УДК 517.51

ЗВ'ЯЗОК МІЖ DT-МОДУЛЕМ ТА ЗВИЧАЙНИМ МОДУЛЕМ ГЛАДКОСТІ

О.Ю. Дюженкова, кандидат фізико-математичних наук

Досліджено зв'язок між DT - модулем гладкості r-ї похідної функції f та звичайним k-м модулем гладкості r-ї похідної періодичної функції $\tilde{f} = f(\cos t)$. Зокрема у випадку, коли k – парне, r – непарне, доведено еквівалентність цих модулів гладкості.

Наближення функцій, конструктивна характеристика, DT-модуль гладкості.

Важливим розділом теорії наближень є конструктивні характеристики класів функцій, які виражаються через оцінки їх рівномірного наближення алгебраїчними многочленами. У випадку рівномірного наближення неперервних на відрізку $[-1;1]$ функцій використовувався k-й модуль неперервності не самої функції $f = f(x)$, а функції $\tilde{f}(t) = f(\cos t)$, тобто $\omega_k(\tilde{f}, t)$ (див. [5]). Проте такі модулі мають певну специфіку, зокрема, якщо f – многочлен степеня $\le k-1$, то $\omega_k(\tilde{f}, t) \ne 0$. Саме тому М.Потапов [3], Б.Сєндов [4] та інші розглядали спеціальні характеристики гладкості. Нарешті З.Дітзіан та В. Тотік ввели найвдалішу із конструкцій – спеціальний модуль гладкості $\overline{\omega}_k(f, t)$, який останнім часом інтенсивно використовується у теорії наближень (див. монографії Ditzian Z., Totik V. [7], De Vore R.A., Lorentz G.G. [8], Шевчука І.О. [6]). Надалі модуль $\overline{\omega}_k(f, t)$ називатимемо DT-модулем гладкості.

Мета дослідження. Для вивчення конструктивних характеристик у термінах модулів гладкості $\overline{\omega}_{k,r}(\tau, f^{(r)})$ і $\omega_k(\tau, \tilde{f}^{(r)})$ потрібно встановити зв'язок між DT-модулем гладкості r-ї похідної функції f та звичайним k-м модулем гладкості r-ї похідної періодичної функції $\tilde{f}(t) = f(\cos t)$.

Методика дослідження. В роботі використовуються методи рівномірного наближення функцій ([1], [6]).

Розглянемо спочатку основні поняття, необхідні для дослідження зв'язку між $\overline{\omega}_{k,r}(\tau, f^{(r)})$ і $\omega_k(\tau, \tilde{f}^{(r)})$. Нехай $C^0_{[a;b]} := C_{[a;b]}$ – простір неперервних на $[a;b] \subset R$ функцій $f:[a;b] \to R$ з рівномірною нормою $\|f\|_{[a;b]} := \max\limits_{x\in[a;b]} |f(x)|$. Позначимо через $C^r_{[a;b]} := \{f \,|\, f^{(r)} \in C_{[a;b]}\}, r \in N$, а

© О.Ю. Дюженкова, 2012

через C^r – підмножину функцій $f \in C_{[-1;1]}$, які мають неперервну r-ту похідну на інтервалі $(-1;1)$. Нехай $k \in N, h \in R$. Розглянемо означення, наведені в роботі [6].

Означення 1. Вираз $\Delta_h^k(g;t) := \sum_{i=0}^{k} (-1)^{k-i} \binom{k}{i} g\left(t - \frac{kh}{2} + ih\right)$ називається *k-ю симетричною різницею функції g* у точці $t \in R$ з кроком h.

Означення 2. *Модулем неперервності (гладкості) k-го порядку* неперервної на R функції g називається функція

$$\omega_k(\tau, g) := \sup_{h\in[0;\tau]} \sup_{t\in R} \left|\Delta_h^k(g;t)\right|, \quad \tau \ge 0.$$

Означення 3. *Модулем неперервності (гладкості) k-го порядку* функції $f \in C_{[a;b]}$ називається функція

$$\omega_k(\tau, f, [a;b]) := \sup_{h\in[0;\tau]} \left\|\Delta_h^k(f;x)\right\|_{[a+\frac{kh}{2};b-\frac{kh}{2}]}, \quad \tau \ge 0.$$

Позначивши $\varphi(x) := \sqrt{1-x^2}$, розглянемо модулі гладкості (неперервності), введені З.Дітзіаном і В. Тотіком [7].

