variational calculation. The criterion which is integrand energy of spurts. And this criterion has been subject to minimization. The torque moment of driving mechanism acting towards crane swinging mechanism has been selected as control parameter.

Fluctuations of cargo, optimization, connecting mode of motion.

УДК 631.01

МАТЕМАТИЧНЕ МОДЕЛЮВАННЯ Й ОПТИМІЗАЦІЯ РЕЖИМІВ РУХУ МЕХАНІЧНИХ ДИСКРЕТНО-КОНТИНУАЛЬНИХ СИСТЕМ

В.С. Ловейкін, доктор технічних наук
Ю.В. Човнюк, кандидат технічних наук
Н.В. Матухно, інженер

Наведені диференціальні рівняння, що описують рух дискретно-континуальних систем протягом несталих (перехідних) процесів, які можуть бути використані для вдосконалення й уточнення існуючих інженерних методик розрахунку подібних систем.

Математичне моделювання, дискретно-континуальні системи, оптимізація режимів руху.

Постановка проблеми. Питання математичного моделювання й оптимізації режимів руху механічних дискретно-континуальних систем, їх динамічний розрахунок при проходженні через резонанс обговорювався в численних роботах. При цьому основна увага приділялася розгляду систем з одним ступенем волі (у рамках моделей із зосередженими параметрами), що також дає можливість порівняно просто вивчати механічні системи з кінцевим числом ступенів свободи. Особливо велике значення цього питання при аналізі нестаціонарних коливань деформованих механічних систем (наприклад, при динамічному розрахунку віброізольованих фундаментів під машини, а також у дослідженнях процесів вібраційно-хвильового/віброударного формування різних сумішей).

Серед різних способів гасіння пускозупинного резонансу, як відомо, поряд з удосконаленням звичайних демпферів використовуються динамічні гасителі коливань; розрахунки гасителів вимагають досить повного вивчення нестаціонарних коливань механічних (деформованих) систем (наприклад, фундаментів під машини) з урахуванням дійсного характеру зміни навантаження. Для якісного вібро- і формоутворення виробів для потреб сільського господарства, промисловості також необхідний точний і всебічний аналіз зазначених коливань/хвиль, що виникають у системі "робочий орган вібромашини – суміш". Незважаючи на наявність ряду важливих результатів, отриманих в області розрахунків про проходження через резонанс, моделювання й оптимізації режимів руху деформованих механічних систем (дискретно-континуального типу), відображених у численних публікаціях, багато питань цієї теорії, моделювання, оптимізації режимів руху подібних систем у періоди пуску/гальмування (так звані перехідні процеси) вимагають подальшого вивчення, уточнення й удосконалення (особливо, методик інженерних розрахунків навантажень на робочі органі машин або на фундамент під ними).

Аналіз останніх досліджень. Як відомо [1-3], у літературі дуже широко представлені методи розрахунків, засновані на використанні точних розв'язків, виражених у різних спеціальних функціях, а також методи моделювання й оптимізації режимів руху континуальних і дискретних (із зосередженими параметрами) механічних систем, що засновані на інтегральних критеріях/функціоналах дії й рівняннях Ейлера- Пуассона [4].

У монографіях [5, 6] приводиться ряд результатів, заснованих на використанні інтегралів імовірності й функцій Ломмеля двох змінних; ці функції використовуються також і в [7], і в численних статтях, присвячених цьому питанню.

Мета досліджень – показати метод математичного й фізико-механічного моделювання дискретно-континуальних систем, заснований на підходах і засобах/інструментах математичної фізики [1,2], методі Ейлера [3], крім того, розширити область зміни частоти й амплітуди сили, що викликає коливання в режимі пуску й зупинки машин, а в окремих випадках одержати прості розв'язки в порівняно добре вивчених функціях. Запропоновані модельні диференціальні рівняння для узагальнених координат механічної системи, що дозволяють оптимізувати режими її руху в періоди пуску/зупинки, які враховують дискретно-континуальний характер параметрів цієї системи, і тим самим зменшують/мінімізують амплітуди навантажень на робочі органі машин у зазначені моменти часу.

