УДК 621.50

ВСТАНОВЛЕННЯ УМОВ ОПТИМАЛЬНОСТІ КЕРУВАНЬ ТЕХНІЧНИМИ СИСТЕМАМИ В ЗАКРИТІЙ ОБЛАСТІ ДОПУСТИМИХ ЗНАЧЕНЬ

В.С. Ловейкін, доктор технічних наук
Ю.О. Ромасевич, кандидат технічних наук

В статті виконано постановку узагальненої задачі оптимального керування технічною системою. Поставлена задача розв'язана за допомогою методу динамічного програмування. В результаті отримано оптимальне керування у вигляді зворотного зв'язку. На основі аналізу рівняння Беллмана та умови максимуму функції Гамільтона показано зв'язок між методами динамічного програмування та принципом максимуму. Встановлено умову оптимальності керування у закритій області допустимих значень.

Функціонал, керування, оптимізація, принцип максимуму, динамічне програмування, замкнута область.

Постановка проблеми. Велика кількість технічних систем працює із регуляторами, які налаштовані за допомогою певних методів [1]. Важливими методами налаштування регуляторів є методи оптимального керування. Вони дають змогу побудувати процес регулювання (керування) системою так, щоб певні показники її функціонування набували мінімальних або максимальних значень. Ці показники називаються критеріями оптимізації і, як правило, представляються у вигляді інтегральних або термінальних функціоналів.

Однією з проблем при синтезі оптимального керування є врахування обмежень на керування. Розв'язок задачі оптимального керування у функції фазових координат системи з подальшим використанням нелінійного елементу типу „насичення" дозволяє знайти квазіоптимальне керування [2]. Іншим методом врахувати обмеження на керування є варіація у процесі керування вагового коефіцієнта, який стоїть при функції керування у структурі критерію [3]. Останній метод вимагає значної обчислювальної потужності ЕОМ, оскільки на кожному кроці керування необхідно виконувати циклічну процедуру варіації вагового коефіцієнта з наступною перевіркою обмеження на величину керування. Таким чином, перший метод врахування обмежень не дає змоги знайти оптимальне керування, а другий – пов'язаний зі значною кількістю обчислень, які необхідно виконувати у режимі реального часу.

Аналіз останніх досліджень. Для знаходження оптимальних керувань технічними системами використовуються різноманітні методи. Використання того чи іншого методу пов'язане насамперед з характером задачі, яка розв'язується. Дамо короткий аналіз методів оптимального керування.

Найстарішим методом знаходження оптимального керування є варіаційне числення [4], зародження та розвиток якого пов'язаний з іменами Ейлера, Лагранжа, Пуассона, Веєрштрасса, Якобі, Лежандра та інших вчених. Леонард Ейлер вивів рівняння, яке є необхідною умовою інтегрального функціоналу. У подальшому розвиток варіаційного числення пов'язаний з узагальненням рівняння Ейлера, дослідженням необхідних умов екстремуму функціоналу та встановленням його типу (мінімум або максимум). Специфіка варіаційного числення полягає у тому, що функція, яка доставляє екстремум функціоналу, шукається у класі кусочно-гладких функцій. Крім того, область керувань є відкритою, тобто функція керування може набувати будь-яких значень. Сучасні приводи технічних систем не можуть створювати будь-які керуючі сигнали (зусилля, момент), тому зусилля математиків були направлені на подолання цих обмежень, тобто до пошуку оптимальних керувань у закритій області. Як зазначається у книзі Ю.П. Петрова [5] в 1913 році російський математик Н.Н. Гарнет у праці [6] виконала узагальнення основної теореми варіаційного числення. Вона довела, що якщо екстремум функціонала в замкнутій області існує й досягається в класі кусочно-гладких функцій, то він може досягатися тільки на кривих, що складені з відрізків екстремалей і кусків границі допустимої області.

