ваної технології провадження процесу на основі використання інтелектуальної системи автоматизованого керування (САК).

Список літератури

1. Кирпа Н. Использование энергии в процессах хранения и обработки зерна. [Електронний ресурс]. – Режим доступу. – http://www.lol.org.ua/rus/fruits

2. Луцик І.Б. Використання активного вентилювання при зберіганні зерна / І.Б. Луцик // Наук. вісник НУБіП. Серія «Техніка та енергетика АПК». – К., 2010. – Вип. 153. – С. 221–228.

3. Мовчан А.П. Адаптивні та параметрично-оптимальні системи управління: навч. посіб. / А.П.Мовчан, О.В. Степанець. – К.: НТУУ «КПІ», 2011. – 108 с.

4. Новые подходы к автоматизации предприятий по перевалке и хранению зерна / Компания «С-инжиниринг» [Електронний ресурс]. – Режим доступу: http://sengineering.com.ua/index.php?option=com_content&task=view&id=570

5. Технология хранения зерна в охлажденном состоянии [Електронний ресурс]. – Режим доступу: http://www.zanotti.kiev.ua/print

Предложен адаптивный алгоритм определения необходимой производительности вентилятора в зависимости от соотношения параметров состояния зерновой массы с использованием интеллектуального регулятора, что обеспечивает энергосбережение технологического процесса и сохранения качественных показателей зерна.

Адаптивные алгоритмы управления, активное вентилирование, самосогревание, зерновые вредители, энергозатраты.

An proposed an adaptive algorithm to determine the required fan capacity, depending on the ratio of the state parameters of the grain using intelligent controller that provides the energy-saving process and maintain grain quality indicators.

Adaptive control algorithms, active ventilation, self-warming, grain pests, energy expenses.

УДК 517.958

ДОСЛІДЖЕННЯ МЕТОДОМ ПОТЕНЦІАЛІВ ПЛОСКИХ ДЕФОРМАЦІЙ У ЗАДАЧАХ ЛІНІЙНОЇ В'ЯЗКОПРУЖНОСТІ

О.М. Нещадим, кандидат фізико-математичних наук
Ю.Б. Гнучій, доктор фізико-математичних наук

Для задачі про плоскі деформації в'язкопружного матеріалу абелівського типу отримано систему гранично-часових інтегральних рівнянь другого роду. Запропоновано алгоритм розв'язування цієї системи.

В'язкопружність, ядро релаксації, модель Работнова, функція релаксації, в'язкопружний потенціал, фундаментальний розв'язок, щільність потенціалу, ядро інтегрального рівняння, рухома межа.

Методом потенціалів успішно розв'язано багато прикладних задач математичної фізики [1,5]. У цій роботі розвивається метод потенціалів для розв'язування крайової задачі лінійної в'язкопружності.

Мета досліджень – отримання граничних інтегральних рівнянь для початково-крайової задачі про в'язкопружні деформації плоскої області з рухомою межею.

Матеріали та методика досліджень. Використовувались теоретичні положення математичної фізики і методи теорії потенціалів. Розглядались в'язкопружні матеріали із реологічними ядрами Абеля, запропонованими Ю.М. Работновим.

Нехай суцільне середовище, що складається з однорідного, ізотропного, нестаріючого в'язкопружного матеріалу із неперервною пам'яттю, заповнює циліндричне тіло поперечного перерізу $D(0)$. Вважається, що матеріал є нестаріючим (його властивості не змінюються з часом), а пам'ять – затухаючою. Обмежившись лише малими деформаціями такого середовища, дослідимо задачу про плоскі деформації.

Довільна геометрична точка M плоскої в'язкопружної області $D(\tau)$ у момент часу $\tau > 0$ збігається з радіус-вектором $\vec{y}(\tau) = \vec{e}^{\,k} y_k(\tau)$, тут $\{\vec{e}^{\,1}, \vec{e}^{\,2}\}$ – декартів базис. Загальне напруження за проміжок часу $0 < \tau < t$ у цій матеріальній частинці, спричинене її деформацією в момент часу τ і подальшою релаксацією напружень, визначається тензором напружень [3]:

$$\Pi(\vec{y}(t),t) = \int_0^t \{E[kh(t-\tau) - \frac{2}{3}\mu q(t-\tau)] div\ \vec{v}(\vec{y}(\tau),\tau) + \\ +2\mu q(t-\tau) Def\ \vec{v}(\vec{y}(\tau),\tau)\} d\tau, \tag{1}$$

