8. *Лерман Е.Ю.* Высококонцентрированные топливные эмульсии – эффективное средство улучшения экологических показателей лёгких быстроходных дизелей / *Е.Ю. Лерман, О.А. Гладков* // Двигателестроение. – 1986. – № 10. – С. 14–17.
9. А.с. 1306220 СССР, МКИ[3] F 02 В 43/00. Способ работы двигателя внутреннего сгорання и двигатель внутреннего сгорания / *А. А. Долинский, А. И. Гуров, А. Н. Подгорный, А. И. Мищенко, Н. А. Гогадзе, А. П. Гартвиг, И. В. Феофилов* (СССР). – №3844027 ; заявл. 20.11.84 ; опубл. 07.02.87. Бюл. № 15.
10. А.с. 1347602 СССР, МКИ[3] F 02 В 43/00. Способ работы двигателя внутреннего сгорания / *А. А. Долинский, А. И. Гуров, И. В. Феофилов* (СССР). – №4020981 ; заявл. 12.02.86; опубл. 07.08.87. Бюл. № 39.

Проведен анализ разных типов когенерационных установок с точки зрения наибольшей экономии топлива, приведено сравнение существующих способов добавления воды к топливно-воздушной смеси в ДВС и показаны возможности повышения эффективности когенерационной установки на основе ДВС за счет увлажнения дутьевого воздуха.
Когенерационная установка, добавление воды к топливу, конденсационные утилизаторы теплоты.

The analysis of different types of cogeneration settings from point of most economy of fuel is conducted, comparison of existent methods of addition of water to fuel-air mixture in combustion engines is cited and possibility of increase of efficiency of the cogeneration setting on the basis of combustion engine on account of moistening of air are showed.
Cogeneration setting, addition of water to fuel, heat condensation settings.

УДК 517.926

УМОВИ ВИНИКНЕННЯ РОЗВ’ЯЗКІВ СЛАБОЗБУРЕНИХ КРАЙОВИХ ЗАДАЧ (ВИПАДОК $k = -1$)

Р.Ф. Овчар, кандидат фізико-математичних наук

Запропонована схема знаходження коефіцієнтних умов існування розв’язків слабозбурених крайових задач для систем з імпульсною дією в фіксовані моменти часу.
Слабозбурена лінійна неоднорідна крайова задача, однорідна крайова задача з імпульсною дією, ортопроектор, ряд, псевдообернена матриця, узагальнений оператор Гріна.

Постановка проблеми. Актуальність цієї теми обумовлена, перш за все, важливістю практичного застосування теорії крайових задач у теорії нелінійних коливань, теорії стійкості руху, теорії управління, ряді геофізичних задач. З іншого боку отримані в статті нові результати суттєво доповнюють дослідження по теорії нелінійних коливань для слабо збурених крайових задач.

Результати досліджень. Розглянемо слабозбурену лінійну неоднорідну крайову задачу з імпульсною дією виду:

$$\begin{cases} \dot{z} = A(t)z + \varepsilon A_1(t)z + f(t), \quad t \neq \tau_i, \\ \Delta z|_{t=\tau_i} - S_i z = a_i + \varepsilon A_{1i} z(\tau_i - 0), \\ lz = \alpha + \varepsilon l_1 z. \end{cases} \qquad (1)$$

Припустимо, що у породжуючої крайової задачі, яка отримується із (1) при $\varepsilon = 0$:

$$\begin{cases} \dot{z} = A(t)z + f(t), \quad t \neq \tau_i, \\ \Delta z|_{t=\tau_i} - S_i z = a_i, \\ lz = \alpha. \end{cases} \qquad (2)$$

не існує розв'язків при довільних неоднорідностях $f(t) \in C([a,b]/\{\tau_i\}_I)$, $a_i \epsilon \mathbb{R}^n, \alpha \epsilon \mathbb{R}^m$. Це означає, що має місце критичний випадок $(rank\ Q = n_1 < n)$ і критерій розв'язності:

$$P_{Q_d^*}\left\{\alpha - l\int_a^b K(\cdot,\tau)f(\tau)d\tau - l\sum_{i=1}^p \overline{K}(\cdot,\tau_i)a_i\right\} = 0, d = m - n_1,$$

крайової задачі (2) в силу довільності неоднорідних її членів не виконується.

Виникає питання, чи можна за допомогою лінійних збурень зробити крайову задачу (2) розв'язною і, якщо можна, то якими повинні бути збурені доданки $\varepsilon A_1(t)$, εA_{1i} і εl_1, щоб крайова задача (1) мала розв'язок при будь-яких неоднорідностях $f(t)$, a_i і α. Відповісти на це питання можна за допомогою $(d \times r)$-вимірної матриці:

$$B_0 = P_{Q_d^*}\left[l_1 X_r(\cdot) - l\int_a^b K(\cdot,\tau)A_1(\tau)X_r(\tau)d\tau - l\sum_{i=1}^p \overline{K}(\cdot,\tau_i + 0) \times A_{1i}X_r(\tau_i - 0)\right], \qquad (3)$$

побудованої по коефіцієнтам вихідної диференціальної крайової задачі.

