УДК 631.3:62-192

РОЗВ'ЯЗАННЯ ОСНОВНОЇ МАТРИЦІ МАТЕМАТИЧНОЇ МОДЕЛІ НАДІЙНОСТІ ФУНКЦІОНУВАННЯ СКЛАДНОЇ ТЕХНІЧНОЇ СИСТЕМИ «ЛЮДИНА - МАШИНА»

А.В. Новицький, кандидат технічних наук

Одержана модель для визначення ймовірності безвідмовної роботи системи для умови підвищення професійного та психофізіологічного рівня оператора. Отримано аналітичні залежності для визначення ймовірності безвідмовної роботи системи.

Надійність, система, модель, машина, людина - оператор, граф станів.

Постановка проблеми. При математичному описі поведінки складних технічних систем «людина - машина» (далі – СТС «ЛМ») застосовуються стохастичні диференціальні рівняння [1, 2]. Об'єднання вказаних рівнянь у відповідні системи в перетвореннях дають матриці, розв'язання яких є основою для встановлення критеріїв надійності СТС «ЛМ», якими є сільськогосподарські машини, обладнання та машини для тваринництва.

Аналіз останніх досліджень. У представленій раніше статті [3] показано, що для дослідження надійності СТС «ЛМ» при умові «старіння» складової «машина» та розвитку складової «людина - оператор», система набуває наступного вигляду:

$$\begin{cases} S\varphi_0(S) + S\varphi_0'(t) + S\varphi_0''(t) + S\varphi_1(S) + S\varphi_1''(t) = 1; \\ -\lambda_0' P_0(S) + (S+\lambda_1')\varphi_0'(S) = 0; \\ -h\lambda_0''\varphi_0(S) + (S+\lambda_1'')\varphi_1(S) = 0; \\ (S+\mu)\varphi_1(S) - \lambda_1'\varphi_0'(S) - \lambda_1''\varphi_0''(S) - \lambda_2\varphi_1''(S) = 0; \\ (S+\lambda_2)\varphi_1''(S) - t\lambda_0''\varphi_0(S) = 0. \end{cases} \qquad (1)$$

Для отриманої системи (1) сформуємо детермінант, який представляє собою коефіцієнт при невідомих у вигляді матриці:

$$\Delta = \begin{vmatrix} S & S & S & S & S \\ -\lambda_0' & (S+\lambda_1') & 0 & 0 & 0 \\ -h\lambda_0'' & 0 & 0 & (S+\lambda_1'') & 0 \\ 0 & -\lambda_1' & -\lambda_1'' & (S+\mu) & -\lambda_2 \\ -t\lambda_0'' & 0 & 0 & 0 & (S+\lambda_2) \end{vmatrix} \begin{Vmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{Vmatrix}. \qquad (2)$$

Як видно з (2), детермінант представляє собою квадратну матрицю п'ятого порядку. Для вирішення матриці і знаходження невідомих $\varphi_i(S)$ можна використати метод Гаусса:

$$\varphi_0(S)=\frac{\Delta_0}{\Delta};\varphi_0'(S)=\frac{\Delta_0'}{\Delta};\varphi_0''(S)=\frac{\Delta_0''}{\Delta},\ \varphi_1(S)=\frac{\Delta_1}{\Delta},\ \varphi_1(S)=\frac{\Delta_1''}{\Delta}. \qquad (3)$$

де Δ – рішення визначника (2); Δ_0 – рішення визначника для невідомої $\varphi_0(S)$; Δ_0' – рішення визначника для невідомої $\varphi_0'(S)$; Δ_0'' – рішення визначника для невідомої $\varphi_0''(S)$; Δ_1 – рішення визначника для невідомої $\varphi_1(S)$; Δ_1'' – рішення визначника для невідомої $\varphi_1(S)$.

Мета досліджень – отримання рішення основної матриці моделі надійності функціонування СТС «ЛМ» при умові розвитку складової «людина - оператор».