де μ – миттєво-пружний модуль зсуву; $\lambda = k - \frac{2}{3}\mu$ – миттєво-пружна стала Ламе; k – миттєвий модуль об'ємної деформації; E – одиничний тензор; $Def\ \vec{v}(\vec{y}(\tau),\tau) = \frac{1}{2}\left(\nabla\vec{v} + (\nabla\vec{v})^T\right)$ – тензор швидкості деформації; $\vec{v} \equiv \vec{v}(\vec{y}(\tau),\tau)$ – вектор швидкості частинки M у момент часу τ; $\nabla = \vec{e}^{\,k} \frac{\partial}{\partial y_k}$ – оператор Гамільтона. Функції $q(t)$ і $h(t)$ характеризують реологічні властивості матеріалу і називаються ядрами зсувної та об'ємної релаксації відповідно; вони визначені при $t \ge 0$, є невід'ємними і монотонно спадними. Приймемо $h(t) = 0$, оскільки об'ємна релаксація більшості в'язкопружних матеріалів є несуттєвою. Вважатимемо, що в'язкопружна поведінка матеріалу узгоджується з реологічною моделлю Ю.М. Работнова:

$$q(t) = \frac{ct^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}, \tag{2}$$

де $c>0,\ \alpha\in(0,\ 1)$ – параметри матеріалу; $\Gamma(\alpha)$ – гамма-функція.

Нехай швидкості і зміщення частинок, що відбуваються в матеріальному тілі за період релаксації, а також похідні по координатах від зміщень до другого порядку включно є малими величинами і в початковий момент часу $t=0$ тіло вважаємо вільним від напружень. Тому наближено можемо прийняти

$$\vec{v}(M,\tau)\approx\vec{v}(\vec{y},\tau)\approx\frac{\partial u(\vec{y},\tau)}{\partial\tau},\quad \overset{\tau}{\nabla}\approx\nabla,$$

де позначено: $\vec{y}\equiv\vec{y}(t),\ \vec{u}(\vec{y},\tau)=\vec{e}^{\,k}u_k$ – вектор зміщення. Величини $(y_1,y_2;t)$ – основні незалежні змінні (змінні Ейлера).

Квазістатичне рівняння руху

$$div\Pi(\vec{y},t)+\rho(\vec{y},t)\vec{m}(\vec{y},t)=\vec{0}$$

такого в'язкопружного середовища набуває такого вигляду:

$$\mu\Delta\vec{u}(\vec{y},t)+(\lambda+\mu)graddiv\vec{u}(\vec{y},t)-\mu\int_0^t q(t-\tau)[\Delta\vec{u}(\vec{y},\tau)+$$

$$+\frac{1}{3}graddiv\vec{u}(\vec{y},\tau)]d\tau+\vec{f}(\vec{y},t;\vec{u})=\vec{0}, \tag{3}$$

тут

$$\vec{f}(\vec{y},t;\vec{u})=\rho_0\vec{m}(\vec{y},t)[1-div\vec{u}(\vec{y},t)], \tag{4}$$

$\vec{m}(\vec{y},t)$ – інтенсивність масових сил; $\rho_0=\rho(\vec{y},0)$ – густина матеріалу; $\Delta=\dfrac{\partial^2}{\partial y_1^2}+\dfrac{\partial^2}{\partial y_2^2}$ – оператор Лапласа.

Нехай у точках контуру $L(t)$ задано вектор напружень $\vec{p}_n(\vec{x},t)$:

$$\vec{n}\cdot\Pi(\vec{x},t)=\vec{p}_n(\vec{x},t),\ \ \vec{x}\in L(t),\ \ t\ge 0,$$

де $\vec{n}$ – нормаль до контуру $L(t)$ в його точці $\vec{x}$. Цю граничну умову, яка доповнює рівняння (3), запишемо в іншій формі:

$$\begin{aligned}&2\mu Def\ \vec{u}(\vec{x},t)+\lambda\vec{n}div\ \vec{u}(\vec{x},t)-\int_0^t\{2\mu q(t-\tau)Def\ \vec{u}(\vec{x},\tau)-\\&-\frac{2}{3}\mu q(t-\tau)\vec{n}\ div\ \vec{u}(\vec{x},\tau)\}d\tau=\vec{p}_n(\vec{x},t).\end{aligned} \tag{5}$$

