11. Relative contributions to the plasmon lines pareof metal nanoshells / S.L. Westcott, J.B. Jackson, C. Radloff[et. al.] // Physical Review B. – 2002. – N 66. – P. 155–431.

Исследовано влияние электромагнитного излучения (ЭМИ) на взаимодействие с малыми частицами (МЧ) и дисперсными системами (ДС) на их основе на границе раздела фаз. Обобщено применение теории Максвелл-Гарнетта (МГ) и приближения эффективной среды для дисперсных систем с соответствующими включениямм. Проанализированы условия возбуждения и распространения поверхностных электромагнитных мод (ПЭМ) в дисперсных системах под воздействием ЭМИ и влияние межфазных границ раздела на оптические спектры поглощения и рассеяния.

Электромагнитное излучение, дисперсная система, электродинамический отзыв, поверхностные плазмоны.

The influence of the electromagnetic radiation to interact with the small particle sandspherical disperse system son their basis attheinter face. Generalized application of the theory of Maxwell-Garnett and effective medium approximation to disperse systems with appropriatein clusions, analyzed the conditions of excitation and propagation of surface electromagnetic modesin disperse system sunder the influence of electromagnetic radiation and the effect of interphase boundarieson the optical absorption and scattering.

Electromagnetic radiation, dispersed systems, electrodynamic response, surface plasmons.

УДК 681.5.07

ДОСЛІДЖЕННЯ ЗАДАЧ ОБМЕЖЕНОЇ ЧУТЛИВОСТІ МЕТОДАМИ ПРАКТИЧНОЇ СТІЙКОСТІ

Л.А.Панталієнко, кандидат фізико-математичних наук

Наведено результати розрахунку областей стійкості для функцій чутливості у заданих структурах за наявності динамічних обмежень. Розглянуто постановки задач обмеженої та гарантованої чутливості, що охоплюються алгоритмами практичної стійкості.

Функції чутливості, параметри, збурена траєкторія, практична стійкість.

Проблема чутливості безпосередньо пов’язана з оцінюванням впливу збурень на працездатність реальної динамічної системи та охоплює низку задач різної природи [1,2]. Часто аналіз чутливості доцільно здійснювати за допомогою функцій чутливості, що визначаються як похідні функцій стану за параметрами при наявності певних вимог щодо диференційованості. Такий підхід стосується класу задач обмеженої та гарантованої чутливості, зокрема оптимізаційних постановок, що пропонується розв'язувати методами практичної стійкості [3,4].

Мета досліджень — розробка ефективних методів розрахунку областей початкових умов для задач обмеженої та гарантованої чутливості методами практичної стійкості.

Матеріали та методика досліджень. У роботі застосовуються математичні методи параметричної стійкості, що ґрунтуються на методі порівняння в якісній теорії систем диференціальних рівнянь.

Припустимо, що за деяким принципом визначена структура реальної системи у вигляді параметричної моделі, що досить об'єктивно відображує її основні властивості, у тому числі можливу залежність від параметрів.

Нехай динаміка об'єкта описується нелінійною системою диференціальних рівнянь:

$$\frac{dx}{dt} = f(x,t,\alpha), \quad f(0,t,0) \equiv 0, \quad t \in [t_0, T] \tag{1}$$

з початковими умовами

$$x(t_0) = x_0 = x_0(\alpha), \; t_0 = t_0(\alpha), \tag{2}$$

де α − m-вимірний вектор параметрів, що вибирається з деякої множини G_α, $x = x(t,\alpha)$ − вектор фазових координат вимірності n. При цьому залежність $x = x(t,\alpha)$ є однозначною, а множина G_α однозначно визначає усі змінні станів параметричної моделі.

