ожидание числа пересечений иглы с сеткой прямых на плоскости и числа кусков, на которые делится игла сеткой прямых.

Задача Бюффона, игла Бюффона, геометрические вероятности, эксперимент Бюффона.

The generation of classical Buffoon's problem on a lattice of the plane, which is formed by crossing horizontal and vertical straight lines is considered, mathematical expectation of number of intersections of the needle with a lattice on the plane and of the number of pieces on which the needle is divided, are found.

Buffon's problem, Buffon's needle, geometrical probabilities, Buffon's experiment.

УДК 519.21

ПРО КРАЙОВУ ЗАДАЧУ ДЛЯ НЕЛІНІЙНОГО ПАРАБОЛІЧНОГО ДИФЕРЕНЦІАЛЬНОГО РІВНЯННЯ З ЛАПЛАСІАНОМ ЛЕВІ

І. І.Ковтун, кандидат фізико-математичних наук

Запропоновано метод розв'язання крайової задачі для нелінійного параболічного диференціального рівняння з лапласіаном Леві. Розв'язок існує, якщо існує розв'язок рівняння теплопровідності з лапласіаном Леві.

Лапласіан Леві, крайова задача, нелінійне параболічне рівняння, рівняння теплопровідності.

Лапласіан ввів П'єр Лаплас (1749-1827) для функцій скінченного числа змінних. Для функції $u(x,y,z)$ трьох змінних він має вигляд $\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}$. Задачі математичної фізики [4] містять лапласіан.

Так, рівняння Лапласа $\Delta u = 0$ описує

- потенціал частини електростатичного поля, що не містить зарядів;
- стаціонарний безвихровий рух потоку нестисливої рідини;
- температуру стаціонарного теплового поля та ін.

Якщо $u(x,y,z,t)$ – температура точки $M(x,y,z)$ у момент часу t, то рівнянням теплопровідності

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \Delta u \quad (a^2 = \frac{k}{cp} \text{ – коефіцієнт теплопровідності}) \tag{1}$$

описується процес тепла, що поширюється в однорідному ізотропному просторі. В необмеженому просторі задача розповсюдження теплоти зводиться до знаходження розв'язку рівняння (1), який задовольняє початкову умову (задача Коші). Початковою є умова

$$u(x,t,z,0)=\varphi(x,y,z). \tag{2}$$

Якщо розглядати задачу розповсюдження теплоти в обмеженому тілі, то враховують умови на границі тіла (крайова задача):

$$u(0,t)=\varphi_1(t). \tag{3}$$

Зокрема задача про розповсюдження сонячної енергії в грунті є задачею, що описується параболічним рівнянням (1) з граничною умовою

$$u(0,t)=A\cos\omega t \quad (0\le x<\infty, \quad -\infty<t).$$

Ця гранична умова враховує те, що коливання температури є періодичними, тому що залежать від зміни дня і ночі, днів, років [1].

У наведених задачах шукана функція залежить від скінченної кількості змінних – однієї, двох чи трьох.

Мета дослідження. У 1919 р. для функцій нескінченної кількості змінних Поль Леві (1886-1971) ввів нескінченновимірний лапласіан — лапласіан Леві [6]. Подальшому широкому вивченню таких операторів сприяв вихід перекладу книги П.Леві [7] російською мовою. Питанням теорії рівнянь і операторів Лапласа-Леві присвячена монографія М.Н.Феллера [5].

У роботах [2], [3] наведено розв'язок задачі Коші, початково-крайової задачі для квазілінійного параболічного рівняння з лапласіаном Леві. Знайдемо розв'язок крайової задачі для нелінійного параболічного диференціального рівняння з лапласіаном Леві.

Методика дослідження. Нехай $H-$нескінченновимірний дійсний сепарабельний гільбертів простір. Розглянемо функцію $F(x)$ двічі сильно диференційовну на H, $x\in H$, для якої в точці x_0 визначений гессіан $F''(x_0)$. Виберемо в H деякий ортонормований базис $\{f_k\}_1^\infty$. Тоді лапласіан Леві, якщо він існує, визначається за формулою [6]:

$$\Delta_L F(x_0)=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}(F''(x_0)f_k,f_k)_H .$$

Розглянемо крайову задачу для нелінійного параболічного диференціального рівняння з лапласіаном Леві:

$$\frac{\partial U(t,x)}{\partial t}=f(\Delta_L U(t,x)) \quad \text{в } \Omega, \quad U(t,x)\big|_\Gamma=G(t,x), \tag{6}$$

де $U(t,x)$ – функція на $[0,\infty)\times\Omega$. Функція $f(\varsigma)$ – це задана неперервна двічі диференційовна функція в області значень $\{\Delta_L U(t,x)\}\subset\mathbf{R}^1$ і така, що рівняння $f(\varsigma)=z$ розв'язне відносно ς, $\varsigma=\varphi(z)$. Функція $G(t,x)$ – задана функція.

