України / [М.Д. Мельничук, В.О. Дубровін, В.Г. Мироненко та ін.]. – К: Аграр Медіа Груп, 2011. – 144 с.
4. Технології виробництва біодизеля: [курс лекцій для студ. сільськогосп. вузів] / В.Г. Мироненко, В.О. Дубровін, В.М. Поліщук, С.В. Драгнєв. – К.: Холтех, 2009. – 100 с.
5. Цыганков С.П. Биоэтанол / С.П. Цыганков – К.: ООО "Интерсервис", 2010. – 160 с.
6. BP Statistical Review of World Energy – London, June 2010. – 50 p.

Проанализированы аналоги дизельного топлива, которые производятся из ископаемого сырья. Рассмотрены их преимущества и недостатки. Проведена оценка технологий их производства и использования

Диметиловый эфир, синтетическое дизельное топливо, E-diesel, газодизельный двигатель, смесевое топливо.

The analogues of fuel-oil, which are made from fossil raw material, are analysed. Their advantages and failings are considered. The estimation of technologies of their production and use is conducted.

Dimetiloviy ether, synthetic diesel fuel, E-diesel, gas is a diesel engine, blenderized fuel.

УДК 519.21

СЕРЕДНЄ ЧИСЛО ПЕРЕТИНІВ СІТКИ ПЛОЩИНИ В ЗАДАЧІ БЮФФОНА

Т.А. Скороход, кандидат фізико-математичних наук
Ю.Б.Гнучій, доктор фізико-математичних наук

Розглянуто узагальнення класичної задачі Бюффона на випадок перетину голки з сіткою горизонтальних та вертикальних паралельних прямих на площині, визначено математичне сподівання числа перетинів голки з сіткою прямих на площині і числа кусків, на які ділиться голка сіткою прямих.

Задача Бюффона, голка Бюффона, геометричні ймовірності, експеримент Бюффона.

Класична задача Бюффона: ймовірність перетнути одну з паралельних прямих, відстань між якими *a,* якщо довжина голки *l,* дорівнює $\frac{2l}{\pi a}$ при $l \le a$. Ймовірність не перетнути ніякої лінії – це ймовірність протилежної події: $1-\frac{2l}{\pi a}=\frac{\pi a-2l}{\pi a}$.

Мета роботи – узагальнити класичну задачу Бюффона на випадок перетину голки з сіткою горизонтальних та вертикальних паралельних прямих на площині та оцінити середнє число перетинів голки з сіткою прямих на площині, а також числа кусків, на які поділиться голка.

Розглянемо сітку горизонтальних і вертикальних прямих, відстань між паралельними прямими по горизонталі *a*, вертикалі b. Позначимо кількість перетинів голки паралельними горизонтальними лініями *m*, паралельними вертикальними лініями – k, позначимо число кусків, на які ділиться голка,– *n*. Припустимо, що виконується умова: $l \le a, \quad l \le b$.

1.Знайдемо ймовірність, що голка не поділиться на частини, потрапить між лініями:

$$P(n=1)=P(m=0,k=0)=P(m=0)P(k=0)=(1-\frac{2l}{\pi a})(1-\frac{2l}{\pi b})=\frac{(\pi a-2l)(\pi b-2l)}{\pi^2 ab}.$$

2.Знайдемо ймовірність, що голка поділиться на 2 частини, тобто перетне або тільки горизонтальну лінію, або тільки вертикальну:

$$P(n=2)=P(m=0,k=1)+P(m=1,k=0)=P(m=0)P(k=1)+P(m=1)P(k=0)=$$
$$=(1-\frac{2l}{\pi a})\frac{2l}{\pi b}+(1-\frac{2l}{\pi b})\frac{2l}{\pi a}=\frac{(\pi a-2l)2l+(\pi b-2l)2l}{\pi^2 ab}=\frac{2l(\pi(a+b)-4l)}{\pi^2 ab}.$$

3. Знайдемо ймовірність, що голка поділиться на 3 частини, тобто перетне і горизонтальну лінію, і вертикальну:

$$P(n=3)=P(m=1,k=1)=P(m=1)P(k=1)=\frac{2l}{\pi a}\frac{2l}{\pi b}=\frac{4l^2}{\pi^2 ab}.$$