Позначаючи через P_x множину бажаних станів об'єкта, а через $R_x(\alpha)$ − множину його реальних станів, що відповідають значенню параметра α, запишемо умови нормальної працездатності у вигляді:

$$R_x(\alpha) \subseteq P_x, \; \alpha \in G_\alpha. \tag{3}$$

Іноді умови бажаного функціонування об'єкта (3) зручно подавати так:

$$R_J(\alpha) \subseteq P_J, \; \alpha \in G_\alpha, \tag{4}$$

де $R_J(\alpha)$ − сукупність деяких функціоналів, визначених на множині вектора станів; P_J − множина допустимих станів цих функціоналів.

Нехай $\overline{\alpha} \in G_{\overline{\alpha}} \subset G_\alpha$ − деяке (незбурене) значення вектора параметрів, при якому виконується умова (3) або (4). Цьому значенню відповідає незбурена (розрахункова) траєкторія $\overline{x} = x(t,\overline{\alpha})$. При збуренні вектора $\overline{\alpha}$ одержимо значення $\alpha = \overline{\alpha} + \Delta\alpha$, $\Delta\alpha \in \Delta G_{\overline{\alpha}}(\overline{\alpha})$ та відповідну йому збурену траєкторію $x(t,\alpha) = x(t,\overline{\alpha} + \Delta\alpha)$, де $\Delta G_{\overline{\alpha}}(\overline{\alpha})$ − множина флуктуацій розрахункового значення вектора параметрів $\overline{\alpha}$. У термінах цих позначень співвідношення (3), (4) набувають відповідно вигляду:

$$R_x(\overline{\alpha} + \Delta\alpha) \subseteq P_x, \; \Delta\alpha \in \Delta G_{\overline{\alpha}}(\overline{\alpha}), \; \overline{\alpha} \in G_{\overline{\alpha}};$$

$$R_J(\alpha+\Delta\alpha)\subset P_J\,,\;\; \Delta\alpha\in\Delta G_{\bar{\alpha}}(\bar{\alpha}),\;\; \bar{\alpha}\in G_{\bar{\alpha}}\,.$$

Для конкретизації наведених умов працездатності системи (1) скористаємося поняттям функцій чутливості [ ].

За умовою виконання певних умов неперервності та диференційованості функції $u_i^{(j)}(t,\alpha)=\dfrac{\partial x_i(t,\alpha)}{\partial \alpha_j}$, $i=1,2,\ldots,n$, $j=1,2,\ldots,m$ є розв'язками спеціальної задачі Коші (для кожного конкретного значення α), що одержується прямим диференціюванням вихідної системи (1):

$$\frac{du}{dt}=\frac{\partial f(x,t,\bar{\alpha})}{\partial x}\Big|_{x=x(t,\bar{\alpha})}+\frac{\partial f(x,t,\bar{\alpha})}{\partial \alpha}\Big|_{x=x(t,\bar{\alpha})},$$

$$u(t_0)=\frac{dx_0(\alpha)}{d\alpha}-f(x_0(\alpha),t_0(\alpha),\alpha)\frac{dt_0(\alpha)}{d\alpha}.$$

Іноді функції чутливості необхідно визначити лише в момент T, який, крім умов (2), залежить від α: $T=T(\alpha)$.

Якщо розкид значення вектора параметрів в околі розрахункового значення $\bar{\alpha}$ є досить малим за величиною, то має місце наближена рівність:

$$x(t,\bar{\alpha}+\Delta\alpha)\approx x(t,\bar{\alpha})+U(t,\alpha)\big|_{\alpha=\bar{\alpha}}\cdot\Delta\alpha\,, \tag{5}$$

де $U(t,\alpha)\big|_{\alpha=\bar{\alpha}}$ – матриця функцій чутливості з елементами $u_i^{(j)}(t,\alpha)\big|_{\alpha=\bar{\alpha}}$ вимірності $n\times m$, обчислена в точці $\alpha=\bar{\alpha}$. Припускаючи додатково, що в околі точки $\bar{\alpha}$ існують неперервні функції чутливості до $(k+1)$-го порядку включно за комбінаціями параметрів α_1, $\alpha_2,\ldots$, α_m, одержимо за формулою Тейлора відповідний наближений вираз для збуреного руху $x(t,\alpha)$ [ ].