Із зростанням часу $t>0$ межа $L(t)$ області $D(t)$ зміщується. Закон зміни контуру $L(t)$ будемо описувати векторним рівнянням

$$\vec{x}=\vec{x}(l,t), \tag{6}$$

причому

$$\vec{x}(l,0)=\overset{\circ}{\vec{x}}(l),$$

де $\overset{\circ}{\vec{x}}(l)$ – задана неперервна функція; l – довжина контуру $L(t)$ у початковий момент часу $t=0$ ($0<l\le a=const$). При цьому довжина дуги $s(l,t)$ кривої $L(t)$ обчислюється за формулою

$$s(l,t)=\int_0^l\left|\frac{\partial\vec{x}(l,t)}{\partial l}\right|dl\,.$$

Нехай $\vec{v}(l,t)$ - довільна неперервна векторна функція довжини дуги l і часу t. Розв’язок задачі (3), (5) шукатимемо у вигляді в’язкопружних потенціалів

$$\vec{u}(\vec{y},t)=\vec{u}[\vec{f}]+\sum_{k=1}^{2}\vec{e}^{k}\int_0^t d\tau\int_{L(\tau)}\vec{v}(l,\tau)\cdot\vec{v}^{(k)}(\vec{y}-\vec{x};t-\tau)dl\,, \tag{7}$$

тут

$$\vec{u}[\vec{f}]=\sum_{k=1}^{2}\vec{e}^{k}\int_0^t d\tau\iint_{D(\tau)}\vec{v}^{(k)}(\vec{y}-\vec{x};t-\tau)\cdot\vec{f}(\vec{x},\tau)ds\,, \tag{8}$$

контур $L(\tau)$ визначається поки що невідомою функцією (6); через $\vec{v}^{(k)}(\vec{y}-\vec{x};t-\tau)$ позначено фундаментальний розв’язок рівняння (3), який визначається за умови $\vec{f}(\vec{y},t)=\vec{e}^{k}\delta(t-\tau)\delta(\vec{y}-\vec{x})$.

Аналогічно роботі [4] фундаментальний розв’язок у випадку ядер релаксації (2) можна виразити через дві скалярні функції $\omega(\vec{x},t)$ і $\varphi(\vec{x},t)$:

$$4\pi\vec{v}^{(1)}(\vec{x}-\vec{y},t-\tau)=rot\ \vec{e}^{3}\,\frac{\partial\omega(\vec{x}-\vec{y},t-\tau)}{\partial x_2}+grad\,\frac{\partial\varphi(\vec{x}-\vec{y},t-\tau)}{\partial x_1},$$

$$4\pi\vec{v}^{(2)}(\vec{x}-\vec{y},t-\tau)=-rot\ \vec{e}^{3}\,\frac{\partial\omega(\vec{x}-\vec{y},t-\tau)}{\partial x_1}+grad\,\frac{\partial\varphi(\vec{x}-\vec{y},t-\tau)}{\partial x_2}.$$

Ці функції мають такий вигляд:

$$4\pi\varphi(\vec{x},t)=\frac{3r^2(1-\ln r)}{2(3k+4\mu)}\left[\delta(t)+\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{4c\mu}{3k+4\mu}\right)^{n}\frac{t^{n\alpha-1}}{\Gamma(n\alpha)}\right]-\psi_0(\vec{x},t);$$

$$4\pi\omega(\vec{x},t)=\frac{r^2(1-\ln r)}{2\mu}\left[\delta(t)+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{c^n t^{n\alpha-1}}{\Gamma(n\alpha)}\right]-\psi_0(\vec{x},t),$$

де позначено

$$\psi_0(\vec{x},t)=\frac{r^2}{8\mu}\left\{\frac{3k+\mu}{3k+4\mu}\delta(t)+\sum_{n=1}^{\infty}\left[1-\frac{3}{4}\left(\frac{4\mu}{3k+4\mu}\right)^{n+1}\right]\frac{c^n t^{n\alpha-1}}{\Gamma(n\alpha)}\right\},\quad r=|\vec{x}-\vec{y}|.$$