Результати досліджень.

1. Застосування методу Релея для аналізу вимушених коливань стрижня з рухомими кінцями. Використовуючи підходи, розвинені у [1, 2], розглянемо вимушені поздовжні коливання стрижня з рухомими кінцями. (Подібні моделі використовуються в практиці аналізу й розрахунків взаємодії робочих органів вібраційних машин із сумішшю, що ущільнюється). При цьому стрижень має скінчену довжину l і знаходиться під впливом зовнішньої сили $p(x,t)$, що розрахована на одиницю довжини, причому кінці його не закріплені, а рухаються за заданим законом. Ця задача зводиться до розв'язку рівняння (одновимірна постановка):

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + g(x,t), \quad g(x,t) = \frac{1}{\rho} \cdot p(x,t), \tag{1}$$

де $u(x,t)-$ поздовжній зсув поперечного перерізу стрижня, що залежить від (поздовжньої) координати x, обраної уздовж недеформованої осі (стрижня), $t-$час, $\rho-$щільність, $a-$ швидкість поширення в стрижні поздовжніх хвиль, причому $a = \sqrt{\frac{E}{\rho}}$, де $E-$ модуль пружності матеріалу стрижня.

Граничні умови мають вигляд:

$$u\big|_{x=0} = \kappa_1(t); \quad u\big|_{x=l} = \kappa_2(t), \tag{2}$$

а початкові зводяться до наступних:

$$u\big|_{t=0} = f(x), \quad \left.\frac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=0} = F(x). \tag{3}$$

Відомо [2], що до розв'язку цієї задачі не можна застосувати метод Фур'є, тому що граничні умови (2) неоднорідні. Але ця задача легко зводиться до задачі з нульовими граничними умовами (у якій застосування методу Фур'є стає коректним).

Рішення $u(x,t)$ шукаємо у наступному вигляді:

$$u(x,t) = \kappa_1(t) + \left[\kappa_2(t) - \kappa_1(t)\right] \cdot \frac{x}{l} + v(x,t). \tag{4}$$

Функція $v(x,t)$ повинна задовольняти граничним умовам:

$$v\big|_{x=0} = 0, \quad v\big|_{x=l} = 0 \tag{5}$$

і початковим умовам:

$$v\big|_{t=0} = f_1(x); \quad \left.\frac{\partial v}{\partial t}\right|_{t=0} = F_1(x), \tag{6}$$

де

$$f_1(x) = f(x) - \kappa_1(0) - \left[\kappa_2(0) - \kappa_1(0)\right] \cdot \frac{x}{l}; \quad F_1(x) = F(x) - \kappa_1'(0) - \left[\kappa_2'(0) - \kappa_1'(0)\right] \cdot \frac{x}{l}.$$

(Тут штрих означає однократне диференціювання по t). Рівняння, якому задовольняє $v(x,t)$, приймає вид:

$$\frac{\partial^2 v}{\partial t^2} = a^2 \cdot \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + g_1(x,t), \;\; g_1(x,t) = g(x,t) - \kappa_1''(t) - \\ - \left[\kappa_2''(t) - \kappa_1''(t)\right] \cdot \frac{x}{l}. \qquad (7)$$

Рішення рівняння (7) можна представити наступним чином:

$$v(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} \left\{ T_k(t) + a_k \cdot \cos\frac{k\pi at}{l} + b_k \cdot \sin\frac{k\pi at}{l} \right\} \cdot \sin\frac{k\pi x}{l}, \qquad (8)$$

