3. Ковтун І.І. Початково-крайова задача для квазілінійного параболічного диференціального рівняння з лапласіаном Леві / І.І.Ковтун // Науковий вісник НУБіП України. – 2010. – Вип. 150. – С. 136–141.
4. Тихонов А.Н. Уравнения математической физики / А.Н.Тихонов, А.А.Самарский. – М.: Гос. изд. техн. теор. лит-ры, 1953. – 679 с.
5. Feller M.N. The Levy Laplacian /M.N. Feller. – Cambridge etc: Cambridge University Press, 2005. – 135 p.
6. Levy P. Sur la generalisation l'equation de Laplace dans domaine fonctionnelle / P.Levy // C.R.Acad. Sci. 1919. – V. 168. – P. 752-755.
7. Levy P. Problemes concrets d'analyse fonctionnelle / P.Levy. – Paris: Gauthier-Villars, 1951. – 511 p.

Предложен метод решения краевой задачи для нелинейного параболического уравнения с лапласианом Леви. Причем решение существует, если существует решение уравнения теплопроводности с лапласианом Леви .

Лапласиан Леви, краевая задача, нелинейное параболическое уравнение, уравнение теплопроводности.

We construct a solution of the boundary problems for the nonlinear parabolic equations with Levy Laplacian. The solutions exists if exists a solutions of the boundary value problems with Levy Laplacian.

Levy Laplacian, boundary problems, nonlinear parabolic equation, value problems.

УДК 681.5.07

ДОСЛІДЖЕННЯ ПРАКТИЧНОЇ СТІЙКОСТІ ПАРАМЕТРИЧНИХ МОДЕЛЕЙ ЗІ ЗМІННОЮ СТРУКТУРОЮ

Л.А.Панталієнко, кандидат фізико-математичних наук

Наведено результати досліджень практичної стійкості параметричних систем зі змінною структурою, що здійснюється за допомогою послідовності однозначних та неперервно-диференційовних функцій Ляпунова. Розглянуто постановки задач практичної стійкості, що охоплюють розрахунок допусків на параметри для простору розкидів фазових координат і параметрів.

Системи зі змінною структурою, стійкість, параметри.

При проектуванні малочутливих систем керування часто виникає необхідність в оцінюванні області допусків на параметри [1,2]. Так, для прискорювально-фокусуючих систем такими параметрами вибирають точки перемкнення $[1,3]$. При цьому умови нормальної працездатності реальної системи можуть конкретизуватися як деякі відомі обмеження на вектор розкиду фазових координат, збуреної траєкторії, функцій чутливості або функціонала якості.

Поширені задачі чутливості пропонується розглядати з позицій практичної стійкості параметричних систем зі змінною структурою $[2,3]$, що дозволяє розв'язувати їх чисельно та здійснювати всебічний аналіз параметричної системи.

Метою роботи є розробка конструктивних методів побудови областей стійкості для параметричних моделей систем диференціальних рівнянь зі змінною структурою.

Припустимо, що динаміка рухомого об'єкта описується системою диференціальних рівнянь вигляду:

$$\frac{dx}{dt} = f^{(i)}(x,t,\alpha)\ ,t \in [t_{i-1},t_i[\,,\ i = 1,2,...,N\,;$$

$$x(t_i + 0) = F_i(x(t_i - 0),t_i,\alpha),\ i = 1,2,...,N-1\,. \qquad (1)$$

Тут $x(t,\alpha)$, α $(\alpha \in G_\alpha)$ − вектори станів і параметрів вимірності n та m відповідно; $f^{(i)}(x,t,\alpha)$, $i = 1,2,...,N$ − n-вимірні вектор-функції, неперервні за своїми аргументами та диференційовані для всіх $t \in [t_{i-1},t_i[$, $i = 1,2,...,N$, крім, можливо, точок перемкнення t_i, $i = 1,2,...,N$ $(t_N = T)$; $F_i(x(t_i - 0),t_i,\alpha)$, $i = 1,2,...,N-1$ − деякі відомі неперервні функції, $x(t_0 + 0) = x(t_0)$.