Позначимо через $\Delta x(t,\alpha)$ величину відхилення збуреного руху системи відносно незбуреного:

$$\Delta x(t,\alpha)=x(t,\alpha)-x(t,\bar{\alpha})=x(t,\bar{\alpha}+\Delta\alpha)-x(t,\bar{\alpha});$$
$$\bar{\alpha}\in G_{\bar{\alpha}}\,,\;\; \Delta\alpha\in\Delta G_{\bar{\alpha}}(\bar{\alpha}). \tag{6}$$

З урахуванням (5) вираз для відхилення (6) набуває вигляду:

$$\Delta x(t,\alpha)=U(t,\alpha)\big|_{\alpha=\bar{\alpha}}\cdot\Delta\alpha$$

або

$$\Delta x(t,\alpha)=\sum_{j=1}^{m}u^{(j)}(t,\bar{\alpha})\Delta\alpha_j\,. \tag{7}$$

Тут $u^{(j)}(t,\bar{\alpha})=\dfrac{\partial x(t,\alpha)}{\partial \alpha_j}\Big|_{\alpha=\bar{\alpha}}$ – n-вимірний вектор функцій чутливості, що характеризує величину швидкості змінювання збуреного руху відносно розрахункового значення $\bar{\alpha}_j$ ($j=1,2,\ldots,m$).

Так само, за наявності припущень щодо неперервності та диференційованості, можна записати й вираз для відхилення показника якості

$$\Delta J(\alpha) = J(\alpha) - J(\bar{\alpha}) = J(\bar{\alpha} + \Delta\alpha) - J(\bar{\alpha}) \approx u^*(\bar{\alpha})\Delta\alpha = \sum_{j=1}^{m} u^{(j)}(\bar{\alpha})\Delta\alpha_j \,, \qquad (8)$$

де $u^{(j)}(\bar{\alpha}) = \frac{\partial J(\alpha)}{\partial \alpha_j}\Big|_{\alpha=\bar{\alpha}}$ − функція чутливості функціонала за j-тим параметром, обчислена при $\alpha = \bar{\alpha}$ ($j = 1,2,\ldots,m$), $u^*(\bar{\alpha}) = (u^{(1)}(\bar{\alpha}), u^{(2)}(\bar{\alpha}), \ldots, u^{(m)}(\bar{\alpha}))$.

Щоб одержати поширені на практиці постановки задач теорії чутливості, виділимо з постановок (3), (4) клас задач відповідно вигляду:

$$R_x(\alpha) \subset P_x\,,\ R_u(\alpha) \subset P_u\,,\ \alpha \in G_\alpha\,; \qquad (9)$$

$$R_J(\alpha) \subset P_J\,,\ \bar{R}_u(\alpha) \subset \bar{P}_u\,, \alpha \in G_\alpha\,. \qquad (10)$$

Тут $R_u(\alpha)$, $\bar{R}_u(\alpha)$ − сукупність функцій чутливості, що відповідають конкретному значенню вектора параметрів α; P_u, $\bar{P}_u$ − бажані множини функцій чутливості $u_i^{(j)}(t, \alpha) = \frac{\partial x_i(t,\alpha)}{\partial \alpha_j}$, $i = 1,2,\ldots,n$, $j = 1,2,\ldots,m$; $u_i^{(j)}(\alpha) = \frac{\partial J(\alpha)}{\partial \alpha_j}$, $j = 1,2,\ldots,m$ відповідно.