де

$$a_k = \frac{2}{l} \cdot \int_0^l f_1(x) \cdot \sin\frac{k\pi x}{l} dx; \;\; b_k = \frac{2}{k\pi a} \cdot \int_0^l F_1(x) \cdot \sin\frac{k\pi x}{l} dx; \;\; \omega_k = \frac{k\pi a}{l};$$

$$T_k(t) = \frac{2}{l \cdot \omega_k} \cdot \int_0^t d\tau \int_0^l g_1(\xi,\tau) \cdot \sin\left[\omega_k \cdot (t-\tau)\right] \cdot \sin\frac{k\pi\xi}{l} d\xi.$$

Загальне рішення (4) можна записати так:

$$u(x,t) = \left\{ \kappa_1(t) + \left[\kappa_2(t) - \kappa_1(t)\right] \cdot \frac{x}{l} \right\} + \\ + \sum_{k=1}^{\infty} \left\{ T_k(t) + a_k \cdot \cos\frac{k\pi at}{l} + b_k \cdot \sin\frac{k\pi at}{l} \right\} \cdot \sin\frac{k\pi x}{l}. \qquad (9)$$

Введемо позначення:

$$g_2(x,t) = \left\{ \kappa_1(t) + \left[\kappa_2(t) - \kappa_1(t)\right] \cdot \frac{x}{l} \right\}, \qquad (10)$$

тоді:

$$g_2(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} g_{2k}(t) \cdot \sin\frac{k\pi x}{l}; \;\; g_{2k}(t) = \frac{2}{l} \int_0^l g_2(\xi,t) \cdot \sin\frac{k\pi\xi}{l} d\xi. \qquad (11)$$

Враховуючи (11), можна (9) представити у виді:

$$u(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} \left[g_{2k}(t) + T_k(t) + a_k \cdot \cos\frac{k\pi at}{l} + b_k \cdot \sin\frac{k\pi at}{l} \right] \cdot \sin\frac{k\pi x}{l}, \qquad (12)$$

або: $u(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} \tilde{g}_k(t) \cdot \sin\frac{k\pi x}{l}$, де $\tilde{g}_k(t)$ еквівалентне/тотожне виразу, що стоїть у квадратних дужках формули (12) під знаком суми.

Відповідно до методу Ейлера [3], інерційний коефіцієнт m_1, коефіцієнт жорсткості C_1та власна частота Ω_1 стрижня (як континуальної системи) визначаються наступними співвідношеннями:

$$m_1 = \sum_{k=1}^{\infty}\int_0^l \rho \cdot S(x) \cdot \sin^2\left(\frac{k\pi x}{l}\right)dx; \;\; C_1 = \sum_{k=1}^{\infty}\int_0^l E \cdot S(x) \cdot \left[\frac{k\pi}{l} \cdot \cos\frac{k\pi x}{l}\right]^2 dx;$$

$$\Omega_1 = \sqrt{\frac{\tilde{N}_1}{m_1}}, \tag{13}$$

де $S(x)-$ описує закон зміни уздовж осі Ox стрижня площі його поперечного перерізу. При врахуванні сил в'язкого тертя в матеріалі стрижня коефіцієнт n_1, що характеризує зазначене тертя, може бути представлений у такий спосіб:

$$n_1 = \sum_{k=1}^{\infty}\int_0^l \tilde{n}_1(x) \cdot \sin\left(\frac{k\pi x}{l}\right)dx, \tag{14}$$

де $\tilde{n}_1(x)$ характеризує інтенсивність розподілу (на одиницю довжини) уздовж осі стрижня його в'язких властивостей.

У наведеній нижче таблиці представлені критерії, що класифікують основні типи моделей стрижня, застосовуваних в інженерних розрахунках.

1. Критерії класифікації дискретних і континуальних властивостей типових моделей стрижнів.