Означення 4. *DT-модулем гладкості k-го порядку* функції $f \in C_{[-1;1]}$ називається функція

$$\overline{\omega}_k(\tau, f) = \sup_{h\in[0;\tau]} \sup_{x:[x-\frac{kh\varphi(x)}{2};x+\frac{kh\varphi(x)}{2}]\subset[-1;1]} \left\|\Delta_{h\varphi(x)}^k(f;x)\right\|_{[a+\frac{kh}{2};b-\frac{kh}{2}]}, \quad \tau \ge 0$$

.

Означення 5. *DT-модулем гладкості k-го порядку з вагою*

$$\varphi_r := \varphi_r(x,k,h) := \left(1 + x - \frac{kh\varphi(x)}{2}\right)^{\frac{r}{2}} \left(1 - x - \frac{kh\varphi(x)}{2}\right)^{\frac{r}{2}}, \quad r \in R,$$

неперервної на $(-1;1)$ функції f називають функцію

$$\overline{\omega}_{k,r}(\tau, f) := \sup_{h\in[0;\tau]} \sup_{x:[x-\frac{kh\varphi(x)}{2};x+\frac{kh\varphi(x)}{2}]\subset(-1;1)} \left\|\varphi_r \Delta_{h\varphi(x)}^k(f;x)\right\|_{[a+\frac{kh}{2};b-\frac{kh}{2}]}, \quad \tau \ge 0.$$

Зауважимо, що $\overline{\omega}_{k,0}(\tau, f) := \overline{\omega}_k(\tau, f)$.

Постає питання, як пов'язані між собою DT-модулі гладкості $\overline{\omega}_{k,r}(\tau, f^{(r)})$ із звичайними модулями $\omega_k(\tau, \widetilde{f}^{(r)})$. Оцінимо DT-модуль гладкості зверху і знизу. Для кожної функції $f \in C_{[-1;1]}$ позначимо $\widetilde{f} := \widetilde{f}(t) = f(\cos t)$. Надалі c_i – сталі, що залежать тільки від k та r.

Наведемо відомі факти, які будуть використані при доведенні наведених нижче теорем 1 і 2 ([1], [6]).

Якщо функція $f \in C^k_{[a;b]}$ і $\left(x - \frac{kh}{2}; x + \frac{kh}{2} \right) \in [a;b]$, то

$$\Delta^k_h(f;x) \le h^k \left\| f^{(k)} \right\|_{[a;b]}.$$

Якщо $P = P(x)$ – многочлен степеня $\le k-1$, то при кожному $j = \overline{0, k-1}$

$$\left\| P^{(j)} \right\|_{[a;b]} \le c_1 (b-a)^{-j} \left\| P \right\|_{[a;b]}.$$

Позначимо через $L := L(x, f; x_0, ..., x_{k-1})$ – многочлен Лагранжа степеня $\le k-1$, що інтерполює функцію f у k точках $x_i = x_0 + ih, i = \overline{0, k-1}$. Якщо $(p+1) \in N$, то для точок $x \in (x_0 - h; x_0 + kh)$ має місце нерівність

$$L^{(p)}(x, f; x_0, ..., x_{k-1}) \le c_2 h^{-p} \max_{i = \overline{0, k-1}} \left| f(x_i) \right|.$$

Із властивостей k-го модуля гладкості $\omega_k(\tau, \widetilde{f}^{(r)})$ випливають нерівності

$$\tau_1^{-k} \omega_k(\tau_1, \widetilde{f}^{(r)}) \le 2^k \tau_2^{-k} \omega_k(\tau_2, \widetilde{f}^{(r)}), \quad 0 < \tau_2 < \tau_1;$$

$$\omega_k(\tau, \widetilde{f}^{(r)}) \le \tau^j \omega_{k-j}(\tau, \widetilde{f}^{(r)}), \quad j = \overline{0, k-1}.$$