Будемо вважати нульовий розв'язок $x(t,0) = 0$ незбуреним рухом системи (1) $(0 \in G_\alpha)$, що характеризує розрахункову траєкторію, тобто $f^{(i)}(0,t,0) = 0$, $i = 1,2,...,N$. Нехай Φ_t − множина допустимих станів вектора x у момент часу $t \in [t_0,T]$ ($0 \in \Phi_t$, $[t_0,T]$), а G_0^x, G_0^α − множини допустимих початкових станів і параметрів системи (1) відповідно.

Означення 1. Незбурений розв'язок $x(t,0) = 0$ системи (1) назвемо $\{G_0^x, G_0^\alpha, \Phi_t, t_0, T\}$ - стійким, якщо $x(t,\alpha) \in \Phi_t$, $t \in [t_0,T]$ для будь-яких початкових умов $x(t_0,\alpha) \in G_0^x$ та довільних $\alpha \in G_0^\alpha \subset G_\alpha$.

Якщо обмеження на вектори станів і параметрів сумісного типу (x, $\alpha \in \Phi_{t,\alpha}$, $t \in [t_0,T]$), а оцінка початкової області визначається множиною $G_0^{x,\alpha}$, за аналогією вводиться поняття $\{G_0^{x,\alpha}, \Phi_{t,\alpha}, t_0, T\}$- стійкості.

Означення 2. Незбурений рух $x(t,0) = 0$ системи (1) будемо називати $\{G_0^{x,\alpha}, \Phi_{t,\alpha}, t_0, T\}$- стійким, якщо $x(t)$, $\alpha \in \Phi_{t,\alpha}$, $t \in [t_0,T]$, лише тільки $x(t_0)$, $\alpha \in G_0^{x,\alpha}$.

Дослідження задач стійкості будемо здійснювати за допомогою послідовності однозначних та неперервно-диференційовних функцій Ляпунова $V^{(i)}(x,t,\alpha)$, $t \in [t_{i-1},t_i[$, $i = 1,2,...,N$ $[1-3]$.

Означення 3. Функція $V^{(i)}(x,t,\alpha)$ називається додатно означеною за змінною x на $[t_{i-1},t_i[$, якщо існує додатно означена функція $V_1^{(i)}(x,t)$ така, що $V^{(i)}(x,t,\alpha) \ge V_1^{(i)}(x,t)$ при $\|x\| \ne 0$, $\alpha \in G_\alpha$ та $V^{(i)}(0,t,0) \equiv 0$ для всіх $t \in [t_{i-1}, t_i[$ ($i = 1,2,...,N$). *Означення 4.* Функцію $V^{(i)}(x,t,\alpha)$ назвемо додатно означеною на $[t_{i-1}, t_i[$, якщо

знайдеться така додатно визначена функція $V_2^{(i)}(x,\alpha)$, що $V^{(i)}(x,t,\alpha) \ge V_2^{(i)}(x,\alpha)$ при

$$\left\| \begin{matrix} x \\ \alpha \end{matrix} \right\| \ne 0 \text{ і } V^{(i)}(0,t,0) \equiv 0 \text{ для всіх } t \in [t_{i-1}, t_i[\ (i = 1,2,...,N).$$

Мають місце такі теореми.