У 60-х роках минулого сторіччя починають з'являтись інші методи знаходження оптимального керування. В СРСР школою математика Л.С. Понтрягіна була висунута гіпотеза згідно якої оптимальне керування доставляє максимум функції Гамільтона (будь-яку варіаційну задачу можна представити у формі рівнянь Гамільтона [7]). Згодом ця гіпотеза була доведена для лінійних систем, вона отримала назву „принцип максимуму”. Принцип максимуму дозволив розв'язати задачі, які неможливо було розв'язати за допомогою варіаційного числення, наприклад задачу максимальної швидкодії. Необхідно відмітити, що розв'язок цієї задачі для динамічної системи n-го порядку, яка має лише дійсні корені характеристичного рівняння, має не більше (n-1) перемикань, тобто переходів від верхньої межі області керувань до нижньої [8].

Цю теорему, яка названа „теоремою про n-інтервали” довів А.А. Фельдбаум.

Складність використання принципу максимуму полягає у тому, що необхідно шукати спряжені функції, які входять у вираз оптимального керування. Апріорної інформації для цього дуже мало: для деяких задач можна встановити лише вид спряжених функцій (поліноміальна, тригонометрична, поліноміально-тригонометрична тощо). Таким чином, принцип максимуму дає лише „якісну” інформацію про оптимальне керування. „Кількісну” інформацію про оптимальне керування необхідно шукати використовуючи інші методи, наприклад метод фазової площини [9].

Потужним методом для розв’язування задач оптимального керування не тільки технічними, але й економічними, соціальними та системами іншої природи, є динамічне програмування [10]. Автором даного методу є американський математик Р. Беллман, який встановив принцип оптимальності. На основі цього принципу було знайдено функціональне рівняння, яке є необхідною умовою оптимального керування. Функціональне рівняння Беллмана представляється у вигляді неоднорідного диференціального рівняння у частинних похідних. Для квадратичного інтегрального оптимізаційного критерію розв’язк функціонального рівняння Беллмана необхідно шукати у вигляді квадратичної форми. Для інших типів критеріїв знаходження розв’язку рівняння Беллмана представляє певні труднощі, які пов’язані з відсутністю рекомендацій щодо представлення функції Беллмана. У випадку, якщо динамічна система описується невеликим числом фазових координат, то доцільно використати дискретну форму методу динамічного програмування [10]. Однак, якщо фазових координат багато, то застосування дискретного динамічного програмування вимагає великого об’єму пам’яті ЕОМ. Цю проблему Р. Беллман назвав „прокляттям розмірності”.

Перевагою методу динамічного програмування є можливість знаходження оптимального керування у вигляді зворотного зв’язку (варіаційне числення та принцип максимуму дозволяють знаходити лише програмне оптимальне керування, тобто керування у функції часу). Саме ця перевага динамічного програмування обумовила широке застосування цього методу для синтезу оптимальних регуляторів [5, 7].

Одним із методів знаходження оптимального керування є метод моментів, розвиток якого пов’язаний з ім’ям академіка М.М. Красовського [12]. У обчислювальному плані цей метод є більш складнішим аніж інші методи, однак він дає змогу знайти екстремуми

„нестандартних” функціоналів, наприклад у вигляді норми вектор-функції керування [12].

Всі приведені вище методи встановлюють необхідні умови оптимальності процесу керування динамічними системами. Дослідження необхідних умов досягнення екстремуму функціоналу провів В.Ф. Кротов [13]. Ним доведено теорему, яка встановлює три умови для отримання оптимального керування. Перша з умов співпадає з функціональним рівнянням Р. Беллмана.

При розв’язуванні задач знаходження оптимального керування досить часто виникають різноманітні ускладнення. Вони можуть бути пов’язані з обчислювальною складністю задачі або принциповими труднощами її розв’язування. Для деяких типів задач оптимального керування точний розв’язок є неважливим: наближення до точного розв’язку (точне або грубе) дає гарні результати при керуванні, у той час як уточнення закону оптимального керування не призводить до значного покращення роботи системи (значного зменшення або збільшення функціоналу). Ці та інші причини спонукали дослідників до розробки наближених методів знаходження оптимального керування. Огляд та аналіз вказаних методів можна знайти у працях [14, 15] тому ми не будемо зупинятись на них детально.