λ / l	Тип (середовища) моделі	В'язке тертя	
		$n_1\Omega_1 \sim (c;\; m\Omega_1^2)$	$n_1\Omega_1 << (c;\; m\Omega_1^2)$
$\lambda / l \sim a/(\Omega l) >> 1$	Дискретна	+	-
$\lambda / l \sim a/(\Omega l) << 1$	Континуальна	+	-
$\lambda / l \sim a/(\Omega l) \approx 1$	Дискретно-континуальна	+	-

Примітка. Знак "+" означає, що в моделі стрижня необхідно враховувати лінійне в'язке тертя; знак "-" означає, що використовується модель стрижня, що не враховує диссипативні процеси. $\lambda -$ довжина хвилі, що поширюється в стрижні.

2. Оптимізація режимів руху континуальних систем. Відповідно до рівняння руху (1), для найбільш загального варіанту постановки початково-крайової задачі (2), (3), зазначеної вище, отримане рішення методами математичної фізики [1,2], яке можна представити у вигляді:

$$u(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} \tilde{g}_k(t) \cdot X_k(x), \tag{15}$$

де $\tilde{g}_k(t) = g_{2k}(t) + T_k(t) + a_k \cdot \cos\frac{k\pi at}{l} + b_k \cdot \sin\frac{k\pi at}{l}, \;\; X_k(x) = \sin\frac{k\pi x}{l}.$

Враховуючи ортогональність функцій $X_k(x)$ на відрізку $x \in [0,l]$, можна легко отримати (підставляючи (15) у (1) та інтегруючи, помножене на $X_k(x)$ отримане рівняння, у межах від 0 до l) для амплітуди $k-$ої гармоніки рішення (15):

$$\ddot{\tilde{g}}_k(t) = (-1) \cdot \frac{a^2 k^2 \pi^2}{l^2} \cdot \tilde{g}_k(t) + \frac{\int_0^l g(x,t) \cdot X_k(x) dx}{\int_0^l X_k{}^2(x) dx}. \qquad (16)$$

Введемо позначення: $\Omega_k{}^2 = \dfrac{a^2 k^2 \pi^2}{l^2}$; $\overline{g_k(t)} = \dfrac{\int_0^l g(x,t) X_k(x) dx}{\int_0^l X_k{}^2(x) dx}$.

Тоді (16) представимо у вигляді:

$$\ddot{\tilde{g}}_k(t) + \Omega_k{}^2 \cdot \tilde{g}_k(t) = \overline{g_k(t)}. \qquad (17)$$

Будемо розглядати рух системи в період часу $t \in [0; t_p]$, де $t_p -$тривалість перехідного процесу, після закінчення якого динамічні/кінематичні параметри системи (сила, прискорення, швидкість, переміщення) стабілізуються. Визначимо рівняння, які детермінують режими руху системи й разом з тим, задовольняють таким критеріям:

а) мінімізації прискорення:

$$\int_0^{t_p} \left(\ddot{\tilde{g}}_k(t)\right)^2 dt \Rightarrow \min; \qquad (18)$$

б) мінімізації переміщення:

$$\int_0^{t_p} \left(\tilde{g}_k(t)\right)^2 dt \Rightarrow \min; \qquad (19)$$

в) мінімізації зовнішньої сили, що впливає на систему в цілому:

$$\int_0^{t_p} \left\{\overline{g_k(t)}\right\}^2 dt \Rightarrow \min. \qquad (20)$$

Використовуючи рівняння (17) і підхід, розвинутий в [4], легко одержати наступні рівняння:

а) для виконання критерію (18):

$$\tilde{g}_k(t) = \frac{\overline{g_k(t)}}{\Omega_k{}^2}; \qquad (21)$$

б) для виконання критерію (19) –

$$g_k^{(IV)}(t) - \overline{\ddot{g}_k(t)} = 0; \qquad (22)$$

в) для виконання критерію (20) –

$$g_k^{(IV)}(t) + 2\Omega_k^{\ 2} \cdot \ddot{g}_k(t) + \Omega_k^{\ 4} \cdot g_k(t) = 0. \qquad (23)$$

Отримані рівняння (22), (23) легко проінтегрувати для конкретних (набільш загальних) початкових умов.

