УДК 517.51

МОДУЛІ ГЛАДКОСТІ НА МНОЖИНАХ КОМПЛЕКСНОЇ ПЛОЩИНИ З КУСКОВО-ГЛАДКОЮ МЕЖЕЮ

О. Ю. Дюженкова, кандидат фізико-математичних наук

Розглянуто аналог модуля гладкості Дітзіана-Тотіка для функцій, неперервних на кусково-гладких кривих комплексної площини. Означено D-модуль гладкості на областях з кутами та досліджено його властивості.

Наближення функцій, комплексна площина, множини з кусково-гладкою межею, D-модуль гладкості.

Нині у теорії наближень широко використовують модулі гладкості Дітзіана-Тотіка (DT-модулі гладкості) для функцій, неперервних на відрізку $[-1;1]$ ([5]). Вперше конструктивна характеристика рівномірного наближення функцій на множинах комплексної площини з кусково-гладкою межею була одержана в роботах В.К. Дзядика [1], Г.А. Алібекова, Ю.І. Волкова та інших. Її було наведено в термінах модулів гладкості функції $\widetilde{f}(\omega)=f(\psi(\omega))$, де $\psi(\omega)$ – конформне відображення зовнішності круга на зовнішність розглядуваної множини.

Мета досліджень – аналіз теорії гладкостей З.Дітзіана і В.Тотіка для її поширення на множини комплексної площини з кусково-гладкою межею, введення аналога DT-модуля гладкості $\overline{\omega}_k(f,t)$ на областях з кутами та дослідження його властивостей для подальшої побудови конструктивної характеристики в термінах введеного D-модуля гладкості функції f.

Матеріали та методика досліджень. У роботі використовуються методи рівномірного наближення функцій ([1], [3], [4]), зокрема інтерполяція функцій многочленами Лагранжа.

Результати досліджень. Для функцій, неперервних на кусково-гладких кривих комплексної площини, введемо аналог модуля гладкості Дітзіана–Тотіка та дослідимо його властивості, зокрема доведемо властивості нормальності D-модуля гладкості.

Нехай $M\subset \mathbf{C}$ – замкнена обмежена множина, межа Γ якої є жордановою кривою і складається із скінченного числа гладких дуг Γ_j, які утворюють у точках стику a_j зовнішні кути $\alpha_j\pi,\ 0<\alpha_j<2$.

Для всіх $z\in\Gamma$ і $h>0$ позначимо

$$\rho_h(z):=h(|z-a_{j_*}|^{\frac{1}{\alpha_{j*}}}+h)^{\alpha_{j*}}, \tag{1}$$

де j_* – індекс найближчої до z точки стику.

Нехай $L(z,f):=L(z,f;z_1,...,z_k)$ – многочлен Лагранжа степеня $\le k-1$, який інтерполює функцію f у k різних точках $z_i\in\mathbf{C}$, $i=\overline{1,k}$.

Означення. D-модулем гладкості порядку k на кривій Γ неперервної на Γ функції f назвемо функцію

$$\overline{\omega}_k(\tau,f,\Gamma):=\sup_{h\in[0;\tau]}\sup_{\widetilde{z}\in\Gamma}\sup_{\{z_0,z_1,...,z_k\}}\left|f(z_0)-L(z_0,f;z_1,...,z_k)\right|, \tag{2}$$

де внутрішній супремум береться по всіх наборах $\{z_0,z_1,...,z_k\}$ точок z_i, які задовольняють нерівності

$$\left|z_i-\widetilde{z}\right|\le\rho_h(\widetilde{z})\le(3k+1)\left|z_i-z_j\right|,\qquad i,j=\overline{0,k}, i\ne j. \tag{3}$$

Основним результатом роботи є теорема, в якій доведено, що D-модуль, як і класичний модуль гладкості, має властивість нормальності.

Теорема. Якщо функція f є неперервною на Γ, то для всіх $n\in N,\tau\ge0$ має місце нерівність

$$\overline{\omega}_k(n\tau,f,\Gamma)\le cn^{\overline{\alpha}k}\overline{\omega}_k(\tau,f,\Gamma), \tag{4}$$

де $\overline{\alpha}$ – найбільше серед чисел α_j; c – стала, що не залежить від n,τ,f.

Для доведення теореми скористаємося допоміжними лемами.

Позначимо через $U[z,r]:=\{\zeta:\left|\zeta-z\right|\le r\}$, $v[z,r]:=\{\zeta:\left|\zeta-z\right|=r\}$ відповідно *круг* і *коло* радіусом $r>0$ з центром у точці $z\in\mathbf{C}$.