Застосування метода Вішика-Люстерніка дозволяє знайти ефективні коефіцієнтні умови виникнення розв'язків крайової задачі (2) у вигляді рядів Лорана по степеням малого параметра ε зі скінченним числом доданків, які містять від'ємні степені ε.

Доведемо теорему, яка дозволяє розв'язати поставлену задачу. Перш ніж її сформулювати, введемо наступні позначення: $Q = lX(\cdot) - (m \times n)$-вимірна матриця; $P_{Q^*} - (m \times m)$-вимірна матриця (ортопроектор), що проектує $\mathbb{R}^m$ на $N(Q^*)$, $P_{Q^*}: \mathbb{R}^m \to N(Q^*)$; $Q^+ -$ єдина псевдообернена за Муром-Пенроузом до Q $(n \times m) -$ вимірна матриця; $P_{B_0} - (r \times r) -$ вимірна матриця (ортопроектор), що проектує $\mathbb{R}^r$ на нуль-простір $N(B_0)$ $(d \times r) -$ вимірної матриці B_0, $P_{B_0}: \mathbb{R}^r \to N(B_0)$; $P_{B_0^*} - (d \times d) -$ вимірна матриця (ортопроектор), що проектує $\mathbb{R}^d$ на нуль-простір $N(B_0^*)$ $(r \times d) -$ вимірної матриці B_0^*=B_0^T, $P_{B_0^*}: \mathbb{R}^d \to N(B_0^*)$.

Теорема. Нехай крайова задача (1) задовольняє вказаним вище умовам так, що має місце критичний випадок $(rank\ Q = n_1 < n)$ і породжуюча крайова задача (2) при довільних неоднорідностях $f(t) \in C([a,b]/\{\tau_i\}_I)$, $a_i \epsilon \mathbb{R}^n, \alpha \epsilon \mathbb{R}^m$ не має розв'язків. Тоді, якщо виконуються умови:

$$P_{B_0} = 0, \quad P_{B_0^*} P_{Q_d^*} = 0, \tag{4}$$

то для крайової задачі (1) існує при довільних $f(t) \in C([a,b]/\{\tau_i\}_I)$, $a_i \epsilon \mathbb{R}^n, \alpha \epsilon \mathbb{R}^m$ єдиний розв'язок, поданий у вигляді збіжного при $\varepsilon \epsilon (0, \varepsilon_*]$ ряду:

$$z(t,\varepsilon) = \sum_{i=k}^{+\infty} \varepsilon^i z_i(t), \quad k = -1. \tag{5}$$

Доведення. Підставимо ряд (5) в крайову задачу (1) і прирівняємо коефіцієнти при однакових степенях ε. Отже, при ε^{-1} для $z_{-1}(t)$ отримаємо однорідну крайову задачу

$$\begin{cases} \dot{z}_{-1} = A(t) z_{-1}, \quad t \neq \tau_i, \\ \Delta z_{-1}|_{t=\tau_i} = S_i z_{-1}(\tau_i - 0), \\ l z_{-1} = 0. \end{cases} \tag{6}$$

Згідно з припущеннями теореми, однорідна крайова задача (6) має r –параметричне сімейство $r = n - n_1$ розв'язків $z_{-1}(t, c_{-1}) = X_r(t) c_{-1}$, де $r -$ вимірний вектор-стовпець $c_{-1} \epsilon \mathbb{R}^r$ констант буде визначений на наступному кроці з умови розв'язності задачі для $z_0(t)$.

При ε^0 приходимо для $z_0(t)$ до крайової задачі

$$\begin{cases} \dot{z}_0 = A(t) z_0 + A_1(t) z_{-1} + f(t), \quad t \neq \tau_i, \\ \Delta z|_{t=\tau_i} = S_i z_0(\tau_i - 0) + A_{1i} z_{-1}(\tau_i - 0) + a_i, \\ l z_0 = l_1 z_{-1} + \alpha. \end{cases} \tag{7}$$

Критерій розв'язності задачі (7) має вигляд:

$$P_{Q_d^*}\left\{\alpha + l_1 X_r(\cdot)c_{-1} - l\int_a^b K(\cdot,r)(f(t) + A_1(\tau)X_r(\tau)c_{-1})d\tau - l\sum_{i=1}^p \overline{K}(\cdot,\tau_i)\,(a_i + A_{1i}X_r(\tau_i - 0)c_{-1})\right\}=0.$$

Звідси отримуємо алгебраїчну відносно $c_{-1}\epsilon\mathbb{R}^r$ систему:

$$B_0 c_{-1} = -P_{Q_d^*}\left\{\alpha - l\int_a^b K(\cdot,\tau)f(\tau)d\tau - l\sum_{i=1}^p \overline{K}(\cdot,\tau_i)\,a_i\right\}, \qquad (8)$$