Зазначимо, що для знаходження оптимального керування вантажопідйомними машинами дослідники використовували різні методи: варіаційне числення [16, 17], принцип максимуму Л.С. Понтрягіна [9, 16, 18], динамічне програмування [2], метод моментів [19] та наближені методи [20].

Мета досліджень. Метою даної роботи є встановлення умов оптимальності керувань технічними системами при врахуванні обмежень на величину керування.

Для досягнення поставленої мети необхідно вирішити такі завдання:

1. Виконати узагальнену постановку задачі оптимального керування динамічною системою;
2. Розв’язати задачу оптимального керування за допомогою методу динамічного програмування, тобто знайти керування у вигляді зворотного зв’язку;
3. Записати необхідну умову оптимальності згідно принципу максимуму та порівняти його з функціональним рівнянням Беллмана, тобто встановити зв’язок між цими методами;
4. На основі проведеного аналізу дати практичні рекомендації щодо використання оптимального керування у вигляді зворотного зв’язку при врахуванні обмежень на керування, тобто для закритої області керувань.

Результати досліджень. Постановка задачі оптимального керування повинна включати такі основні елементи:

1) математична модель руху динамічної системи. Вона, як правило, представляється у вигляді системи звичайних диференціальних рівнянь або рівнянь у частинних похідних. Хоча б одне рівняння повинно бути неоднорідним, що фізично означає можливість керувати рухом системи;

2) початкові та кінцеві умови руху. Ці умови встановлюють початковий стан системи та кінцевий – бажаний;

3) оптимізаційний критерій, який встановлює додаткові вимоги до виконання руху, наприклад, зниження енергоспоживання, тривалості руху, підвищення надійності системи тощо;

4) обмеження на керування, які, як правило, представляються у вигляді нерівності;

5) обмеження на фазові координати, їх вищі похідні за часом, інтегральні обмеження, в які входять фазові координати та різноманітні лінійні і нелінійні комбінації цих обмежень. Математично обмеження можуть бути представлені у вигляді рівностей або нерівностей.

У подальшому приведемо математичну постановку задачі оптимального керування, в яку входять всі приведені вище елементи окрім останнього. Зазначимо, що останнє обмеження у деяких випадках можна врахувати вже на етапі реалізації оптимального керування за допомогою цифрових швидкодіючих систем керування (мікроконтролерів, бортових комп’ютерів тощо).

Рівняння руху системи подамо у нормальній формі:

$$\dot{x}_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j + k_j u, \quad i = 1, ..., n, \tag{1}$$

де x_i – і-та фазова координата системи (крапка над символом означає диференціювання за часом); a_{ij} – деякі коефіцієнти; k_i – деякі коефіцієнти, які показують вплив керування на зміну фазової координати x_i; n – порядок системи (сума порядків диференціальних рівнянь, які описують динаміку руху системи).

Крайовими умовами руху системи є такі:

$$\begin{cases} x_i(t_0) = x_{i0}; \\ x_i(T) = x_{iT}, \end{cases} \tag{2}$$

де t_0 та T – початковий та кінцевий час руху системи відповідно.

Критерієм оптимізації для руху системи є такий інтегральний функціонал:

$$J = \int_{t_0}^{T} \left(\sum_{i=1}^{n} \delta_i x_i^2 + \left(1 - \sum_{i=1}^{n} \delta_i \right) u^2 \right) dt \to \min, \tag{3}$$

де δ_i – і-тий ваговий коефіцієнт, який показує важливість тієї чи іншої складової у підінтегральному виразі критерію (3), причому завжди повинна виконуватись така нерівність:

$$\sum_{i=1}^{n} \delta_i \le 1. \tag{3}$$

Обмеження, які накладаються на функцію керування записуються у такому вигляді:

$$u_{\min} \le u \le u_{\max}, \tag{4}$$

де $u_{\min}$ та $u_{\max}$ – відповідно нижня та верхня межі допустимої області керування.