Результати досліджень. Виходячи з викладеного, для розрахунку ймовірності будь-якого із станів, що становлять інтерес у дослідженні, необхідно розв'язати основну матрицю Δ. Методика розв'язку матриці включає кілька етапів. Розглянемо перший етап розв'язку

1.1а. Визначимо множник, як $\frac{-\lambda_0'}{1}=-\lambda_0'$.

1.1б. Помножимо перший рядок матриці (1) на отриманий множник. Після перемноження отримаємо:

$$[-\lambda_0'];\ [-\lambda_0'];\ [-\lambda_0'];\ [-\lambda_0'];\ [-\lambda_0'];\ [-\lambda_0'].$$

1.1в. Вирахуємо від другого рядка матриці (2) рядок, який отримано в п.1.1б:

$$[(-\lambda_0'-(-\lambda_0')];\ [(S+\lambda_1'-(-\lambda_0')];\ [(0-(-\lambda_0')];\ [(0-(-\lambda_0')];\ [(0-(-\lambda_0')];$$
$$[(0-(-\lambda_0')].$$

Після виконання дій можемо записати:

$$[0];\ [(S+\lambda_1'+\lambda_0')];\ [\lambda_0'];\ [\lambda_0'];\ [\lambda_0'];\ [\lambda_0'].$$

Отриманий рядок задає друге рівняння нової перетвореної системи рівнянь в наступному вигляді:

$$0+(S+\lambda_1'+\lambda_0')P_0'+\lambda_0'P_0''+\lambda_0'P_1+\lambda_0'P_1''=\lambda_0'. \qquad (4)$$

Другий крок перетворень початкової матриці Δ (2) проводимо для першого і третього рядків аналогічно 1.1а – 1.1в.

1.2а. Визначимо множник $\frac{-h\lambda_0'}{1}=-h\lambda_0''$.

1.2б. Помножимо першу строчку матриці (2) на отриманий множник:

$$[-h\lambda_0''];\ [-h\lambda_0''];\ [-h\lambda_0''];\ [-h\lambda_0''];\ [-h\lambda_0''];\ [-h\lambda_0''].$$

1.2в. Вирахуємо від третього рядка матриці (2) ряд, який отримано в пункті 1.2б. Виходячи з цього, можемо записати:

$$[(-h\lambda_0'') - (-h\lambda_0'')];\ [0 - (-h\lambda_0'')];\ [0 - (-h\lambda_0'')];\ [(S + \lambda_1'') - h\lambda_0'')];\ [0 - (-h\lambda_0'')];$$
$$[0 - (-h\lambda_0'')].$$

Після спрощення запишемо:

$$[0];\ [h\lambda_0''];\ [h\lambda_0''];\ [(S + \lambda_1'' + h\lambda_0'')];\ [h\lambda_0''];\ [h\lambda_0''].$$

Звідси, можемо записати третє рівняння нової перетвореної системи в наступному вигляді:

$$0 + h\lambda_0''P_0' + h\lambda_0''P_0'' + (S + \lambda_1'' + h\lambda_0'')P_1 + h\lambda_0''P_1'' = h\lambda''. \qquad (5)$$

Третій крок перетворень початкової матриці Δ (2) є повторення попередніх дій, але для першого і четвертого рядків.

1.3а. Визначимо множник: $\frac{0}{1} = 0.$

1.3б. Помножимо перший рядок матриці (2) на знайдений множник:

$$[0];\ [0];\ [0];\ [0];\ [0];\ [0].$$

1.3в. Вирахуємо від четвертого рядка матриці (2) рядок, який отримано в пункті 1.3б:

$$[0];\ [-\lambda_1' - 0];\ [-\lambda_1'' - 0];\ [(S + \mu) - 0];\ [-\lambda_2];\ [0].$$

Після спрощення отриманих значень, можемо записати:

$$[0];\ [-\lambda_1'];\ [-\lambda_1''];\ [(S + \mu)];\ [-\lambda_2];\ [0].$$

Запишемо рядок коефіцієнтів, який задає четверте рівняння нової перетвореної системи:

$$0 - \lambda_1'P_0' - \lambda_1''P_0'' + (S + \mu)P_1 - \lambda_2 P_1'' = 0. \qquad (6)$$

Четвертий крок перетворень початкової матриці Δ також є повторенням початкових дій, але по відношенню до першого і п'ятого рядків.