Висновки

1. Отримані диференціальні рівняння, що описують рух дискретно-континуальних систем протягом несталих (перехідних) процесів за умови оптимізації їх динамічних/кінематичних характеристик.

2. Результати проведених досліджень можуть бути надалі використані для вдосконалювання й уточнення існуючих інженерних методик розрахунків подібних систем, модельованих, зокрема, стрижнями із розподіленими параметрами.

Список літератури

1. *Араманович И.Г.* Уравнения математической физики / *И.Г. Араманович, В.И. Левин*. – М.: Наука, 1969. – 288 с.
2. *Кошляков Н.С.* Уравнения в частных производных математической физики / *Н.С. Кошляков, Э.Б. Глинер, М.М. Смирнов*. – М.: Высшая школа, 1970. – 712 с.
3. *Пановко Я.Г.* Введение в теорию механических колебаний / *Я.Г. Пановко*. – М.: Наука, 1991. – 256 с.
4. *Ловейкін В.С.* Оптимізація режимів руху машин і механізмів / *В.С. Ловейкін* // Машинознавство. – 1999. – №7(25). – С. 24–31.
5. *Голоскоков Е.Г.* Нестационарные колебания деформируемых систем / *Е.Г. Голоскоков, А.П. Филиппов*. – К.: Наукова думка, 1977. – 340 с.
6. *Филиппов А.П.* Колебания механических систем / *А.П. Филиппов*. – К.: Наукова думка, 1965. – 716.
7. *Коренев Б.Г.* Некоторые задачи теории упругости и теплопроводности, решаемые в бесселевых функциях / *Б.Г. Коренев*. – М.: Физматгиз, 1960. – 459 с.
8. *Бабицкий В.И.* Теория виброударных систем (приближённые методы) / *В.И. Бабицкий*. – М.: Наука, 1978. – 352 с.

Приведены дифференциальные уравнения, которые описывают движение дискретно-континуальных систем в течении неустановившихся (переходных) процессов, которые могут быть в дальнейшем использованы для совершенствования и уточнения существующих инженерных методик расчета подобных систем.

Математическое модулирование, дискретно-континуальные системы, оптимизация режимов движения.

Differential equations which describe movement of discrete-continual systems during unsteady (transitional) processes are presented. One may use these equations for improvement and clarification of existing engineering techniques and for analysis of such systems, as well.

Mathematical simulation, discrete-continual systems, optimization of motion regimes.

УДК 664.641.1

ДОДЕРЖАННЯ СТАБІЛЬНОСТІ ВОЛОГОСТІ ТІСТА ПРИ ЗАМІШУВАННІ

І.Я. Стадник, кандидат технічних наук
М.Р. Коневич, аспірант
Тернопільський національний технічний університет імені Івана Пулюя
В.П. Василів, кандидат технічних наук
Національний університет біоресурсів і природокористування України

У статті проведено аналіз методів контролю процесу замішування тіста, розглянуто основні чинники, які впливають на процес тістоутворення. Запропоновано математичну модель процесу замішування тіста, та нові конструктивні рішення для тістомісильних машин, які дозволять інтенсифікувати процес замішування та підвищити якість тіста.

Процес замішування тіста, вологість тіста, тістоутворення, методи контролю якості тіста, робоча камера тістомісильної машини, коефіцієнт неоднорідності, пластифікація тіста.

Постановка проблеми. Широке впровадження в хлібопекарській промисловості інтенсивного процесу замішування супроводжується підвищеними вимогами до якості готової продукції. Якість визначається точністю додержання заданого рецептурного складу тіста – особливо його вологістю. При цьому, точність компонентів визначається роботою дозуючого обладнання та конструкцією тістомісильної машини при відповідних режимах її роботи.