Розв'язання задачі оптимального керування методом динамічного програмування .Для знаходження оптимального керування використаємо метод динамічного програмування. Для цього запишемо основне функціональне рівняння Беллмана [10]:

$$\min \left[\sum_{i=1}^{n} \delta_i x_i^2 + \left(1 - \sum_{i=1}^{n} \delta_i \right) u^2 + \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial S}{\partial x_i} \left(\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j + k_j u \right) \right] = 0, \tag{5}$$

де S – функція Беллмана (мінімальне значення критерію (3)), тобто $\min J = S$.

Поки що будемо вважати, що обмеження на керування (4) не існує. Тоді для знаходження розв'язку рівняння (5) продиференціюємо його ліву частину за u та прирівняємо отримане до нуля:

$$2u \left(1 - \sum_{i=1}^{n} \delta_i \right) + \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial S}{\partial x_i} k_j = 0. \tag{6}$$

З рівняння (6) знайдемо функцію оптимального керування для відкритої області керувань, тобто без врахування обмеження (4):

$$\underset{u_{opt} \in (-\infty;\infty)}{u_{opt}} = \frac{-1}{2\left(1 - \sum_{i=1}^{n} \delta_i \right)} \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial S}{\partial x_i} k_j . \tag{7}$$

Друга частинна похідна лівої частини рівняння (5) за керуванням u має такий вигляд:

$$2\left(1 - \sum_{i=1}^{n} \delta_i \right) \ge 0. \tag{8}$$

Нерівність (8) означає, що за виключенням випадку $\sum_{i=1}^{n}\delta_i = 1$ функція керування (7) доставляє лівій частині рівняння (5) мінімум.

Підставимо отриманий вираз (7) у рівняння (5) та будемо мати:

$$\sum_{i=1}^{n}\delta_i x_i^2 + \frac{\left(\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial S}{\partial x_i}k_j\right)^2}{4\left(1-\sum_{i=1}^{n}\delta_i\right)} + \sum_{i=1}^{n}\frac{\partial S}{\partial x_i}\left(\sum_{j=1}^{n}a_{ij}x_j - \frac{k_j}{2}\frac{\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial S}{\partial x_i}k_j}{\left(1-\sum_{i=1}^{n}\delta_i\right)}\right) = 0. \qquad (9)$$

Оскільки критерій (3) – квадратично-лінійний, то шукати функцію *S* необхідно у вигляді квадратичної форми:

$$S = S(x_i) = \sum_{i,\ j=1}^{n}A_{ij}x_i x_j, \qquad (10)$$

де A_{ij} – певні коефіцієнти, які необхідно знайти. Знайдемо частинні похідні виразу (10) за фазовими координатами:

$$\frac{\partial S}{\partial x_i} = 2A_{ii}x_i + \sum_{i=2}^{n}A_{ij}x_i. \qquad (11)$$

Підставимо отримані вирази у формулу (7) та запишемо:

$$\underset{u_{opt}\in(-\infty;\infty)}{u_{opt}} = \frac{-1}{2\left(1-\sum_{i=1}^{n}\delta_i\right)}\sum_{i=1}^{n}\left(2A_{ii}x_i + \sum_{i=2}^{n}A_{ij}x_i\right)k_j. \qquad (12)$$

Як тільки коефіцієнти A_{ij} будуть знайдені функція оптимального керування є визначеною.

Функція Гамільтона та зв'язок принципу максимуму з динамічним програмуванням. Використаємо підхід принципу максимуму для аналізу задачі оптимального керування (1)-(4). Для цього запишемо функцію Гамільтона:

$$H = \psi_0\left(\sum_{i=1}^{n}\delta_i x_i^2 + \left(1-\sum_{i=1}^{n}\delta_i\right)u^2\right) + \psi_i\left(\sum_{j=1}^{n}a_{ij}x_j + k_j u\right), \qquad (13)$$

де ψ_0 та ψ_i – спряжені змінні. Згідно принципу максимуму, оптимальне керування повинно доставляти функції Гамільтона максимум.