1.4а. Визначимо множник для представлених рядків: $\frac{-t\lambda_0''}{1} = -t\lambda_0''.$

1.4б. Також помножимо першу строчку матриці (2) на отриманий множник:

$$[-t\lambda_0''];\ [-t\lambda_0''];\ [-t\lambda_0''];\ [-t\lambda_0''];\ [-t\lambda_0''];\ [-t\lambda_0''].$$

1.4в. Вирахуємо від п'ятого рядка матриці (2) рядок, який отримаємо в пункті 1.4б:

$$[(-t\lambda_0'') - (-t\lambda_0'')];\ [0 - (-t\lambda_0'')];\ [0 - (-t\lambda_0'')];\ [(0 - (-t\lambda_0'')];\ [(S + \lambda_2) - (-t\lambda_0'')];$$
$$[(0 - (-t\lambda_0'')].$$

Використовуючи отриману стрічку коефіцієнтів, запишемо п’яте рівняння для нової перетвореної системи:

$$0+t\lambda_0''P_0'+t\lambda_0''P_0''+t\lambda_0''P_1+(S+\lambda_2+t\lambda_0'')P_1''=t\lambda_0''. \qquad (7)$$

Враховуючи, що перше рівняння в новій системі зберігається, як і в матриці (2), а наступні рівняння визначаються отриманими залежностями (4) – (7), можемо записати нову перетворену систему. Отримана нова система рівнозначна по вирішенню:

$$\begin{cases} P_0+P_0'+P_0''+P_1+P_1''=1; \\ 0+\left(S+\lambda_1'+\lambda_0'\right)P_0'+\lambda_0'P_0''+\lambda_0'P_1+\lambda_0'P_1''=\lambda_0'; \\ 0+h\lambda_0''P_0'+h\lambda_0''P_0''+(S+\lambda_1''+h\lambda_0'')P_1+h\lambda_0''P_1''=h\lambda''; \\ 0-\lambda_1'P_0'-\lambda_1''P_0''+\left(S+\mu\right)P_1-\lambda_2P_1''=0; \\ 0+t\lambda_0''P_0'+t\lambda_0''P_0''+t\lambda_0''P_1+(S+\lambda_2+t\lambda_0'')P_1''=t\lambda_0. \end{cases} \qquad (8)$$

Для вирішення отриманої приведеної системи (8) також можемо використати метод Гаусса. Для другого етапу розрахунків із системи (8) отримаємо розширену матрицю Δ':

$$\left.\begin{array}{lllll} a_{11}'=1 & a_{12}'=1 & a_{13}'=1 & a_{14}'=1 & a_{15}'=1 \\ a_{21}'=0 & a_{22}'=(S+\lambda_1'+\lambda_0') & a_{23}'=\lambda_0' & a_{24}'=\lambda_0' & a_{25}'=\lambda_0' \\ a_{31}'=0 & a_{32}'=h\lambda_0'' & a_{33}'=h\lambda_0'' & a_{34}'=(S+\lambda_1''+h\lambda_0'') & a_{35}'=h\lambda_0'' \\ a_{41}'=0 & a_{42}'=-\lambda_1' & a_{43}'=-\lambda_1'' & a_{44}'=(S+\mu) & a_{45}'=-\lambda_2 \\ a_{51}'=0 & a_{52}'=t\lambda_0'' & a_{53}'=t\lambda_0'' & a_{54}''=t\lambda_0'' & a_{55}''=(S+\lambda_2+t\lambda_0'') \end{array}\right| \begin{array}{l} b_1'=1, \\ b_2'=\lambda_0', \\ b_3'=h\lambda_0'', \\ b_4'=0, \\ b_5=t\lambda_0'' \end{array} \qquad (9)$$