Постановки задач (9), (10) стосуються класу задач проектування систем з обмеженою чутливістю, а найпростіший аналіз чутливості тут може полягати у перевірці згаданих співвідношень для розрахункового значення $\alpha = \bar{\alpha}$. При цьому задача (10) охоплює й оптимізаційні постановки з урахуванням вимог до чутливості: знайти вектор $\alpha^{(0)}$ за умовою

$$J(\alpha) \geq J(\alpha^{(0)}) \qquad (11)$$

за наявності обмежень

$$R_u(\alpha) \subset P_u\,,\ \alpha \in G_\alpha\,, \qquad (12)$$

де $J(\alpha) = J(\bar{\alpha} + \Delta\alpha)$, $J(\bar{\alpha})$ − значення показників якості для збуреного та незбуреного рухів, $\Delta\alpha \in \Delta G_{\bar{\alpha}}(\bar{\alpha})$.

Розглянемо, наприклад, задачу мінімізації функціонала від кінцевого стану системи (1) по вектору параметрів α:

$$J(\alpha^{(0)}) = \min_{\alpha \in G_\alpha} \Phi(x(T,\alpha)) \qquad (13)$$

при достатньо загальних обмеженнях на функції чутливості:

$$\Phi_t = \Gamma_t = \left\{ u(t,\alpha) : \left| \sum_{i=1}^{m} l_s^{(i)*}(t) u^{(i)}(t,\alpha) \right| \leq 1, s = 1,2,\ldots, N \right\},\ t \in [0,T], \qquad (14)$$

$$\Phi_t = \Psi_t = \{ u(t,\alpha) : \psi(u(t,\alpha),t) = \psi(u^{(1)}(t,\alpha), u^{(2)}(t,\alpha), \ldots, u^{(m)}(t,\alpha), t) \leq 1 \},\ t \in [0,T]. \qquad (15)$$

Тут $l_s^{(i)}(t)$, $i = 1,2,\ldots,m$, $s = 1,2,\ldots,N$ − відомі неперервні вектор-функції вимірності n;
$u^*(t,\alpha) = (u^{(1)*}(t,\alpha), \ldots, u^{(m)*}(t,\alpha))$ − вектор вимірності $n \cdot m$; $\psi(u(t,\alpha),t)$ − скалярна функція, неперервна за своїми аргументами разом з частинними похідни-

ми по елементах вектора $u(t,\alpha)$, причому множина Ψ_t опукла, замкнена та містить внутрішню точку $u(t,\alpha)=0$ для будь-яких $t\in[t_0,T]$.

Для розв'язання задачі (13) можна скористатися схемою градієнтного спуску [...]. Щоб задані обмеження (14), (15) виконувалися на кожному кроці ітераційної процедури на фіксованому $\alpha^{(0)}$, застосуємо методи практичної стійкості параметричних систем [...] у просторі функції чутливості.

Введемо до розгляду множину початкових умов $G_0=\left\{u(t_0):\ \sum_{i=1}^{m}u^{(i)*}(t_0)B_i u^{(i)}(t_0)\le c^2\right\}$, що характеризує ті значення $u(t_0,\alpha^{(0)})$, при яких будуть виконуватися співвідношення (14), (15) на фіксованому $\alpha^{(0)}$. Використовуючи алгоритми стійкості, одержимо оцінку множини G_0 за наявності умови (14):

$$c^2\le\min_{t\in[t_0,T]}\min_{s=1,2,\dots N}\frac{\left(1-\left|\sum_{i=1}^{m}l_s^{(i)*}(t)a^{(i)}(t)\right|\right)^2}{\sum_{i=1}^{m}l_s^{(i)*}(t)X(t,t_0)B_i^{-1}X^*(t,t_0)l_s^{(i)}(t)},$$

$$\left|\sum_{i=1}^{m}l_s^{(i)*}(t)a^{(i)}(t)\right|<1,\quad s=1,2,\dots N,\ t\in[t_0,T],\tag{16}$$

