}{\omega}$

амплітуда мало змінюється у порівнянні з її середнім значенням. Таке припущення дозволяє вважати амплітуду колювань в межах періоду сталою величиною, яка дорівнює середньому її значенню. При цьому вважатимемо, що зміна амплітуди буде відбуватись лише при переході від одного періоду колювань до наступного.

Визначимо зміну механічної енергії  $\Delta E$  гармонійних колювань за відрізок часу  $\Delta t$ , що дорівнює періоду  $T$ :

$$\Delta E = E(t_2) - E(t_1), \quad (2)$$

де  $\Delta t = t_2 - t_1 = T$ .

Для цього складемо диференціальне рівняння

$$m\ddot{q} + cq = Q(\dot{q}, t), \quad (3)$$

де  $m$ ,  $c$  – відповідно інерційний і квазіпружний коефіцієнти;  $Q$  – величина неконсервативної узагальненої сили.

Помножимо ліву і праву частину рівняння (3) на  $\dot{q}dt$ .

В результаті отримаємо:

$$dE = Q\dot{q}dt, \quad (4)$$

Звідки

$$\Delta E = \int_0^T Q \dot{q} dt, \quad (5)$$

де  $Q \dot{q} dt = Q dq$ .

Залежність (5) вказує на те, що величина зміни механічної енергії  $\Delta E$  гармонійного коливального процесу за період  $T$  дорівнює роботі неконсервативних узагальнених сил.

Таким чином, при додатній зміні механічної енергії  $\Delta E$  гармонійного коливального процесу ( $\Delta E > 0$ ) амплітуда коливань буде зростати ( $\Delta A > 0$ ), при від'ємній зміні механічної енергії  $\Delta E$  ( $\Delta E < 0$ ) амплітуда коливань буде зменшуватись ( $\Delta A < 0$ ), а при відсутності зміни ( $\Delta E = 0$ ) амплітуда залишиться постійною ( $\Delta A = 0$ ).

При цьому будемо вважати, що у загальному випадку коливального руху за один період коливань величина зміни механічної енергії  $\Delta E$  може мати дві складові

$$\Delta E = \Delta E_+ + \Delta E_-, \quad (6)$$

Індекс зі знаком мінус параметра  $\Delta E$  означає, що енергія від коливальної системи відбирається, а зі знаком плюс – що енергія до системи надходить.

Розглянемо тепер з позицій енергетичного аналізу коливальної системи найпростіші види змушених гармонійних коливань.

Спочатку розглянемо змушені коливання без опору при дії гармонійної збурювальної сили, величина якої змінюється за законом

$$F(t) = F_0 \sin \omega t. \quad (7)$$

При цьому змушені коливання будуть мати наступний вигляд

$$q = A \sin(\omega t - \gamma), \quad (8)$$

де  $A(\omega)$ ,  $\gamma(\omega)$  – амплітудно-частотна й фазочастотна характеристики змушених коливань.

Нехай величина узагальненої сили  $Q$  буде дорівнювати величині збурювальної сили  $F$  ( $Q = F$ ). Тоді на підставі виразу (5) отримаємо наступне значення додатної механічної енергії

$$\Delta E = \Delta E_+ = \pi A F_0 \sin \gamma. \quad (9)$$

При цьому без урахування дисипативних сил в залежності від співвідношень параметрів  $\omega$  і  $k$  у даному змушеному коливальному процесі можуть бути наступні характерні режими: при  $\omega < k$  (дорезонансний режим),  $\gamma = 0$ ; при  $\omega > k$  (зарезонансний режим),

$\gamma = \pi$ ; при  $\omega = k$  (резонансний режим),  $\gamma = \frac{\pi}{2}$ , де  $k = \sqrt{\frac{c}{m}}$  – циклічна частота вільних (власних) коливань системи;  $\omega$  – циклічна частота збурювальної сили;  $\gamma$  – початкова фаза змушених коливань.

Із виразу (9) цілком зрозуміло, що у випадку  $\omega < k$  або  $\omega > k$  зміна додатної енергії, яка надходить до системи за період коливань, дорівнює нулю ( $\Delta E_+ = 0$ ) і такі змушені коливання будуть усталеними.

Але умова  $\Delta E_+ = 0$  зовсім не означає, що енергія зовнішнього джерела живлення коливального процесу у даному випадку буде відсутня. Адже всередині кожного періоду коливань спостерігається взаємодія між джерелом коливального руху і коливальною системою.

Наприклад, на відрізку  $0,25T$  періоду коливань кінетична і потенціальна енергія по черзі буде досягати наступних максимальних значень:

$$K_{\max} = \frac{\omega^2 mA^2}{2}, \quad (10)$$

$$П_{\max} = \frac{cA^2}{2}. \quad (11)$$

В результаті різниця енергії, що повинна поповнити зовнішнє джерело живлення коливального руху, може бути визначена як

$$\Delta E = \frac{A^2}{2} |c - m\omega^2| = \frac{A^2 m}{2} |k^2 - \omega^2|. \quad (12)$$

Із (12) видно, що чим далі від резонансу знаходиться коливальна система ( $\omega = k$ ), тим більший запас енергії повинно мати джерело її живлення.

У випадку резонансного режиму, коли  $\omega = k$  матимемо наступне значення зміни механічної енергії, що підводиться до коливальної системи

$$\Delta E = \Delta E_+ = \pi A F_0 > 0. \quad (13)$$

Тобто, для цього випадку амплітуда коливань необмежено зростає, а залежність між  $\Delta E_+$  і  $A$  буде лінійною.

