УДК 541.124:128

# ОБЩИЕ ПРИНЦИПЫ УСТОЙЧИВОСТИ ЭНЕРГЕТИЧЕСКИХ СИСТЕМ

***А.А. Долинский, академик***
***Институт технической теплофизики НАН Украины***
***Б.Х. Драганов, доктор технических наук***
***В.В. Козырский, доктор технических наук***
***Национальный университет биоресурсов и природопользования Украины***

*Изложены основы теории устойчивости систем, которая может оказаться справедливой при достаточно общих условиях, включая как равновесные, так и неравновесные состояния. Критерии устойчивости основаны на теории Ляпунова об устойчивости механических систем. Нестационарные состояния энтропии определены как функционал Ляпунова.*

***Неравновесные стационарные состояния, функционал Ляпунова, вариация энтропии, критерии устойчивости.***

**Цель исследований** – на основе приведенных основных положений теории устойчивости формирование условий и критериев линейной устойчивости для случаев малых возмущений.

**Материалы и методика исследований.** Состояния, далекие от равновесия, могут терять свою устойчивость и переходить к одному из многих возможных состояний. Движимая внутренними флуктуациями или другими малыми воздействиями система переходит к одному из многих возможных новых состояний. Эти новые состояния могут быть высокоорганизованными [1, 2].

Формулировка Ляпунова определяет условия устойчивости в точной математической форме (с ясным интуитивным смыслом). Пусть $X_s$ – стационарное состояние системы. В общем случае $X$ может быть $r$ - мерным вектором с компонентами $X_k \ (k = 1,2\ldots, r)$. Обозначим компоненты $X_s$ как $X_{sk}$. Допустим, что эволюция $X$ описывается уравнением:

$$\frac{dX_k}{dt} = Z_k(X_1, X_2, \ldots, X_r; \lambda_j), \tag{1}$$

где $\lambda_j$ – параметры, которые могут зависеть, а могут и не зависеть от времени. В общем случае, если $X_k$ есть функция не только времени $t$, но и координаты $X$, уравнение (1) следует переписать в виде дифференциального уравнения в частных производных, в котором $Z_k$ – оператор частного дифференцирования.

Стационарное состояние $X_{sk}$ определяется решением системы уравнений:

$$\frac{dX_k}{dt} = Z_k\left(X_{s1}, X_{s2}, \ldots, X_{sr}; \lambda_j\right) = 0 \qquad \left(k = 1,2,\ldots, r\right). \tag{2}$$

Для понимания устойчивости стационарного состояния можно рассмотреть поведение малых возмущений $\delta X_k$. Прежде всего определим по касательной к точке $X_k$ положительную функцию $L(\delta X)$ – так называемое «удаление». Если это «удаление» между $X_{sk}$ и возмущенным состоянием ($X_{sk} + \delta X_k$) монотонно уменьшается со временем, то стационарное состояние устойчиво. Таким образом, состояние $X_{sk}$ устойчиво, если

$$L(\delta X_k) < 0; \quad \frac{dL(\delta X_k)}{dt} < 0. \tag{3}$$

Функция $L$, удовлетворяющая (3), называется функцией Ляпунова. Если переменные $X_k$ являются функциями координат (например, в неравновесных системах это могут быть концентрации $n_k$), $L$ называется функционалом Ляпунова. «Функционал» – это отображение, сопоставляющее множеству функций действительное или комплексное число. Понятие устойчивости не ограничено стационарным состоянием; оно может быть расширено на периодические состояния [3]. Однако, поскольку здесь мы изучаем устойчивость неравновесных стационарных состояний, то не будем рассматривать устойчивость периодических (колебательных) состояний.

**Результаты исследований.** Энтропии – функция с определенным знаком для любой термодинамической системы. Рассматривая плотность энтропии $s(x)$ как функцию плотности энергии $u(x)$ и концентрации $n_k(x)$, можно записать отклонение энтропии от стационарного состояния в виде [4]:

$$\Delta S = \int \left[ \left( \frac{\partial s}{\partial u} \right)_{n_k} \delta u + \sum_k \left( \frac{\partial s}{\partial n_k} \right)_u \delta n_k \right] dV +$$

$$+ \frac{1}{2} \int \left[ \left( \frac{\partial^2 s}{\partial u^2} \right) (\delta u)^2 + 2 \sum_k \left( \frac{\partial^2 s}{\partial u \partial n_k} \right) \delta u \delta n_k + \sum_{ij} \left( \frac{\partial^2 s}{\partial n_i \partial n_j} \right) \delta n_i \delta n_j \right] dV = \delta S + \frac{1}{2} \delta^2 S\,. \tag{4}$$