де $X(t,t_0)$ –нормована фундаментальна матриця розв'язків однорідної системи:

$$\frac{dX(t,t_0)}{dt}=\frac{\partial f(x,t,\bar\alpha^{(0)})}{\partial x}\bigg|_{x=x(t,\bar\alpha^{(0)})}X(t,t_0),\quad X(t_0,t_0)=E;$$

$$a^{(i)}(t)=\int_{t_0}^{t}X(t,\tau)\frac{\partial f(x(\tau,\bar\alpha^{(0)}),\tau,\bar\alpha^{(0)})}{\partial\alpha_i}d\tau,\quad i=1,2,\dots,m.$$

Для нелінійних обмежень на функції чутливості (15) оцінка області G_0 буде такою:

$$c^2\le\min_{t\in[t_0,T]}\min_{\bar u\in\Psi_t'}\frac{[g^*(\bar u,t)(\bar u-a(t))]^2}{g^*(\bar u,t)Q^{-1}(t)g(\bar u,t)},$$

$$g^*(u,t)(u-a(t))>0,\ \bar u\in\Psi_t',\quad t\in[t_0,T].$$

Тут $g^*(u,t)=grad_u^*\psi(u,t)$; $Q^{-1}(t)$ − діагональна матриця вимірності $n\cdot m$ з елементами $X(t,t_0)B_i^{-1}X^*(t,t_0)$, $i=1,2,\dots,m$ головної діагоналі; Ψ_t' − межа замкненої опуклої множини Ψ_t, $t\in[t_0,T]$.

У зв'язку з постановками задач (11), (12) виникає необхідність задовольнити вимоги до чутливості не тільки при $\alpha=\alpha^{(0)}$ (тут $\alpha^{(0)}=\bar\alpha$), а й визначити область параметрів $\Delta G_{\bar\alpha}(\Delta\alpha)$, для кожного $\Delta\alpha$ з якої виконуються співвідношення (12). Остання задача являє собою задачу гарантованої чутливості [...,3].

Реалізація сформульованих вимог за методами практичної стійкості можлива для випадку лінійної параметричної системи. З таких позицій можна підходити до розв’язання задачі гарантованої чутливості для вихідної нелінійної системи (1), здійснюючи її лінеаризацію в околі розрахункового руху [illegible].

Результати досліджень. Здійснено формалізацію загальних постановок поширених задач теорії чутливості. Для неперервного випадку параметричних систем одержано чисельні оцінки розрахунку задач обмеженої та гарантованої чутливості методами практичної стійкості.

Висновки

На підставі критеріїв практичної стійкості для параметричних систем розроблено алгоритми оцінювання областей початкових умов для функцій чутливості, зв’язаних з проектуванням малочутливих систем керування.

Список літератури

1. Розенвассер Е.Н. Чувствительность систем управления / Е.Н. Розенвассер, Р.М. Юсупов.– М.: Наука , 1981. – 464 с.
2. Дончев А. Системы оптимального управления: Возмущения, приближения и анализ чувствительности / А. Дончев. .– М.: Мир, 1987. – 156 с.
3. Панталиенко Л.А. Оценивание и оптимизация параметрических систем методами практической устойчивости / Л.А. Панталиенко // Доповіді Національної академії наук України. Математика. Природознавство. Технічні науки. –1998. – №8. – С.110-114.
4. Панталієнко Л.А. Дослідження практичної стійкості нелінійних систем, залежних від параметрів / Л.А. Панталієнко // Науковий вісник НАУ. ─ 2005. ─ №90 ─ С. 185−191.

Приведены результаты расчета областей устойчивости для функций чувствительности в заданных структурах при наличии динамических ограничений. Рассмотрены постановки задач ограниченной и гарантированной чувствительности, которые охватываются алгоритмами практической устойчивости.

Функции чувствительности, параметры, возмущенная траектория, практическая устойчивость.

The results of the calculation of stability regions for sensitivity functions defined structures in the presence of dynamic constraints. Considered problem statement and a guaranteed limited sensitivity covered algorithms practical stability.

Features sensitivity, parameters, perturbed trajectory, practical stability.