Аналогічні співвідношення мають місце і для DT-модуля гладкості $\overline{\omega}_{k,r}(\tau, f^{(r)})$ ([7], [6]), а саме:

$$\tau_1^{-k} \overline{\omega}_{k,r}(\tau_1, f) \le c_3 \tau_2^{-k} \overline{\omega}_{k,r}(\tau_2, f), \quad 0 < \tau_2 < \tau_1, \quad (r+1) \in N;$$

$$\overline{\omega}_{m-p,p}(\tau, f^{(p)}) \le c_4 \tau^{r-p} \overline{\omega}_{k,r}(\tau, f^{(r)}), \quad m = k + r, \quad p = \overline{0, k-1}.$$

Розглянемо оцінку DT-модуля гладкості зверху.

Теорема 1. *Для будь-яких $k \in N, r \in N$ і довільної функції $f \in C_{[-1;1]}$, для якої $\widetilde{f}^{(r)}(t)$ неперервна на R, має місце оцінка*

$$\overline{\omega}_{k,r}(\tau, f^{(r)}) \le c_5 \omega_k(\tau, \widetilde{f}^{(r)}), \quad \tau \ge 0. \tag{1}$$

Отже, будь-яка пряма оцінка для модуля гладкості $\overline{\omega}_{k,r}(\tau, f^{(r)})$ краща, ніж для $\omega_k(\tau, \widetilde{f}^{(r)})$.

Оцінимо тепер DT-модуль гладкості знизу. Позначимо $\left\| f \right\| := \left\| f \right\|_{[-1;1]}$, $m = k + r$.

Теорема 2. *Для будь-яких $k \in N, r \in N$ і довільної функції $f \in C^r$ мають місце оцінки*

$$\omega_k(\tau, \widetilde{f}^{(r)}) \le c_6 \left(\overline{\omega}_{k,r}(\tau, f^{(r)}) + \tau^k \left\| f \right\| \right), \quad \tau \ge 0, \tag{2}$$

якщо k – парне, r – непарне;

$$\omega_k(\tau,\widetilde{f}^{(r)}) \le c_7\left(\tau^k \int_\tau^2 \frac{\overline{\omega}_{k,r}(u,f^{(r)})}{u^{k+1}}du + \tau^k\|f\|\right), \quad 0 \le \tau \le 2, \tag{3}$$

якщо k *– непарне,* r *– непарне;*

$$\omega_k(\tau,\widetilde{f}^{(r)}) \le c_8\left(\int_0^\tau \frac{\overline{\omega}_{k,r}(u,f^{(r)})}{u}du + \tau^k\|f\|\right), \quad \tau \ge 0, \tag{4}$$

якщо k *– непарне,* r *– парне;*

$$\omega_k(\tau,\widetilde{f}^{(r)}) \le c_9\left(\int_0^\tau \frac{\overline{\omega}_{k,r}(u,f^{(r)})}{u}du + \tau^k \int_\tau^2 \frac{\overline{\omega}_{k,r}(u,f^{(r)})}{u^{k+1}}du + \tau^k\|f\|\right), \quad \tau \ge 0, \tag{5}$$

якщо k *– парне,* r *– парне.*

Зауважимо, що у випадку $m=1$, тобто $r=0, k=1$, має місце більш точна оцінка:

$$\omega_1(\tau,\widetilde{f}) \le c_6'\overline{\omega}_1(\tau,f), \quad \tau \ge 0.$$

Зв'язок між DT-модулями гладкості $\overline{\omega}_{k,r}(\tau,f^{(r)})$ та звичайними модулями гладкості $\omega_k(\tau,\widetilde{f}^{(r)})$ досліджувався також в інших роботах ([2]).