де

$$B_0 = P_{Q_d^*}\left\{l_1 X_r(\cdot) - l\int_a^b K(\cdot,\tau)A_1(\tau)X_r(\tau)d\tau - l\sum_{i=1}^p \overline{K}(\cdot,\tau_i)\,A_{1i}X_r(\tau_i - 0)\right\} \qquad (9)$$

Для розв'язання останньої при довільних $f(t) \in C([a,b]/\{\tau_i\}_I)$, $a_i\epsilon\mathbb{R}^n, \alpha\epsilon\mathbb{R}^m$ необхідно і достатньо виконати умову $P_{B_0^*}\,P_{Q_d^*} = 0$. Якщо додатково вимагати $rank\, B_0 = r \Leftrightarrow P_{B_0} = 0$, то система (8) єдиним чином розв'язна відносно $c_{-1}\,\epsilon\mathbb{R}^r$:

$$c_{-1} = -B_0^+ P_{Q_d^*}\{\,\alpha - l\int_a^b K(\cdot,\tau)f(\tau)d\tau - l\sum_{i=1}^p \overline{K}(\cdot,\tau_i)\,a_i\}.$$

Крайова задача (7) при (4) має r –параметричне сімейство $(r = n - n_1)$ розв'язків:

$$z_0(t,c_0) = X_r(t)c_0 + \bar{z}_0(t),$$

де $c_0 - r -$ вимірний вектор констант, який буде однозначно визначений на наступному кроці з умови розв'язності крайової задачі для $z_1(t)$; $\bar{z}_0(t)$ – частинний розв'язок задачі (7):

$$\bar{z}_0(t) = \left(G\begin{bmatrix} A_1(\tau)z_{-1}(\tau,c_{-1}) + f(\tau) \\ A_{1i}z_{-1}(\tau_i - 0) + a_i \end{bmatrix}\right)(t) + X(t)Q^+\{\alpha + l_1 z_{-1}(\cdot,c_{-1})\},$$

де $\left(G\begin{bmatrix} * \\ * \end{bmatrix}\right)(t)$ – узагальнений оператор Гріна крайової задачі (7), який має вигляд:

$$\left(G\begin{bmatrix} A_1(\tau)z_{-1}(\tau,c_{-1}) + f(\tau) \\ A_{1i}z_{-1}(\tau_i - 0) + a_i \end{bmatrix}\right)(t) \stackrel{\text{def}}{=}$$

$$\stackrel{\text{def}}{=} (\Big[\int_a^b K(t,\tau) * d\tau - X(t) \times Q^+\, l\int_a^b K(\cdot,\tau) * d\tau,\ \sum_{i=1}^p \overline{K}(\cdot,\tau_i) * -X(t)Q^+ l\sum_{i=1}^p \overline{K}(\cdot,\tau_i) *\Big]$$

$$\begin{bmatrix} A_1(\tau)z_{-1}(\tau,c_{-1}) + f(\tau) \\ A_{1i}z_{-1}(\tau_i - 0) + a_i \end{bmatrix}(t).$$

Продовжуючи цей процес, методом математичної індукції доводимо, що при (4) коефіцієнти $z_i(t)$ ряду (5) однозначно визначаються з відповідних крайових задач. Збіжність ряду (5) також доводяться традиційними способами мажорування.

Висновок. На основі методу типу Вішіка-Люстерніка отримані коефіцієнтні умови існування розв'язків крайової задачі (1) при довільних $f(t) \in C([a,b]/\{\tau_i\}_I),\ a_i \epsilon \mathbb{R}^n, \alpha \epsilon \mathbb{R}^m$. Для отримання цих умов будується $(d \times r) -$ вимірна матриця (3).

Список літератури

1. *Самойленко А.М.* Дифференциальные уравнения с импульсным воздействием // *А.М. Самойленко, Н.А. Перестюк.* – К.: Вища школа, 1987. – 287 с.
2. *Бойчук А.А.* Конструктивные методы анали за краевых задач // *А.А. Бойчук*. – К.: Наук. думка; 1990. – 96 с.
3. *Вишик М.И.* Решение некоторых задач о возмущении в случае матриц и самосопряженных и несамосопряженных дифференциальных уравнений / *М.И. Вишик, Л.А. Люстерник.* // Успехи математических наук. – 1960. – №3. – С. 3–80.

Предложена схема определения коэффициентных условий возникновения решений слабовозмущенных линейных краевых задач для систем с импульсным воздействием в фиксированные моменты времени.

Слабовозбужденная линейная неоднородная краевая задача, однородная краевая задача с импульсным действием, ряд, псевдообернена матрица, обобщенный оператор Грина.

Proposed scheme for determining the coefficient conditions of decision of weakly perturbedlinear inhomogeneous boundary value problem for systems with impulse action in fixed times.

Poorlyraised linear non-uniform regional problem, homogeneous regional problem with pulse action, number, pseudo-returnable matrix, Green's generalised operator.