Теорема. Нехай область $\overline{\Omega} = \Omega \cup \Gamma$ – це куля $\overline{\Omega} = \left\{x \in H : \|x\|_H^2 \le R^2\right\}$. Нехай функція $\mathrm{T}(x) = \frac{1}{2}\left(R^2 - \|x\|_H^2\right)$. Нехай також рівняння

$$f'\left(\varphi\left(\left.\frac{\partial V(\tau, x)}{\partial \tau}\right|_{\tau = X + T(x)}\right)\right)[t - X] - \mathrm{T}(x) = 0$$

розв'язне відносно $X = \chi(t, x)$, причому $\left.\chi(t, x)\right|_\Gamma = t$. Нехай для заданої функції $G(\tau, x)$ існує розв'язок $V(\tau, x)$ крайової задачі для рівняння теплопровідності, що містить лапласіан Леві:

$$\frac{\partial V(\tau, x)}{\partial t} = \Delta_L V(\tau, x) \quad \text{в } \Omega, \quad \left.V(t, x)\right|_\Gamma = G(t, x). \qquad (7)$$

Тоді розв'язок крайової задачі (6) визначається так:

$$U(t, x) = f\left(\psi(\chi(t, x))\right)[t - \chi(t, x)] - \psi(\chi(t, x))\mathrm{T}(x) + V\left(\chi(t, x) + \mathrm{T}(x), x\right), \qquad (8)$$

де $\psi(\chi(t, x)) = \varphi\left(\left.\frac{\partial V(\tau, x)}{\partial \tau}\right|_{\tau = \chi(t, x) + T(x)}\right)$ ($\psi(z)$ – функція на R^1).

Зауваження. Розв'язок задачі (6) має вигляд (8), якщо розглядати фундаментальну область $\overline{\Omega} = \Omega \cup \Gamma$, де $\Omega = \{x \in H : 0 \le Q(x) < R^2\}$, $\Gamma = \{x \in H : Q(x) = R^2\}$, а функція $Q(x)$ двічі сильно диференційовна і така, що лапласіан Леві від цієї функції дорівнює додатній сталій : $\Delta_L Q(x) = c$. Тоді функція $\mathrm{T}(x)$, яка є в умові теореми, має вигляд:

$$\mathrm{T}(x) = \frac{R^2 - Q(x)}{c}$$

і задовольняє умови:

якщо змінна x належить обмеженій області Ω, то $0 < \mathrm{T}(x) \le \frac{R^2}{c}$, $\Delta_L \mathrm{T}(x) = -1$;

якщо змінна x знаходиться на межі Γ фундаментальної області, то $\mathrm{T}(x) = 0$.

Висновки

Показано, що розв'язок крайової задачі (6) для нелінійного параболічного рівняння з лапласіаном Леві при умовах теореми існує і має вигляд (8), якщо існує розв'язок крайової задачі рівняння теплопровідності з лапласіаном Леві.

Список літератури

1. Долгов Н.М. Высшая математика / Н.М. Долгов. – К.: Вища шк., 1988. – 415 с.
2. Ковтун І.І. Задача Коші для квазілінійного диференціального рівняння з лапласіаном Леві / І.І.Ковтун // International Conference “Dynamical system modeling and stability investigation”. – К., 2009. – С. 65.

3. Ковтун І.І. Початково-крайова задача для квазілінійного параболічного диференціального рівняння з лапласіаном Леві / І.І.Ковтун // Науковий вісник НУБіП України. – 2010. – Вип. 150. – С. 136–141.
4. Тихонов А.Н. Уравнения математической физики / А.Н.Тихонов, А.А.Самарский. – М.: Гос. изд. техн. теор. лит-ры, 1953. – 679 с.
5. Feller M.N. The Levy Laplacian /M.N. Feller. – Cambridge etc: Cambridge University Press, 2005. – 135 p.
6. Levy P. Sur la generalisation l'equation de Laplace dans domaine fonctionnelle / P.Levy // C.R.Acad. Sci. 1919. – V. 168. – P. 752-755.
7. Levy P. Problemes concrets d'analyse fonctionnelle / P.Levy. – Paris: Gauthier-Villars, 1951. – 511 p.

Предложен метод решения краевой задачи для нелинейного параболического уравнения с лапласианом Леви. Причем решение существует, если существует решение уравнения теплопроводности с лапласианом Леви .

Лапласиан Леви, краевая задача, нелинейное параболическое уравнение, уравнение теплопроводности.

We construct a solution of the boundary problems for the nonlinear parabolic equations with Levy Laplacian. The solutions exists if exists a solutions of the boundary value problems with Levy Laplacian.

Levy Laplacian, boundary problems, nonlinear parabolic equation, value problems.

УДК 681.5.07

ДОСЛІДЖЕННЯ ПРАКТИЧНОЇ СТІЙКОСТІ ПАРАМЕТРИЧНИХ МОДЕЛЕЙ ЗІ ЗМІННОЮ СТРУКТУРОЮ

Л.А.Панталієнко, кандидат фізико-математичних наук

Наведено результати досліджень практичної стійкості параметричних систем зі змінною структурою, що здійснюється за допомогою послідовності однозначних та неперервно-диференційовних функцій Ляпунова. Розглянуто постановки задач практичної стійкості, що охоплюють розрахунок допусків на параметри для простору розкидів фазових координат і параметрів.

Системи зі змінною структурою, стійкість, параметри.

При проектуванні малочутливих систем керування часто виникає необхідність в оцінюванні області допусків на параметри $[1,2]$. Так, для