Події $E_1=\{n=1\}, E_2=\{n=2\}, E_3=\{n=3\}$ утворюють повну групу подій, сума їх ймовірностей дорівнює 1, тобто випадкова величина n приймає тільки три значення. Знайдемо математичне сподівання (середнє значення) цієї величини:

$$M(n)=1\cdot\frac{(\pi a-2l)(\pi b-2l)}{\pi^2 ab}+2\cdot\frac{2l(\pi(a+b)-4l)}{\pi^2 ab}+3\cdot\frac{4l^2}{\pi^2 ab}=$$
$$=\frac{\pi^2 ab-2l\pi b-2l\pi a+4l^2+4l\pi a+4l\pi b-16l^2+12l^2}{\pi^2 ab}=$$
$$=\frac{\pi^2 ab+2l\pi b+2l\pi a}{\pi^2 ab}=\frac{\pi ab+2l(b+a)}{\pi ab}=1+\frac{2l}{\pi a}+\frac{2l}{\pi b}.$$

Середнє число перетинів голки з сіткою горизонтальних і вертикальних прямих площини буде на одиницю менше, тобто

$$M(n-1)=\frac{2l}{\pi a}+\frac{2l}{\pi b}=\frac{2l}{\pi}\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right)$$

4. Розглянемо задачу Бюффона за умови, що голка в декілька разів довша за відстань між паралельними прямими. Нехай максимальне число прямих, що може перетнути голка, дорівнює N, при цьому вона поділиться на $N+1$ частину. Позначимо $\frac{l}{N}=\delta$. Тепер припустимо, що ми кидаємо N голок довжини δ, кожна з яких може перетнути не більше однієї прямої. Знайдемо ймовірність, що вони перетнули *m* прямих, число

перетинів (випадкове) позначимо *n*, тоді число кусків, на які поділиться голка, буде на один більше від числа перетинів:

$$P(n=m)=C_N^m\left(\frac{2\delta}{\pi a}\right)^m\left(\frac{\pi a-2\delta}{\pi a}\right)^{N-m}$$

Тут ми використали формулу Бернуллі для *m* успіхів в серії з N незалежних випробувань. Введемо позначення: $\frac{2l}{\pi a}=\alpha$. Використовуючи це позначення, останню формулу можна представити в такому вигляді:

$$P(n=m)=C_N^m\left(\frac{2\delta}{\pi a}\right)^m\left(\frac{\pi a-2\delta}{\pi a}\right)^{N-m}=C_N^m\left(\frac{2\delta N}{\pi aN}\right)^m\left(1-\frac{2\delta N}{\pi aN}\right)^{N-m}=C_N^m\left(\frac{\alpha}{N}\right)^m\left(1-\frac{\alpha}{N}\right)^{N-m}$$

.

Остаточно,

$$P(n=m)=C_N^m\left(\frac{\alpha}{N}\right)^m\left(1-\frac{\alpha}{N}\right)^{N-m}\text{, де }\frac{2l}{\pi a}=\alpha.$$

Оскільки ми маємо справу з ***біноміальним розподілом випадкової величини*** *n* в серії з N незалежних випробувань, де *m* число успіхів, імовірності $p=\frac{2l}{\pi aN}=\frac{\alpha}{N},\ q=1-p=1-\frac{\alpha}{N}$ відповідно імовірності успіху або невдачі в одному випробуванні, то ***математичне сподівання (середнє значення)*** n ***числа перетинів голки з сіткою горизонтальних прямих*** обчислюється за формулою:

$$M(n)=Np=N\cdot\frac{\alpha}{N}=\alpha=\frac{2l}{\pi a}.$$

Для подальших досліджень може бути корисною також наступна формула:

$$P(n=m)=\left(1-\frac{\alpha}{N}\right)^N\frac{N!}{m!(N-m)!}\left(\frac{N}{\alpha}-1\right)^{-m}=\left(1-\frac{\alpha}{N}\right)^N\frac{N!}{m!(N-m)!}\frac{\alpha^m}{(N-\alpha)^m}.$$

Розглянемо такі випадки:

а) ймовірність не перетнути жодної лінії:

$$P(n=0)=\left(1-\frac{\alpha}{N}\right)^N\frac{N!}{0!(N-0)!}\left(\frac{N}{\alpha}-1\right)^{-0}=\left(1-\frac{\alpha}{N}\right)^N.$$

б) ймовірність перетнути тільки одну лінію:

$$P(n=1)=\left(1-\frac{\alpha}{N}\right)^N\frac{N!}{1!(N-1)!}\frac{\alpha}{(N-\alpha)}=\left(1-\frac{\alpha}{N}\right)^N\frac{N}{1}\frac{\alpha}{(N-\alpha)}=\alpha\left(1-\frac{\alpha}{N}\right)^N\frac{1}{(1-\frac{\alpha}{N})}=$$

$$=\alpha\left(1-\frac{\alpha}{N}\right)^{N-1}.$$

в) ймовірність перетнути точно дві лінії:

$$P(n=2)=\left(1-\frac{\alpha}{N}\right)^N\frac{N!}{2!(N-2)!}\left(\frac{N}{\alpha}-1\right)^{-2}=\left(1-\frac{\alpha}{N}\right)^N\frac{N(N-1)}{2!}\frac{\alpha^2}{(N-\alpha)^2}=$$