Якщо не враховувати обмежень (4), то для цього необхідно знайти частинну похідну функції Гамільтона за керуванням *u* та прирівняти отримане до нуля в результаті чого отримаємо:

$$\frac{\partial H}{\partial u} = 2\psi_0\left(1-\sum_{i=1}^{n}\delta_i\right)u + \sum_{j=1}^{n}\psi_i k_j = 0. \qquad (14)$$

З рівняння (14) отримаємо:

$$\underset{u_{opt}\in(-\infty;\,\infty)}{u_{opt}} = \frac{-1}{2\psi_0\left(1-\sum\limits_{i=1}^{n}\delta_i\right)}\sum_{j=1}^{n}\psi_i k_j. \tag{15}$$

Друга частинна похідна гамільтоніана (13) за керуванням *u* рівна:

$$\frac{\partial^2 H}{\partial u^2} = 2\psi_0\left(1-\sum_{i=1}^{n}\delta_i\right). \tag{16}$$

Якщо $\sum\limits_{i=1}^{n}\delta_i < 1$ та $\psi_0<0$ (як правило вибирають $\psi_0=-1$), то функція оптимального керування доставляє гамільтоніану максимум. Для закритої області керувань маємо:

$$\underset{u_{opt}\in[u_{\min};\,u_{\max}]}{u_{opt}} = \begin{cases} u_{\min},\ при \underset{u_{opt}\in(-\infty;\,\infty)}{u_{opt}} < u_{\min}; \\ \underset{u_{opt}\in(-\infty;\,\infty)}{u_{opt}},\ при\ u_{\min} \le \underset{u_{opt}\in(-\infty;\,\infty)}{u_{opt}} \le u_{\max}; \\ u_{\max},\ при \underset{u_{opt}\in(-\infty;\,\infty)}{u_{opt}} > u_{\max}. \end{cases} \tag{17}$$

Для подальших досліджень необхідно встановити зв'язок принципа максимуму з динамічним програмуванням. Перетворимо функціональне рівняння Беллмана (5) – подамо його у такому вигляді:

$$\max\left[-\left(\sum_{i=1}^{n}\delta_i x_i^2 + \left(1-\sum_{i=1}^{n}\delta_i\right)u^2\right) + \left(\sum_{i=1}^{n}\left(-\frac{\partial S}{\partial x_i}\right)\left(\sum_{j=1}^{n}a_{ij}x_j + k_j u\right)\right)\right] = 0, \tag{18}$$

Порівнюючи вирази (13) та (18) приходимо до висновку, що:

$$\begin{cases} \psi_0 = -1; \\ \psi_i = -\dfrac{\partial S}{\partial x_i}. \end{cases} \tag{19}$$

Таким чином, спряжені функції, які використовуються у принципі максимуму є частинними похідними функції Беллмана за фазовими координатами у методі динамічного програмування. Підставимо отримані результати (19) у вираз оптимального керування (17). При цьому необхідно враховувати вирази (11) для частинних похідних функції Беллмана за фазовими координатами. У результаті підстановок отримаємо:

$$\underset{u_{opt}\in[u_{\min};\,u_{\max}]}{u_{opt}} = \begin{cases} u_{\min}, \ \ при \ \ \dfrac{-1}{2\left(1-\sum\limits_{i=1}^{n}\delta_i\right)}\sum\limits_{i=1}^{n}\left(2A_{ii}x_i+\sum\limits_{i=2}^{n}A_{ij}x_i\right)k_j < u_{\min}; \\ \dfrac{-1}{2\left(1-\sum\limits_{i=1}^{n}\delta_i\right)}\sum\limits_{i=1}^{n}\left(2A_{ii}x_i+\sum\limits_{i=2}^{n}A_{ij}x_i\right)k_j, \\ при \ \ u_{\min} \le \dfrac{-1}{2\left(1-\sum\limits_{i=1}^{n}\delta_i\right)}\sum\limits_{i=1}^{n}\left(2A_{ii}x_i+\sum\limits_{i=2}^{n}A_{ij}x_i\right)k_j \le u_{\max}; \\ u_{\max}, \ \ при \ \ \dfrac{-1}{2\left(1-\sum\limits_{i=1}^{n}\delta_i\right)}\sum\limits_{i=1}^{n}\left(2A_{ii}x_i+\sum\limits_{i=2}^{n}A_{ij}x_i\right)k_j > u_{\max}. \end{cases} \qquad (20)$$