Теорема 1. Якщо для системи (1) існують додатно означені за змінною x на $[t_{i-1}, t_i[$ функції $V^{(i)}(x,t,\alpha)$, $i = 1,2,...,N$, для яких виконуються умови

$$\{x: \ V^{(i)}(x,t,\alpha) < 1\} \subset \Phi_t, \ t \in [t_{i-1}, t_i[, \ i = 1,2,...,N, \ \alpha \in G_0^\alpha; \tag{2}$$

$$\frac{\partial V^{(i)}(x,t,\alpha)}{\partial t} + grad_x^* V^{(i)}(x,t,\alpha) f^{(i)}(x,t,\alpha) \le 0 \tag{3}$$

при $x \in \{x: \ V^{(i)}(x,t,\alpha) \le 1\}$, $t \in [t_{i-1}, t_i[$, $i = 1,2,...,N$, $\alpha \in G_0^\alpha$;

$$G_0^x \subset \{x: \ V^{(1)}(x(t_0,\alpha), t_0, \alpha) < 1\}, \ \alpha \in G_0^\alpha; \tag{4}$$

$$V^{(i+1)}(F_i(x(t_i - 0), t_i, \alpha), t_i, \alpha) - V^{(i)}(x(t_i - 0, \alpha), t_i - 0, \alpha) \le 0, \tag{5}$$

$\alpha \in G_0^\alpha$, $i = 1,2,...,N$,

то незбурений розв'язок $x(t,0) = 0$ системи (1) $\{G_0^x, G_0^\alpha, \Phi_t, t_0, T\}$- стійкий.

Доведення. Припустимо, що умови теореми виконуються, але незбурений розв'язок $x(t,0) = 0$ системи (1) не є $\{G_0^x, G_0^\alpha, \Phi_t, t_0, T\}$- стійким. Це означає, що для деякого $\overline{\alpha} \in G_0^\alpha$ існує такий індекс $\bar{i}$: $1 \le \bar{i} \le N$, що в момент часу $\bar{t} \in [t_{\bar{i}-1}, t_{\bar{i}}[$ траєкторія системи (1), яка відповідає параметру $\overline{\alpha} \in G_0^\alpha$, виходить за межі множини $\Phi_{\bar{t}}$. Тоді, згідно з умовою (2), в точці $\bar{t}$ буде виконуватись нерівність $V^{(i)}(x(\bar{t}, \overline{\alpha}), \bar{t}, \overline{\alpha}) \ge 1$. Враховуючи (3)−(5), приходимо до співвідношення $V^{(1)}(x(t_0, \overline{\alpha}), t_0, \overline{\alpha}) \ge 1$, $\alpha \in G_0^\alpha$, що суперечить умові (4).

Отже, наше припущення було неправильним, а твердження теореми мають місце.

Теорема 2. Якщо система диференціальних рівнянь (1) є такою, що для неї можна знайти додатно означені на $[t_{i-1}, t_i[$ функції $V^{(i)}(x,t,\alpha)$, $i = 1,2,...,N$, що задовольняють співвідношення

$$\{x,\alpha: \ V^{(i)}(x,t,\alpha) < 1\} \subset \Phi_{t,\alpha}, \ t \in [t_{i-1}, t_i[, \ i = 1,2,...,N; \tag{6}$$

$$\frac{\partial V^{(i)}(x,t,\alpha)}{\partial t} + grad_x^* V^{(i)}(x,t,\alpha) f^{(i)}(x,t,\alpha) \le 0, \tag{7}$$

коли $\{x,\alpha: \ V^{(i)}(x,t,\alpha) \le 1\} \subset \Phi_{t,\alpha}$, $t \in [t_{i-1}, t_i[$, $i = 1,2,...,N$;

$$G_0^{x,\alpha} \subset \{x,\alpha: \ V^{(1)}(x(t_0,\alpha), t_0, \alpha) < 1\}; \tag{8}$$

$$V^{(i+1)}(F_i(x(t_i - 0), t_i, \alpha), t_i, \alpha) - V^{(i)}(x(t_i - 0, \alpha), t_i - 0, \alpha) \le 0, \ i = 1,2,...,N-1, \tag{9}$$

то незбурений розв'язок системи (1) буде $\{G_0^{x,\alpha}, \Phi_{t,\alpha}, t_0, T\}$- стійким.