По аналогії, проведемо перетворення для другого і третього етапів розрахунків матриці (2). Після перетворень отримаємо ймовірності перебування системи в одному із станів:

$$P_1=\frac{b_4'''a_{55}'''}{a_{44}'''a_{55}'''-a_{45}'''a_{54}'''}. \qquad (10)$$

$$P_1''=-\frac{b_4'''a_{54}'''}{a_{44}'''a_{55}'''-a_{45}'''a_{54}'''}. \qquad (11)$$

$$P_0''=\frac{h\lambda_0(S+\lambda_1')-a_{34}'''\left(\frac{b_4'''a_{55}'''}{a_{44}'''a_{55}'''-a_{45}'''a_{54}'''}\right)+a_{35}'''\left(\frac{b_4'''a_{54}'''}{a_{44}'''a_{55}'''-a_{45}'''a_{54}'''}\right)}{h\lambda_0''(S+\lambda_1')}. \qquad (12)$$

$$\begin{aligned} P_0'=\lambda_0'-& \\ -\lambda_0'&\frac{h\lambda_0(S+\lambda_1')-a_{34}'''\left(\frac{b_4'''a_{55}'''}{a_{44}'''a_{55}'''-a_{45}'''a_{54}'''}\right)+a_{35}'''\left(\frac{b_4'''a_{54}'''}{a_{44}'''a_{55}'''-a_{45}'''a_{54}'''}\right)}{h\lambda_0''(S+\lambda_1')}+ \\ +\lambda_0'&\frac{b_4'''a_{55}'''}{a_{44}'''a_{55}'''-a_{45}'''a_{54}'''}-\lambda_0'\frac{b_4'''a_{54}'''}{a_{44}'''a_{55}'''-a_{45}'''a_{54}'''}\Bigg/\left(S+\lambda_1'+\lambda_0'\right). \end{aligned} \qquad (13)$$

На основі отриманих аналітичних залежностей (10) – (13) та встановлення ймовірностей перебування системи в станах P_0', P_0'', P_1, P_1'', ймовірність P_0 буде становити:

$$P_0 = 1 - (P_0' + P_0'' + P_1 + P_1''). \qquad (14)$$

Висновок. Для спрощення аналізу отриманих аналітичних залежностей (10) – (13) та можливості практичного використання для оцінки надійності СТС «ЛМ», можемо накласти умову, що $\mu >> \lambda$. Виходячи з накладеної умови, в отриманих формулах (10) – (13), які є результатом аналітичних досліджень забезпечення надійності СТС «ЛМ» при зниженні їх технічного рівня («старінні» машини) і підвищенні професійно-технологічного рівня людини-оператора, можна без втрат достовірності теоретичних результатів знехтувати величинами інтенсивностей відмов λ_i другого і вищих ступенів. Подальші перетворення та встановлення визначника Δ основної матриці можна провести, якщо повернутись до визначення коефіцієнтів a_i та b_i.

Список літератури

1. *Бронштейн И.Н.* Справочник по математики / *И.Н. Бронштейн, К.А. Семендяев*. – М.: Наука, 1981. – 720 с.
2. *Ушаков И.А.* Курс теории надежности систем / *И.А. Ушаков*. – М.: Дрофа, 2008. – 239 с.
3. *Новицкий А.В.* Исследование надёжности системы «человек-машина» при условии развития составляющей «человек-оператор» / *А.В. Новицкий, К.Н. Думенко* // Motrol, motoryzacia i energetyka rolnictwa motorization and power industry in agriculture. – Lublin, 2014. – Vol. 16, № 2. – P. 117–121.

Получена модель для определения вероятности безотказной работы системы для условия повышения профессионального и психофизиологического уровня оператора. Получены аналитические зависимости для определения вероятности безотказной работы системы.

Надежность, система, модель, машина, человек – оператор, граф состояний.

The model for determining the probability of failure-free operation of system for provision of professional development and psycho-physiological levels of operator. The analytical dependence for determination of probability of failure of system.

Reliability, system, model, machine, man – operator, graph states.