Як видно з приведеного виразу (20) оптимальне керування є складною функцією:

$$\underset{u_{opt}\in[u_{\min};\,u_{\max}]}{u_{opt}} = f(u_{\min}, u_{\max}, \ \delta_i, \ A_{ii}, \ A_{ij}, \ k_j, \ x_i). \qquad (21)$$

Однак, аналіз функції (21) для кожного конкретного випадку дає можливість спростити її. Межі допустимої області керування u_{max} та u_{min} є визначеними, оскільки відомими є параметри приводного механізму або системи керування. Коефіцієнт k_j відомий з математичної моделі руху системи (1). Що стосується коефіцієнтів A_{ii} та A_{ij}, то їх визначення вимагає розв'язати систему нелінійних алгебраїчних рівнянь. Як тільки вони будуть знайдені, можна говорити про те, що задача оптимального керування розв'язана.

Висновок. Таким чином, у даній роботі доведено, що обмеження оптимального керування у вигляді зворотного зв'язку за допомогою застосування нелінійного елементу типу „насичення" не призводить до втрати оптимальності процесу. Таке керування все одно доставляє максимум гамільтоніану і тому є оптимальним. Це значно спрощує методику розрахунку оптимального керування. Вона зводиться до виконання таких операцій: 1) постановка задачі оптимального керування; 2) запис необхідної умови оптимальності – функціонального рівняння Беллмана; 3) знаходження розв'язку рівняння Беллмана та встановлення виразу оптимального керування у вигляді зворотного зв'язку; 4) „відсікання" кусків функції оптимального керування, які виходять за межі допустимої області керувань з допомогою використання нелінійного елементу типу „насичення".