Так как рассматривается неравновесное стационарное состояние, то термодинамические силы и соответствующие потоки энергии $J_u$ и вещества $J_k$ не обращаются в нуль. Следовательно, первая вариация отлична от нуля, $\delta S \neq 0$. Вторая вариация $\delta^2 S$ имеет определенный знак, потому что подынтегральное выражение, которое является второй вариацией равновесной энтропии в элементарном объеме, отрицательно:

$$\frac{1}{2} \delta^2 S < 0. \tag{5}$$

В итоге получаем соотношение [2]:

$$\frac{d}{dt} \frac{\delta^2 S}{2} = \sum_k \delta F_k \delta J_k\,. \tag{6}$$

Уравнение (6) показывает, что производная по времени от $\delta^2 S$ имеет такой же вид даже при неравновесных условиях. Отличие состоит в том, что вблизи равновесия $\sum_k \delta F_k \delta J_k \sum_k F_k J_k$ > 0, что не обязательно выполняется вдали от равновесия. Это свойство называется избыточным производством энтропии, но, строго говоря, речь идет об увеличении производства энтропии только вблизи равновесия: для возмущений от неравновесного состояния увеличение производства энтропии составляет $\delta P = \delta_F P + \delta_J P$.

Выражения (5) и (6) определяли бы функционал Ляпунова $L = -\delta^2 S$, если бы в стационарном состоянии $\sum_k \delta F_k \delta J_k$ > 0. Таким образом, неравновесное стационарное состояние устойчиво, если

$$\frac{d}{dt}\frac{\delta^2 S}{2} = \sum_k \delta F_k \delta J_k > 0. \tag{7}$$

Если неравенство (7) нарушается, то это означает, что система может быть неустойчивой, т.е. $\sum_k \delta F_k \delta J_k$ < 0 является необходимым, но недостаточным условием неустойчивости.

Предположим вначале, что стационарное решение $X_k^0$ уравнения известно, а значит

$$Z_k(X_i^0, \ldots, X_n^0, \lambda) = 0. \tag{8}$$

Необходимо выяснить, является ли это стационарное решение устойчивым к малым возмущениям $x_i$. Для этого выполняем линейный анализ устойчивости. Рассмотрим малое возмущение $x_k$:

$$X_k = X_k^0 + x_i(t). \tag{9}$$

Тогда разложение $Z_k(x_i)$ в ряд Тейлора дает

$$Z_k(X_i^0 + x_i) = Z_k(X_i^0) + \sum_j \left(\frac{\partial Z_k}{\partial X_j}\right)_0 x_i + \ldots, \tag{10}$$

где индекс 0 указывает, что производная берется при стационарном состоянии $X_i^0$. В линейном анализе устойчивости рассматриваются только линейные члены $x_j$; члены более высокого порядка отбрасываются, так как предполагается, что $x_j$ мало. Поскольку $X_i^0$ является стационарным состоянием, получаем для $x_k(t)$ линейное уравнение:

$$\frac{dx_i}{dt} = \sum_j \Lambda_{kj}(\lambda) x_j, \tag{11}$$

в котором $\Lambda_{kj}(\lambda) = (\partial Z_k / \partial X_j)_0$ – функция параметра $\lambda$. В матричном обозначении уравнение (11) может быть записано как

$$\frac{\mathrm{dx}}{\mathrm{dt}} = \Lambda \mathrm{x}, \tag{12}$$

где $\mathrm{x} = (x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n)$ – вектор; $\Lambda_{kj}$ – элементы матрицы $\Lambda$. Под матрицей $\Lambda$ иногда подразумевают матрицу якобиана.

Общее решение (12) может быть записано, если известны собственные значения и собственные функции матрицы $\Lambda$. Пусть $\omega_k$ – собственное значение, а $\psi_k$ – соответствующий собственный вектор:

$$\Delta\psi_k = \omega_k \psi_k \,. \qquad (13)$$

В общем случае, для $n$- мерной матрицы имеется $n$ собственных значений и $n$ собственных векторов. Если известны собственные значения $\omega_k$ и собственные функции $\psi_k$, то решение уравнения (12), соответствующее каждому собственному значению, имеет вид:

$$\text{x} = e^{\omega_k t}\psi_k \,. \qquad (14)$$

Если обозначить плотности и потоки стационарных состояний через $u_s$, $n_{ks}$, $J_{us}$, $J_{ks}$ и $\upsilon_{is}$, то $\dot{u}_s = -\nabla \cdot J_{us} = 0$ и $\dot{n}_{ks} = -\nabla J_{ks} + \sum_i \nu_{ki}\upsilon_{is} = 0.$ При действии возмущения $u = u_s + \delta u$, $J_u = J_{us} + \delta J_u$ и т. д., откуда

$$\delta\dot{u} = -\nabla\delta J_u \,; \qquad (15)$$

$$\delta\dot{n}_k = -\nabla\delta J_k + \sum_i \nu_{ki}\delta\upsilon_i \,. \qquad (16)$$