Розглянемо тепер змушені коливання при дії гармонійної збурювальної сили  $F(t)$  і сили опору, що змінюється за лінійним законом:

$$Q = -b\dot{q}, \quad (14)$$

де  $b$  – коефіцієнт пропорційності.

У цьому випадку від'ємна величина зміни механічної енергії

$$\Delta E_- = -b \int_0^T \dot{q}^2 dt \quad (15)$$

може бути представлена у формі

$$\Delta E_- = 0,5\psi c A^2, \quad (16)$$

де  $\psi$  – коефіцієнт розсіювання.

Тоді зміна механічної енергії  $\Delta E$  коливальної системи визначається як

$$\Delta E = \Delta E_+ - \Delta E_- = \pi A F_0 \sin \gamma - 0,5 \psi c A^2. \quad (17)$$

У випадку коли  $\Delta E > 0$  амплітуда  $A$  збільшується, а у випадку, коли  $\Delta E < 0$  амплітуда  $A$  зменшується.

При цьому умова  $\Delta E = 0$  відповідає усталеному режиму змушених коливань ( $\Delta E_+ = \Delta E_-$ ).

Залежність (17) і останню умову зручно використовувати для визначення резонансної амплітуди ( $\gamma = \frac{\pi}{2}$ ).

Оскільки при цьому коливання відбуваються із власною частотою, резонанс можна розглядати як вільні коливання, що підтримуються збурювальною силою.

Розглянемо також змушені коливання при дії гармонійної збурювальної сили  $F(t)$  і сталої сили тертя  $P$ .

При цьому механічна енергія, що відводиться від коливальної системи за рахунок сили тертя, буде змінюватись за лінійним законом [6]:

$$\Delta E_- = 4|P|A. \quad (18)$$

Енергія  $\Delta E_+$ , що підводиться до системи, визначається виразом (9).

У найбільш небезпечному випадку резонансу будемо мати

$$\begin{aligned} \Delta E_+ &= \pi A F_0; \\ \Delta E_- &= 4|P|A. \end{aligned} \quad (19)$$

Якщо  $\Delta E_+ = \Delta E_-$  ( $\Delta E = 0$ ), що відповідає умові  $F_0 > \frac{4|P|}{\pi}$ , то амплітуда коливань буде необмежено зростати, а при  $F_0 > \frac{4|P|}{\pi}$  – зменшуватись.

Таким чином, уданому випадку усталений режим неможливий: у системі або  $A = 0$ , або  $A \rightarrow \infty$ . Проте це не означає, що в більш загальному випадку постійна сила опору не буде впливати на резонансну амплітуду.

Наприклад, якщо разом із сталою силою опору буде ще діяти і лінійна сила опору, то за умови  $F_0 > \frac{4|P|}{\pi}$  усталений резонансний режим стане можливим ( $\Delta E = 0$ ).

При цьому

$$\pi A F_0 = 4|P| + 0,5 \psi c A^2. \quad (20)$$

Звідси резонансна амплітуда визначиться як

$$A = \frac{2(\pi F_0 - 4|P|)}{\psi c}. \quad (21)$$

**Висновок.** У даному випадку розглянуті лише найбільш прості види коливального руху при дії гармонійної збурювальної сили. Проте теоретичні дослідження, що пов'язані із аналізом енергетичного балансу коливальних процесів, дають можливість надалі розглянути і більш складні коливання та визначити їх оптимальні режими та параметри.

### Список літератури

1. Бабаков И.М. Теория колебаний / И.М. Бабаков. – М.: Наука, 1968. – 560 с.
2. Бидерман В.Л. Теория механических колебаний / В.Л. Бидерман. – М.: Высшая школа, 1980. – 480 с.
3. Булгаков В.М. Теорія вібраційного викопування коренеплодів / В.М. Булгаков, І.В. Головач // Механізація сільськогосподарського виробництва. – К.: НАУ, 2003. – Т. XIV. – С. 34–86.
4. Василенко П.М. Вибрационный способ уборки корнеплодов / Василенко П.М., Погорелый Л.В., Брей В.В. // Механизация и электрификация социалистического сельского хозяйства. – 1970. – №2. – С. 9–13.
5. Вулфсон И.И. Колебания машин с механизмами циклового действия / И.И. Вулфсон. – Л.: Машиностроение, 1990. – 306 с.
6. Коловский М.З. Динамика машин / М.З. Коловский. – Л.: Машиностроение, 1989. – 263 с.
7. Мангус К. Колебания. Введение в исследование колебательных систем / Мангус К. . Пер. с нем. – М.: Мир, 1982. – 304 с.
8. Павловський М.А. Теоретична механіка : підручник / М.А. Павловський. – К.: Техніка, 2002. – 512 с.
9. Тимошенко С.П. Колебания в инженерном деле / С.П. Тимошенко. Пер. с англ. – М.: Физматгиз, 1959. – 439 с.

*На основе исследования условий энергетического баланса колебательных процессов сельскохозяйственных машин определены характеристики принужденных колебаний под действием гармонической возмущающей силы.*

***Колебательные процессы, возмущающие силы, дифференциальные уравнения, амплитуда, частота.***

*On basis of probe of conditions of power balance of oscillating processes of farm machines characteristics of forced oscillations under influence of harmonic disturbing force are determined.*

***Oscillating processes, disturbing forces, equations, amplitude, frequency.***