Окрім основної нерухомої декартової системи $\{\vec{e}^{1},\,\vec{e}^{2}\}$ приймемо ще дві місцеві координатні системи $\{\vec{n},\,\vec{s}\}$ і $\{\vec{n}_0,\,\vec{s}_0\}$, пов’язані відповідно із змінною $\vec{x}$ і фіксованою $\vec{x}^{0}$ точками гладкого контуру $L(t)$. Припустимо, що $\vec{v}(l,t)=\vec{n}v_1(l,t)+\vec{s}v_2(l,t)$ і підставимо вираз (7) у граничну умову (5); приходимо до системи інтегральних рівнянь відносно компонент шуканоївекторної щільності $\vec{v}(l,t)$ потенціалу:

$$\pi v_1(l_0,t)+\int\limits_{L(t)}\sum_{i=1}^{2}v_i(l,t)K_{1i}(l,l_0;t)\left|\frac{\partial\vec{x}(l,t)}{\partial l}\right|dl+$$

$$+\int\limits_0^t\tilde{k}(t-\tau)d\tau\int\limits_{L(\tau)}\sum_{i=1}^{2}v_i(l,\tau)k_{1i}(l,l_0;t,\tau)\left|\frac{\partial\vec{x}(l,\tau)}{\partial l}\right|dl=\psi_1(l_0,t); \qquad (9)$$

$$\pi v_2(l_0,t)+\int\limits_{L(t)}\sum_{i=1}^{2}v_i(l,t)K_{2I}(l,l_0;t)\left|\frac{\partial\vec{x}(l,t)}{\partial l}\right|dl+$$

$$+\int\limits_0^t\tilde{k}(t-\tau)d\tau\int\limits_{L(\tau)}\sum_{i=1}^{2}v_i(l,\tau)k_{2i}(l,l_0;t,\tau)\left|\frac{\partial\vec{x}(l,\tau)}{\partial l}\right|dl=\psi_2(l_0,t).$$

Ядра $K_{ij}(l,l_0;t)$ і $k_{ij}(l,l_0;t,\tau)$у цих рівняннях та функція $\tilde{k}(t)$ мають вигляд:

$$K_{11}(l,l_0;t)=\frac{1}{r(t)}\left[(1-3\mu_0)\cos\gamma+\cos\gamma\cos 2\gamma_0+3\mu_0\sin\gamma\sin 2\gamma_0\right];$$

$$K_{12}(l,l_0;t)=\frac{1}{r(t)}\left[(1-3\mu_0)\sin\gamma+\sin\gamma\cos 2\gamma_0-3\mu_0\cos\gamma\sin 2\gamma_0\right];$$

$$K_{21}(l,l_0;t)=\frac{1}{r(t)}\left[\cos\gamma\sin 2\gamma_0-3\mu_0\sin\gamma\cos 2\gamma_0\right];$$

$$K_{22}(l,l_0;t)=\frac{1}{r(t)}\left[\sin\gamma\sin 2\gamma_0+3\mu_0\cos\gamma\cos 2\gamma_0\right]; \qquad (10)$$

$$k_{11}(l,l_0;t,\tau)=\frac{3\mu_0}{r(\tau)}\left[\cos\gamma-\sin\gamma\sin 2\gamma_0\right];$$

$$k_{12}(l,l_0;t,\tau)=\frac{3\mu_0}{r(\tau)}\left[\sin\gamma+\cos\gamma\sin 2\gamma_0\right];$$

$$k_{21}(l,l_0;t,\tau)=\frac{3\mu_0}{r(\tau)}\sin\gamma\cos 2\gamma_0,;$$

$$k_{22}(l,l_0;t,\tau)=-\frac{3\mu_0}{r(\tau)}\cos\gamma\cos 2\gamma_0;$$

$$\tilde{k}(t)=\frac{3k}{4\mu}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{4c\mu}{3k+4\mu}\right)^n\frac{t^{n\alpha-1}}{\Gamma(n\alpha)},$$

тут $r=r(t)=\left|\vec{x}(l,t)-\vec{x}(l_0,t)\right|$, $\gamma=(\vec{r}\,\hat{,}\,\vec{n})$, $\gamma_0=(\vec{r}\,\hat{,}\,\vec{n}_0)$.

Праві частини $\psi_1(l_0,t)$ та $\psi_2(l_0,t)$ системи рівнянь (10) є відповідно нормальною та дотичною компонентами функції

$$\vec{\psi}(l_0,t) \equiv \vec{n}_0\psi_1(l_0,t) + \vec{s}_0\psi_2(l_0,t) = 2\pi\vec{p}_n(l_0,t) + \vec{g}[\vec{f}\,],$$

де вираз $\vec{g}[\vec{f}\,]$ одержується із лівої частини співвідношення (5), якщо туди підставити замість $\vec{u}$ функцію (8).