Доведення. Запишемо систему (1) у вигляді

$$\frac{dx}{dt}=f^{(i)}(x,t,\alpha),\ \frac{d\alpha}{dt}=0,\ t\in[t_{i-1},t_i[,\ i=1,2,...,N$$

або

$$\frac{dy}{dt}=\tilde{f}^{(i)}(y,t)\ ,t\in[t_{i-1},t_i[,\ i=1,2,...,N, \qquad (10)$$

де $y=\begin{pmatrix}x\\ \alpha\end{pmatrix}$. Припустимо тепер, що умови теореми 2 виконані, але в деякий момент часу $\bar{t}_1\in[t_{\bar{i}-1},t_{\bar{i}}[$ траєкторія системи (10) залишає допустиму область фазових обмежень, тобто $y(t_1)\notin\Phi_{t,\alpha}$. Згідно з умовою (6) та неперервністю функцій Ляпунова $V^{(i)}(x,t,\alpha)$, в точці t_1 буде виконуватись нерівність $\tilde{V}^{(i)}(y(t_1),t_1)\geq 1$ ($\tilde{V}^{(i)}(y(t),t)=V^{(i)}(x(t,\alpha),t,\alpha)$). Використовуючи послідовно умови (7), (9) теореми, остаточно одержимо нерівність $V^{(1)}(x(t_0,\overline{\alpha}),t_0,\overline{\alpha})<1$, що суперечить умові (8) теореми. Теорема доведена.

Як частинний випадок попередніх досліджень розглянемо систему диференціальних рівнянь зі змінною структурою вигляду:

$$\frac{dx}{dt}=f^{(i)}(x,t,\alpha)\ ,t\in[t_{i-1},t_i[,\ i=1,2,...,N;$$

$$x(t_i-0)=F_i(x(t_i-0),t_i,\alpha),\ i=1,2,...,N-1. \qquad (11)$$

Тут $f^{(i)}(x,t,\alpha)$, $i=1,2,...,N$ − вектор-функції вимірності n, що неперервні за своїми аргументами та диференційовні для довільних $t\in[t_{i-1},t_i]$, $i=1,2,...,N$.

Теорема 3. Якщо для системи (11) знайдуться додатно означені за змінною x на $[t_{i-1},t_i[$ функції $V^{(i)}(x,t,\alpha)$, $i=1,2,...,N$ такі, що

$$\{x:\ V^{(i)}(x,t,\alpha)<1\}\subset\Phi_t,\ t\in[t_{i-1},t_i[,\ i=1,2,...,N,\ \alpha\in G_0^{\alpha};$$

$$\frac{\partial V^{(i)}(x,t,\alpha)}{\partial t}+grad_x^{*}V^{(i)}(x,t,\alpha)f^{(i)}(x,t,\alpha)\leq 0$$

при $x\in\{x:\ V^{(i)}(x,t,\alpha)\leq 1\}$, $t\in[t_{i-1},t_i[$, $i=1,2,...,N$, $\alpha\in G_0^{\alpha}$;

$$G_0^{x}\subset\{x:\ V^{(1)}(x(t_0,\alpha),t_0,\alpha)<1\},\ \alpha\in G_0^{\alpha};$$

$$V^{(i+1)}(x(t_i,\alpha),t_i,\alpha)-V^{(i)}(x(t_i-0,\alpha),t_i-0,\alpha)\leq 0,\ \alpha\in G_0^{\alpha},\ i=1,2,...,N-1,$$

то незбурений розв'язок $x(t,0)=0$ системи (10) $\{G_0^{x},G_0^{\alpha},\Phi_t,t_0,T\}$- стійкий.