Висновки

Оцінки (1) – (5) означають, що прямі та обернені теореми конструктивної теорії наближення функцій в термінах $\overline{\omega}_{k,r}(\tau,f^{(r)})$ випливають із відповідних теорем у термінах $\omega_k(\tau,\widetilde{f}^{(r)})$, і навпаки. Зокрема доведено, що DT-модуль гладкості $\overline{\omega}_{k,r}(\tau,f^{(r)})$ еквівалентний звичайному модулю гладкості $\omega_k(\tau,\widetilde{f}^{(r)})$ (для функції $\widetilde{f}=f(\cos t)$) у випадку, коли k – парне, r – непарне.

Список літератури

1. Дзядык В.К. Введение в теорию равномерного приближения функций полиномами / В.К. Дзядык. – М.: Наука, 1977.– 512 с.
2. Дюженкова О.Ю. Замечание о модуле гладкости З. Дитзиана и В. Тотика/ О.Ю.Дюженкова // Укр. мат. журнал. – 1995.– 47, № 12. – С.1627–1638.
3. Потапов М.К. Приближение полиномами на конечном интервале действительной оси / М.К. Потапов // Конструктивная теория функций. – Варна, 1981. – С. 134–138.
4. Сендов Б. Усредненные модули гладкости / Б. Сендов, В. Попов – М.: Мир, 1988. – 328 с.
5. Фуксман Л. Структурная характеристика функций, у которых $E_n(f;-1;1) \le Mn^{-(k+\alpha)}$/ Л. Фуксман // Успехи мат. наук.– 1965. – 20, № 4. – С. 187–190.
6. Шевчук И.А. Приближение многочленами и следы непрерывных на отрезке функций / И.А.Шевчук. – К.: Наук. думка, 1992. – 223 с.
7. Ditzian Z. Moduli of smoothness/ Ditzian Z., Totik V. Springer-Verlag, New York/Berlin, 1987. – 300 p.

8. De Vore R.A. Constructive Approximation/ De Vore R.A., Lorentz G.G. Springer-Verlag, New York/Berlin, 1993. – 356 p.

Исследована связь между DT-модулем гладкости r*-й производной функции* f *и обычным* k*-модулем гладкости* r*- й производной периодической функции* $\widetilde{f} = f(\cos t)$*. В частности, в случае, когда* k *– четное,* r *– нечетное, доказана эквивалентность этих модулей гладкости.*

Приближение функций, конструктивная характеристика, DT-модуль гладкости.

We investigate the relation between DT-module of smoothness of the r*-s derivative of the function* f *and usual module of smoothness of the* r*-s derivative of the periodic function* $\widetilde{f} = f(\cos t)$*. In particular, we prove the equivalence of modules of smoothness, when* k *– even,* r *– odd.*

Function approximation, constructive characteristic, modules of smoothness.

УДК 535.3

ЗАСТОСУВАННЯ АНАЛІТИЧНОГО ПІДХІДУ ДО ГРАНИЧНОЇ ПОЛЯРИЗОВАНОСТІ ГЕТЕРОГЕННИХ СИСТЕМ

О.Ю. Грищук, кандидат фізико-математичних наук
Інститут хімії поверхні НАН України
С.В. Стеценко, старший викладач
Національний університет біоресурсів і природокористування України

Отримано аналітичний розв’язок рівнянь Максвелла для діелектричної системи сферичних частинок у середовищі, розміщеному між двома паралельними пластинами, на які подається змінна напруга низької частоти. Цей розв’язок одержано із відповідної крайової задачі для функції Гріна. Всі мультипольні моменти та електричне поле виражені у термінах потенціалу, прикладеного до пластин і матриці, яка залежить від конфігурації системи.

Сферична частинка, діелектрична система, мультипольний момент.

Вивчення електричного відгуку гетерогенних середовищ має довгу історію, починаючи із робіт Пуасона, Моссотті, Клаузіуса, Лоренца, Максвелла [3], Гарнетта, Вагнера. У всіх цих роботах, в основному, отримані еквівалентні результати, хоча в основу кожної покладено дещо

© О.Ю. Грищук, С.В. Стеценко, 2012