При чисельному розв'язуванні одержаної системи інтегральних рівнянь другого роду (10) застосовується метод “кроків за часом” [2]. Згідно з цим методом, у кожен момент часу послідовно розв'язуються два рівняння Фредгольма другого роду відносно компонент векторної щільності $\vec{v}(l,t)$. За знайденими щільностями в момент часу $t = t_k$ обчислюються переміщення $\vec{u}(\vec{x},t_k)$ точок межі області $D(t)$. Знаючи ці переміщення, за наближеною формулою

$$\vec{x}(l,t_{k+1}) \approx \vec{u}(\vec{x},t_k) + \vec{x}^0(l), \quad k = 0,1,2,\ldots$$

визначаються координати точок рухомої межі $L(t)$ у наступний момент часу $t = t_{k+1}$. На кожному наступному кроці обчислень замість функції $\vec{u}(\vec{x},t)$, яка міститься у виразі (4) функції $\vec{f}(\vec{x},t;\vec{u})$, потрібно підставляти значення, обчислені в попередній момент часу.

Результати досліджень. Побудовано систему гранично-часових інтегральних рівнянь другого роду для задачі про плоскі в'язкопружні деформації. Наведено вигляд ядер цих рівнянь у випадку реологічної моделі Ю.Н. Работнова. Одержана система допускає покрокове (за часом) чисельне розв'язування.

Висновки

Однією із особливостей крайових задач в'язкопружності є рухома межа області. Метод потенціалів дає змогу ефективно розв'язувати такі задачі.

Список літератури

1. Белоносов С.М. Применение интегральных представлений к решениям задач теплопроводности и динамики вязкой жидкости/ Белоносов С.М., Овсиенко В.Г., Карачун В.Я. – К.: Выща шк., 1989. – 163 с.

2. Белоносов С.М. Исследование методами теории потенциалов плоских течений диэлектрической несжимаемой жидкости./ Белоносов С.М. // В кн.: Вопросы точности и эффективности вычислительных алгоритмов: труды симпозиума. – К., 1969. – Т.3. – С. 3–16.

3. Нещадим О.М. Граничні інтегральні рівняння для задач про плоскі деформації в'язкопружного циліндричного тіла. / О.М. Нещадим, Ю.Б. Гнучій //Науковий вісник НУБіП України. Серія “Техніка та енергетика АПК”. – 2011. – Вип.166, ч. 3. – С.235–242.

4. Нещадим О.М. Фундаментальний розв'язок інтегро-диференціального рівняння динаміки в'язкопружного середовища, яке характеризується моделлю Работнова. / О.М. Нещадим, Ю.Б. Гнучій //Науковий вісник НУБіП України. Серія “Техніка та енергетика АПК”. – 2012. – Вип.174, ч. 2. – С.239–245.

5. Теллес Д. Применение метода граничних элементов для решения неупругих задач/ Теллес Д. – М.: Стройиздат, 1987. – 159 с.

Для задачи о плоских деформациях вязкоупругого материала абелевского типа получена система гранично-временных интегральных уравнений второго рода. Предложен алгоритм решения данной системы.

Вязкоупругость, ядро релаксации, модель Работнова, функция релаксации, вязкоупругий потенциал, фундаментальное решение, плотность потенциала, ядро интегрального уравнения, подвижная граница.

For a problems about plane deformations of viscoelastic material of the Abelian type the system of second type boundary-time integral equations is got t. The algorithm of decision of this system is offered.

Viscoelasticity, kernel of relaxation, model of Rabotnov, function of relaxation, viscoelastic potential, fundamental solution, density of potential, kernel of integral equation, movable boundary.

УДК 537:538

НАБЛИЖЕНІ МЕТОДИ ОБЧИСЛЕННЯ ПРОВІДНОСТІ В НЕОДНОРІДНИХ СИСТЕМАХ

Н.Г. Шкода, кандидат фізико-математичних наук
Інститут хімії поверхні НАН України
С.В. Шостак, кандидат фізико-математичних наук
Національний університет
біоресурсів і природокористування України

Розвинуто загальний теоретичний метод розрахунку провідності для широкого класу фізичних, геофізичних та біологічних неоднорідних систем. Вважається, що в таких системах неоднорідності розміщені випадковим чином, причому розміри неоднорідностей значно менші за довжину хвилі змінного електричного поля, в якому знаходиться система, що вивчається. Показано, що знаходження ефективної провідності таких систем зводиться до розв'язку інтегрального рівняння. Розвинуто два наближення такого розв'язку: метод усередненої Т-матриці та метод когерентного потенціалу. Проведено аналіз та порівняння точності цих методів.

Ефективна провідність, метод усередненої Т-матриці, метод когерентного потенціалу.

Майже з часів Максвела викликали інтерес властивості переносу заряду в матеріалах з невпорядкованими неоднорідностями. Звичайно