Теорема 4. Якщо для системи диференціальних рівнянь (10) існують додатно означені на $[t_{i-1},t_i[$ функції $V^{(i)}(x,t,\alpha)$, $i=1,2,...,N$, що задовольняють такі умови:

$$\{x,\alpha:\ V^{(i)}(x,t,\alpha)<1\}\subset\Phi_{t,\alpha},\ t\in[t_{i-1},t_i[,\ i=1,2,...,N;$$

$$\frac{\partial V^{(i)}(x,t,\alpha)}{\partial t}+grad_x^{*}V^{(i)}(x,t,\alpha)f^{(i)}(x,t,\alpha)\leq 0,$$

коли $\{x,\alpha:\ V^{(i)}(x,t,\alpha)\leq 1\}\subset\Phi_{t,\alpha}$, $t\in[t_{i-1},t_i[$, $i=1,2,...,N$;

$$G_0^{x,\alpha}\subset\{x,\alpha:\ V^{(1)}(x(t_0,\alpha),t_0,\alpha)<1\};$$

$$V^{(i+1)}(x(t_i,\alpha),t_i,\alpha)-V^{(i)}(x(t_i-0,\alpha),t_i-0,\alpha)\leq 0,\ i=1,2,...,N,$$

то незбурений розв'язок системи (10) є $\{G_0^{x,\alpha},\Phi_{t,\alpha},t_0,T\}$- стійким.

Для одержання чисельних оцінок областей стійкості слід задати множини початкових умов та параметрів у формі еліпсоїдів [3]: $G_0^x = \{x : x^* Bx \le c^2\}$, $G_0^\alpha = \{\alpha : \alpha^* B_\alpha \alpha \le c_\alpha^2\}$, $G_0^{x,\alpha} = \{x, \alpha : x^* Bx + \alpha^* B_\alpha \alpha \le c^2\}$ (B, B_α − відомі додатноозначені квадратні матриці вимірності n та m відповідно). Тоді незбурений розв'язок $x(t,0)=0$ системи (1) в означенні 1 будемо називати $\{c, B, c_\alpha, B_\alpha, \Phi_t, t_0, T\}$ - стійким, а за наявності сумісних обмежень − досліджувати $\{c, B, B_\alpha, \Phi_{t,\alpha}, t_0, T\}$- стійкість. При цьому обмеження на фазові координати і параметри конкретизуються та здійснюється лінеаризація вихідної системи.

У силу наведених постановок задача оцінювання допусків на параметри являє собою задачу $\{G_0^x, G_0^\alpha, \Phi_t, t_0, T\}$ − стійкості у просторі розкидів векторів станів і параметрів системи. Тому, запропонований підхід можна застосовувати для побудови областей допусків параметричних моделей зі змінною структурою.

Висновки

Наведено достатні умови практичної стійкості параметричних систем зі змінною структурою. Доведено відповідні теореми для випадку розривних і неперервних фазових координат з обмеженнями сумісного та несумісного типів.

Список літератури

1. Гаращенко Ф.Г. Исследование задач теории чувствительности методами практической устойчивости /Ф.Г. Гаращенко, Л.А. Панталиенко //Изд-во АН СССР. Известия АН СССР. Техническая кибернетика. −1989. − №6. − С.17−25.
2. Панталієнко Л.А. Параметрична стійкість руху на скінченому проміжку часу при наявності постійно діючих збурень / Л.А. Панталієнко //Вісник ЖІТІ. Фундаментальні та гуманітарні науки, проблеми освіти. –1999.– №9.– С. 3-7.
3. Самойленко А.М. Дифференциальные уравнения с импульсным воздействием /А.М. Самойленко, Н.А. Перестюк – К.: Вища шк., 1987. – 287 с.

Приведены результаты исследований практической устойчивости параметрических систем с переменной структурой, которые осуществляется с помощью последовательности однозначных и непрерывно-дифференцируемых функций Ляпунова. Рассмотрены постановки задач практической устойчивости, которые включают расчет допусков на параметры для пространства разбросов фазовых координат и параметров.

Системы с переменной структурой, устойчивость, параметры.

The results of studies of practical stability of parametric systems with variable structure, by using a sequence of single-valued and continuous-differentiable Lyapunov functions. The problem of practical stability, covering the calculation of tolerances on the parameters for variation of the phase space coordinates and parameters.

Systems with variable structure, stability, parameters.