$$=\left(1-\frac{\alpha}{N}\right)^{N}\frac{N^{2}(N-1)}{2!N}\frac{\alpha^{2}}{(N-\alpha)^{2}}=\frac{\alpha^{2}}{2!}\left(1-\frac{\alpha}{N}\right)^{N}\frac{(N-1)}{N}\frac{1}{\frac{(N-\alpha)^{2}}{N^{2}}}=$$

$$=\frac{\alpha^{2}}{2!}\left(1-\frac{\alpha}{N}\right)^{N}\left(1-\frac{1}{N}\right)\frac{1}{\left(1-\frac{\alpha}{N}\right)^{2}}=\frac{\alpha^{2}}{2!}\left(1-\frac{\alpha}{N}\right)^{N-2}\left(1-\frac{1}{N}\right).$$

г) ймовірність перетнути точно три лінії:

$$P(n=3)=\left(1-\frac{\alpha}{N}\right)^{N}\frac{N!}{3!(N-3)!}\left(\frac{N}{\alpha}-1\right)^{-3}=\left(1-\frac{\alpha}{N}\right)^{N}\frac{N!}{3!(N-3)!}\frac{\alpha^{3}}{(N-\alpha)^{3}}=$$

$$=\frac{\alpha^{3}}{3!}\left(1-\frac{\alpha}{N}\right)^{N}\frac{N(N-1)(N-2)}{(N-\alpha)^{3}}=\frac{\alpha^{3}}{3!}\left(1-\frac{\alpha}{N}\right)^{N}\frac{N^{3}(N-1)(N-2)}{N^{2}(N-\alpha)^{3}}=$$

$$=\frac{\alpha^{3}}{3!}\left(1-\frac{\alpha}{N}\right)^{N}\left(1-\frac{1}{N}\right)\left(1-\frac{2}{N}\right)\frac{1}{(1-\alpha/N)^{3}}=\frac{\alpha^{3}}{3!}\left(1-\frac{\alpha}{N}\right)^{N-3}\left(1-\frac{1}{N}\right)\left(1-\frac{2}{N}\right).$$

д) ймовірність перетнути точно *m* лінії:

$$P(n=m)=\left(1-\frac{\alpha}{N}\right)^{N}\frac{N!}{m!(N-m)!}\frac{\alpha^{m}}{(N-\alpha)^{m}}=$$

$$=\frac{\alpha^{m}}{m!}\left(1-\frac{\alpha}{N}\right)^{N}\frac{N(N-1)(N-2)}{(N-\alpha)^{m}}=\frac{\alpha^{m}}{m!}\left(1-\frac{\alpha}{N}\right)^{N}\frac{N^{m}(N-1)(N-2)...(N-m+1)}{N^{m-1}(N-\alpha)^{m}}=$$

$$=\frac{\alpha^{m}}{m!}\left(1-\frac{\alpha}{N}\right)^{N}\left(1-\frac{1}{N}\right)\left(1-\frac{2}{N}\right)...\left(1-\frac{m-1}{N}\right)\frac{1}{(1-\alpha/N)^{m}}=$$

$$=\frac{\alpha^{m}}{m!}\left(1-\frac{\alpha}{N}\right)^{N-m}\left(1-\frac{1}{N}\right)\left(1-\frac{2}{N}\right)...\left(1-\frac{m-1}{N}\right)=\frac{\alpha^{m}}{m!}\left(1-\frac{\alpha}{N}\right)^{N-m}\prod_{i=1}^{m}\left(1-\frac{i-1}{N}\right).$$

е) ймовірність перетнути всі N ліній:

$$P(n=N)=C_N^N\left(\frac{2\delta}{\pi a}\right)^{N}\left(\frac{\pi a-2\delta}{\pi a}\right)^{N-N}=\left(\frac{2\delta}{\pi a}\right)^{N}=\left(\frac{2\delta N}{\pi aN}\right)^{N}=\left(\frac{2\delta N}{\pi aN}\right)^{N}=\left(\frac{\alpha}{N}\right)^{N}.$$

ж) ймовірність перетнути $N-1$ лінію:

$$P(n=N-1)=C_N^{N-1}\left(\frac{2\delta}{\pi a}\right)^{N-1}\left(\frac{\pi a-2\delta}{\pi a}\right)=N\left(\frac{2\delta N}{\pi aN}\right)^{N-1}\left(\frac{\pi aN-2\delta N}{\pi aN}\right)=$$

$$=N\left(\frac{2l}{\pi aN}\right)^{N-1}\left(1-\frac{2l}{\pi aN}\right)=N\left(\frac{\alpha}{N}\right)^{N-1}\left(1-\frac{\alpha}{N}\right)$$

5. Нехай є сітка горизонтальних і вертикальних прямих, де відстань між паралельними прямими по горизонталі *a*, по вертикалі *b*. Зв'язок між довжиною голки та відстаню між горизонтальними та вертикальними паралельними прямими на площині може бути яким завгодно, голка може бути як менше, так і більше за відстань між паралельними прямими. Розглянемо випадкову величину *n* – число перетинів голки з сіткою прямих на площині. Ця випадкова величина є сумою двох таких випадкових величин *x* та *y* :

x –число перетинів голки з сіткою горизонтальних паралельних прямих,

y – число перетинів голки з сіткою вертикальних паралельних прямих.