Подставим выражения для $\delta\dot{u}$ и $\delta\dot{n}_k$ в (12) и используем тождество

$$\nabla \cdot (fJ) = f\nabla J + J\nabla f \,, \qquad (17)$$

где $f$ – скалярная функция; $J$ – векторное поле. Используя теорему Гаусса, получим:

$$\int_V (\nabla J)\, dV = \int_\Sigma J d\text{a}, \qquad (18)$$

в которой $\sum$ – поверхность, ограничивающая объем $V$, $d$a – элемент площади поверхности. Итак, (12) можно переписать в виде:

$$\frac{1}{2}\delta^2\dot{S} = -\int_\Sigma \delta\left(\frac{1}{T}\right)\delta J_u \cdot d\text{a} + \int_V \delta\nabla\left(\frac{1}{T}\right)\delta J_u dV +$$

$$+\int_\Sigma \sum_k \delta\left(\frac{\mu_k}{T}\right)\delta J_k \cdot d\text{a} - \int_V \sum_k \delta\nabla\left(\frac{\mu_k}{T}\right)\delta J_k dV + \int_V \left[\sum_i \delta\left(\frac{A_i}{T}\right)\delta\upsilon_i\right] dV \,. \qquad (19)$$

При выводе этого уравнения учитывалось, что $\sum_k \nu_{ki}\delta(\mu_k/T) =$ $= \delta(A_i/T) = \delta(A_i/T)$. Потоки на поверхности определены граничными условиями и не подвержены флуктуациям, так что поверхностные члены исчезают. Это и приводит к требуемому результату:

$$\frac{1}{2}\delta^2\dot{S} = \int_V \delta\nabla\left(\frac{1}{T}\right)\delta J_u dV - \int_V \sum_k \delta\nabla\left(\frac{\mu_k}{T}\right)\delta J_k dV + \int_V \left[\sum_i \delta\left(\frac{A_i}{T}\right)\delta\upsilon_i\right] dV = \sum_\alpha \delta F_\alpha \delta J_\alpha \,. \qquad (20)$$

## Выводы

Исследование устойчивости энергетических систем позволяет обеспечить условия стационарной работы рассматриваемого явления, а также определить пути для надежной работы.

## Список литературы


1. Гленсдорф П. Термодинамическая теория структуры, устойчивости и флуктуаций / П. Гленсдорф, И. Пригожин. – М.: Мир, 1973. – 290 с.
2. Пригожин И. Современная термодинамика. От тепловых двигателей до диссипативных структур / И. Пригожин, Д. Кондепуди; пер. с англ. Ю. А. Данилова и В.В. Белого. – М.: Мир, 2002. – 461 с.
3. Minorski N. Nonlinear Oscillations. – Princeton, NJ – Van Nostrand, 1962.

4. Prigogine I. Introduction to Thermodynamics of Irreversible Processes. – N.Y.: John Wiley, 1967.

*Викладено основи теорії стійкості систем, яка може виявитися справедливою при досить загальних умовах, включаючи як рівноважні, так і нерівноважні стани. Критерій стійкості заснований на теорії Ляпунова про стійкість механічних систем. Нестаціонарні стани ентропії визначені як функціонал Ляпунова.*

***Нерівноважні стаціонарні стани, функціонал Ляпунова, варіація ентропії, критерії стійкості.***

*The foundations of the theory of stability of systems that may be valid under fairly general conditions, including both equilibrium and non-equilibrium states. Sustainability criteria are based on the theory of Lyapunov stability of mechanical systems. Unsteady state entropy defined as Lyapunov functional.*

***Nonequilibrium steady states, the Lyapunov functional, variation entropy, stability criteria.***

УДК 637.1

## НАЗЕМНЫЕ И СПУТНИКОВЫЕ СРЕДСТВА НАБЛЮДЕНИЯ, НАВИГАЦИИ И УПРАВЛЕНИЯ В ТОЧНЫХ АГРОТЕХНОЛОГИЯХ

***Д.С. Стребков, академик РАСХН***
***А.М. Башилов, доктор технических наук***
***В.А. Королёв, кандидат техических наук***
***Всероссийский научно-исследовательский институт электрификации сельского хозяйства, г. Москва***

*Рассмотрена стратегия развития фундаментальных направлений агроинженерной науки, включающая расширение сферы применения современных информационно-коммуникационных систем точного управления агротехнологическими процессами на основе интеллектуальной системы видеонаблюдения за подвижными объектами, в том числе животными в закрытых помещениях и на открытых пространствах.*

***Стратегия, информационно-коммуникационные системы, видеонаблюдение, идентификация, позиционирование, подвижные объекты, поведение животных, роботизированное производство.***

Уровень сельскохозяйственного производства, на фоне современных достижений научно-технического прогресса, требует модернизации, создания высококвалифицированных производств и привлечения молодёжи в село.