Лема 1. Нехай M – зв'язна множина, $z\in M$ і точки $z_0,z_1,...,z_k$ містяться в $M\cap U[z,r]$. Якщо $M\cap v[z,r]\ne\emptyset$, то знайдеться k точок $z_1^{'},...,z_k^{'}$, для яких виконуються співвідношення:

$$z_i^{'}\in M\cap U[z,r],\qquad i=\overline{1,k};$$

$$r\le(3k+1)\left|z_i^{'}-z_j^{'}\right|,\qquad i,j=\overline{1,k}, i\ne j; \tag{5}$$

$$r\le(3k+1)\left|z_i-z_j^{'}\right|,\qquad i=\overline{0,k},\ j=\overline{1,k}. \tag{6}$$

Лема 2. Нехай $C=const>0$, $\widetilde{z}\in\Gamma$, $z_0,...,z_k\in\Gamma$. Якщо при всіх $i,j=\overline{1,k}$, $i\ne j$ виконується $\rho_h(\widetilde{z})\le C\left|z_i-z_j\right|$ і при всіх $i=\overline{0,k}$ – $\left|\widetilde{z}-z_i\right|\le\rho_h(\widetilde{z})$, то

$$\left|f(z_0)-L(z_0,f;z_1,...,z_k)\right|\le(1+k(2C)^k)\overline{\omega}_k(h,f,\Gamma). \tag{7}$$

Лема 3. Нехай функція f задана в точках z_j, $j=\overline{j_*,j^*}$. Для довільного набору $\{j_1,...,j_k\}$ індексів має місце тотожність

$$L(z,f;\zeta_{j_1},...,\zeta_{j_k})=L(z,f;\zeta_{j_*},\zeta_{j_*+1},...,\zeta_{j_*+k-1})+$$

$$+\sum_{j=j_*}^{j^*-k}(L(\zeta_j,f;\zeta_{j+1},...,\zeta_{j+k})-f(\zeta_j))\cdot A_j(z), \tag{8}$$

де
$$A_j(z):=\sum_{p=1}^{k}\prod_{q=1}^{k-1}\frac{(\zeta_{j_p}-\zeta_{j+q})_+}{(\zeta_j-\zeta_{j+q})}\prod_{q=1,q\neq p}^{k}\frac{(z-\zeta_{j_q})}{(\zeta_{j_p}-\zeta_{j_q})}, \tag{9}$$

$$(\zeta_i-\zeta_j)_+:=\begin{cases}\zeta_i-\zeta_j, & i>j,\\ 0, & i\le j.\end{cases}$$

Зауважимо, що в лемі 3 наведено у зручній формі відому тотожність Поповічіу [3], [4].

Надалі для зручності вважатимемо, що $a_1:=0$ є точкою стику дуг Γ_1 і Γ_2, при цьому $\alpha:=\alpha_1$.

Лема 4. Існує число $R=R(\Gamma)>0$, яке задовольняє умови:

1) для всіх точок $z\in U[0,R]$ точка 0 є найближчою точкою стику;

2) частина кривої Γ, що потрапила до круга $U[0,R]$, складається з двох гладких дуг γ_1 і γ_2, які є частинами відповідно дуг Γ_1 і Γ_2;

3) коливання кута дотичної до кривої γ_1 не перевищує $\frac{\pi}{6}$, тобто має місце нерівність

$$\left|z'-z''\right|\le 2\left||z'|-|z''|\right| \tag{10}$$

для всіх $z'\in\gamma_1$, $z''\in\gamma_1$; так само коливання кута дотичної до γ_2 не перевищує $\frac{\pi}{6}$, отже виконується нерівність (9) для всіх $z'\in\gamma_2$, $z''\in\gamma_2$;

4) для відстані $d(z,\Gamma_1)$ від точки $z\in\gamma_2$ до дуги Γ_1 має місце нерівність

$$|z|\le cd(z,\Gamma_1), \tag{11}$$

де c – стала, що залежить тільки від α.

Візьмемо точку $\tilde{z}\in\Gamma$, числа $h>0, n\in\mathbf{N}$ і розглянемо набір точок $\{z_0,z_1,...,z_k\}$, що задовольняють умову (3). Через c позначатимемо різні сталі, які можуть залежати тільки від k і Γ. Для доведення теореми достатньо довести нерівність

$$\left|f(z_0)-L(z_0,f;z_1,...,z_k)\right|\le cn^{\overline{\alpha}k}\,\overline{\omega}_k(ch,f,\Gamma), \tag{12}$$

при цьому обмежимось розглядом тільки основного випадку: $\tilde{z}\in\gamma_2$, $|\tilde{z}|\le\frac{1}{2}R$, $nh<c$, де γ_2 і R визначені в лемі 4, а стала c задовольняє нерівність (16).

При $i\le l\le j$ з нерівностей (10) і (11) леми 4 випливає

$$c\left|\zeta_i-\zeta_j\right|\le\rho_{|i-j|h}(\zeta_l)\le c\left|\zeta_i-\zeta_j\right|. \tag{13}$$

Зокрема $\left|\zeta_j-\zeta_{j+k}\right|=\rho_{\theta_j h}(\zeta_j),\ \theta_j<c$ і для всіх $l,p=\overline{1,k}, l\neq p$

$$\left|\zeta_j-\zeta_{j+k}\right|\le c\left|\zeta_l-\zeta_p\right|,$$

тоді за лемою 2 одержуємо

$$\left|f(\zeta_j)-L(\zeta_j,f;\zeta_{j+1},...,\zeta_{j+k})\right|\le c\,\overline{\omega}_k(ch,f,\Gamma). \tag{14}$$

Позначивши через j_1 найбільше серед чисел j таких, що $\zeta_{j-1}\in U[\widetilde{z},\rho_{nh}(\widetilde{z})]$, припустимо, що $j_p:=j_1+pn$.