Використаємо таку властивість математичного сподівання: Математичне сподівання суми двох випадкових величин дорівнює сумі їх математичних сподівань. У четвертому пункті нашого дослідження отримана формула для математичного сподівання числа перетинів голки з сіткою паралельних прямих:

$$M(x) = \frac{2l}{\pi a} = \alpha$$

Аналогічно, для математичного сподівання випадкової величини – числа перетинів голки з сіткою вертикальних паралельних прямих маємо:

$$M(y) = \frac{2l}{\pi b} = \beta$$

Остаточно, для суми цих випадкових величин – числа перетинів з горизонтальною та вертикальною сіткою паралельних прямих математичне сподівання дорівнює:

$$M(n) = \alpha + \beta = \frac{2l}{\pi a} + \frac{2l}{\pi b}$$

Таким чином, *середнє значення числа кусків, на які поділиться голка* дорівнює:

$$M(n+1) = 1 + \alpha + \beta = 1 + \frac{2l}{\pi a} + \frac{2l}{\pi b} = 1 + \frac{2l}{\pi}\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b}\right).$$

Висновки

1. Класична задача Бюффона узагальнюється на випадок перетину голки довільної довжини із сіткою горизонтальних та вертикальних паралельних прямих на площині.
2. Визначається математичного сподівання числа перетинів голки з сіткою прямих на площині.
3. Визначається математичне сподівання числа кусків, на які ділиться голка сіткою прямих.
4. Знайдені формули застосовуються в машинобудуванні при обґрунтуванні ступеня подрібнення кущових ягідників.

Список літератури

1. Гихман И.И. Введение в теорию случайных процессов / И.И. Гихман, А.В. Скороход. – М.: Наука, 1977. – 568 с.
2. Кендалл М. Геометрические вероятности /М. Кендалл, П. Моран. – М.:Наука, 1972. – 192 с.

Рассмотрено обобщение классической задачи Бюффона на случай пересечения иглы с сеткой горизонтальных и вертикальных параллельных прямых на плоскости, определено математическое

ожидание числа пересечений иглы с сеткой прямых на плоскости и числа кусков, на которые делится игла сеткой прямых.

Задача Бюффона, игла Бюффона, геометрические вероятности, эксперимент Бюффона.

The generation of classical Buffoon's problem on a lattice of the plane, which is formed by crossing horizontal and vertical straight lines is considered, mathematical expectation of number of intersections of the needle with a lattice on the plane and of the number of pieces on which the needle is divided, are found.

Buffon's problem, Buffon's needle, geometrical probabilities, Buffon's experiment.

УДК 519.21

ПРО КРАЙОВУ ЗАДАЧУ ДЛЯ НЕЛІНІЙНОГО ПАРАБОЛІЧНОГО ДИФЕРЕНЦІАЛЬНОГО РІВНЯННЯ З ЛАПЛАСІАНОМ ЛЕВІ

І. І.Ковтун, кандидат фізико-математичних наук

Запропоновано метод розв'язання крайової задачі для нелінійного параболічного диференціального рівняння з лапласіаном Леві. Розв'язок існує, якщо існує розв'язок рівняння теплопровідності з лапласіаном Леві.

Лапласіан Леві, крайова задача, нелінійне параболічне рівняння, рівняння теплопровідності.

Лапласіан ввів П'єр Лаплас (1749-1827) для функцій скінченного числа змінних. Для функції $u(x,y,z)$ трьох змінних він має вигляд $\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}$. Задачі математичної фізики [4] містять лапласіан. Так, рівняння Лапласа $\Delta u = 0$ описує

- потенціал частини електростатичного поля, що не містить зарядів;
- стаціонарний безвихровий рух потоку нестисливої рідини;
- температуру стаціонарного теплового поля та ін.

Якщо $u(x,y,z,t)$ – температура точки $M(x,y,z)$ у момент часу t, то рівнянням теплопровідності

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \Delta u \quad \left(a^2 = \frac{k}{cp} \text{ – коефіцієнт теплопровідності}\right) \qquad (1)$$