Список літератури

1. *Власенко В.А.* Динамическая настройка стандартных регуляторов / *В.А. Власенко, О.К. Мансурова*. – СПб: СПбГИТМО (ТУ), 2002. – 52 с.
2. Розробка мехатронних систем керування рухом кранового механізму з гнучким підвісом вантажу. Методичні рекомендації. Науково-методичний цент аграрної освіти / *В.С. Ловейкін, Д.Г. Войтюк, Ю.О. Ромасевич*, *Ю.В. Човнюк*– К.: 2011. – 27 с.
3. *Ловейкін В.С*. Дискретний метод синтезу оптимальних керувань технічними системами / *В.С. Ловейкін, Ю.О. Ромасевич* // Вісник Харківського національного технічного університету сільського господарства ім. Петра Василенка. Вип. 107. Том 2. – 2011. – С. 119-125.
4. *Петров Ю.П*. Вариационные методы теории оптимального управления / *Ю.П. Петров*. – Л.: Энергия, 1977. – 280 с.
5. *Петров Ю.П.* Очерки истории теории управления / *Ю.П. Петров.* – СПб.: БХВ-Петербург, 2012. – 272 с.
6. *Гернет Н.Н*. Об основной простейшей задаче вариационного исчисления / *Н.Н. Гарнет.* – СПб., 1913. – 56 с.
7. *Воронов А.А*. Теория автоматического управления. Часть II. Теория нелинейных и специальных систем автоматического управления / *А.А, Воронов, Д.П.. Ким, В.М. Лохин. [под. ред. А.А, Воронова].* – 2-е изд., перераб. И. доп. – М.: Высшая школа, 1986. – 504 с.
8. *Фельдбаум А.А*. Методы теории автоматического управления / А*. Фельдбаум, А.Г. Бутковский*– М.: Наука, 1971. – 744 с.
9. *Григоров О.В.* Совершенствование рабочих характеристик крановых механизмов: дисс. на соиск. степ. доктора техн. наук: 05.05.05 / *Григоров Отто Владимирович*. – Х., 1995. – 386 с.
10. *Беллман Р*. Динамическое программирование. / *Р. Беллман [под. ред. Воробьева Н.Н.]* – М.: Издательство иностранной литературы, 1960. – 400 с.
11. *Васильев Ф.П*. Обобщенный метод моментов в задачах оптимального управления / *Ф.П. Васильев, А.З. Ишмухаметов, М.М, Потапов.* – М.: Изд-во Москосвского университета, 1989. – 142 с.
12. *Красовский И.И*. Теория управления движением (линейные системы) / *И.И. Красовский* – М.: Наука, 1968. – 476 с.
13. *Кротов В.Ф.* Методы и задачи оптимального управления / *В.Ф. Кротов*, *В.И. Гурман*. – М.: Наука, 1973. – 389 с.
14. *Ловейкін В.С*. Аналіз прямих варіаційних методів розв'язку задач оптимального керування / *В.С. Ловейкін, Ю.О. Ромасевич, Ю.В. Ловейкін //* Вісник Національного університету „Львівська політехніка”. Оптимізація виробничих процесів і технічний контроль у машинобудуванні та приладобудуванні. – 2012 – № 729. – С. 70-79.
15. *Моисеев Н.Н.* Численные методы в теории оптимальных систем / *Н.Н. Моисеев*. – М.: Наука, 1971. – 424 с.
16. *Смехов А.А*. Оптимальное управление подъемно-транспортными машинами */ А.А. Смехов, Н.И. Єрофєев*. – М.: Машиностроение, 1975. – 239 с.
17. *Ловейкин В.С*. Расчеты оптимальних режимов движения механизмов строительных машин / *В.С. Ловейкин*. – К.: УМК ВО, 1990. – 168 с.
18. *Герасимяк Р.П.* Анализ и синтез крановых электромеханических систем / *Р.П. Герасимяк, В.А. Лещёв*. – Одесса.: СМИЛ, 2008. – 192 с.

19. *Геронимус Я.Л.* О некоторых методах определения оптимального закона движения, рассматриваемого как управляющее воздействие / *Я.Л. Геронимус, М.М. Перельмутер* // Машиноведение. – 1966. – № 6. – С. 6-24.
20. *Ловейкін В.С.* Оптимізація перехідних режимів руху кранового візка прямими варіаційними методами / *В.С. Ловейкін, Ю.О. Ромасевич* [Електронний ресурс]. – Режим доступу: URL: http://www.nbuv.gov.ua/portal/chem_biol/nvnau/2010_144_1/zmist.html. – Назва з екрана.

В статье выполнена постановка обобщенной задачи оптимального управления технической системой. Поставленная задача развязана с помощью метода динамического программирования. В результате получено оптимальное управление в виде обратной связи. На основе анализа уравнения Беллмана и условия максимума функции Гамильтона показана связь между методами динамического программирования и принципом максимума. Установлено условие оптимальности управления в закрытой области допустимых значений.
Функционал, управление, оптимизация, принцип максимума, динамическое программирование, замкнутая область.

The generalized statement of the problem of optimal control of a technical system has been carried out in the article. The statemented problem has been solved by dynamic programming. This gave the optimal control in the form of feedback. Based on the Bellman equation and the condition of the Hamiltonian maximum analysis shows the relationship between the methods of dynamic programming and the maximum principle. The optimal control condition is set for in a closed feasible region.
Functional, control, optimization, maximum principle, dynamic programming, closed area.

УДК 631352

АНАЛІЗ РІЗАЛЬНИХ АПАРАТІВ ДЛЯ БЕЗПІДПІРНОГО СКОШУВАННЯ РОСЛИН

О.Ф. Говоров, кандидат технічних наук
Національний науковий центр „Інститут механізації та електрифікації сільського господарства”