Для довільної точки $z\in(\gamma_1\cup\gamma_2)\cap U[\widetilde{z},\rho_{nh}(\widetilde{z})]$ позначимо через j_* індекс найближчої до z серед точок ζ_j з $j\le j_1$. Аналогічно до (14) одержимо

$$\left|f(z)-L(z,f;\zeta_{j_*},\zeta_{j_*+1},...,\zeta_{j_*+k-1})\right|\le c\overline{\omega}_k(ch,f,\Gamma). \tag{15}$$

Для всіх $p,q=\overline{1,k},\ p\neq q$ та $j=j_*,...,j_k-k$ з умови (14) знаходимо:

$$\frac{|z-\zeta_{j_q}|}{|\zeta_{j_p}-\zeta_{j_q}|}<c, \qquad \frac{|\zeta_{j_p}-\zeta_{j+q}|}{|\zeta_j-\zeta_{j+q}|}\le c\frac{\rho_{nh}(\zeta_j)}{\rho_h(\zeta_j)}\le cn\left(\frac{n+|j|}{1+|j|}\right)^{\alpha-1},$$

звідки маємо

$$\left|A_j(z)\right|\le cn^{k-1}\left(\frac{n+|j|}{1+|j|}\right)^{(\alpha-1)(k-1)} \tag{16}$$

де $A_j(z)$ визначається рівністю (9). Тоді з рівностей (15), (16) і (14) за лемою 3 одержимо

$$\left|f(z)-L(z,f;\zeta_{j_1},...,\zeta_{j_k})\right|\le\left|f(z)-L(z,f;\zeta_{j_*},\zeta_{j_*+1},...,\zeta_{j_*+k-1})\right|+$$
$$+\sum_{j=j_*}^{j_1+k(n-1)}|(f(\zeta_j)-L(\zeta_j,f;\zeta_{j+1},...,\zeta_{j+k})|\cdot|A_j(z)|\le$$
$$\le c\overline{\omega}_k(ch,f,\Gamma)+c\overline{\omega}_k(ch,f,\Gamma)n^{k-1}\sum_{j=j_*}^{j_1+k(n-1)}\left(\frac{n+|j|}{1+|j|}\right)^{(\alpha-1)(k-1)}\le$$
$$\le cn^k\overline{\omega}_k(ch,f,\Gamma)+cn^{\alpha k}\overline{\omega}_k(ch,f,\Gamma)n^{k-1}\sum_{j=1}^{cn}\left(\frac{1}{j}\right)^{(\alpha-1)(k-1)}\le cn^{\alpha k}\overline{\omega}_k(ch,f,\Gamma).$$

Звідси випливає нерівність (12). Отже, теорему доведено.

Властивості введеного D-модуля гладкості $\overline{\omega}_k(f,t)$ та пряма теорема наближення функцій алгебраїчними многочленами на областях з кутами розглядаються також у роботі [2].

Висновки

У роботі поширено означення модулів гладкості З.Дітзіана і В.Тотіка на функції, неперервні на кусково-гладких кривих комплексної площини. При цьому досліджено основні властивості введеного D-

модуля гладкості, зокрема доведено властивість нормальності, сформульовану у вигляді теореми.

Список літератури

1. Дзядык В.К. Введение в теорию равномерного приближения функций полиномами / В.К. Дзядык. – М.: Наука, 1977.– 512 с.
2. Дюженкова О.Ю. DT-модулі гладкості на областях з кутами/ О.Ю. Дюженкова, І.О.Шевчук// Теория приближения функций.: тр. Ин-та прикладной математики и механики. – Донецк, 1998. – Т.3.– С.65–70.
3. Тамразов П.М. Гладкости и полиномиальные приближения/ П.М. Тамразов. – К.: Наук. думка, 1975. – 272 с.
4. Шевчук И.А. Приближение многочленами и следы непрерывных на отрезке функций/ И.А.Шевчук. – К.: Наук. думка, 1992. – 223 с.
5. Ditzian Z. Moduli of smoothness/ Ditzian Z., Totik V. Springer-Verlag, New York/Berlin, 1987. – 300 p.

Рассмотрен аналог модуля гладкости Дитзиана-Тотика для функций, непрерывных на кусочно-гладких кривых комплексной плоскости. Определен D-модуль гладкости на областях с углами, исследованы его свойства.

Приближение функций, комплексная плоскость, множества с кусочно-гладкой границей, D-модуль гладкости.

We extend the definition of Ditzian-Totik modules of smoothness for the functions, continuous on piecewise smooth curves of complex plane, and investigate the properties of these modules.

Function approximation, complex plane, piecewise smooth curves, modules of smoothness.