УДК 681.5.07

ЗАДАЧІ ГАРАНТОВАНОЇ ЧУТЛИВОСТІ ДЛЯ СИСТЕМ ЗВИЧАЙНИХ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ РІВНЯНЬ

Л.А.Панталієнко, кандидат фізико-математичних наук
e-mail: nni.elektrik@gmail.com

Наведено алгоритми оптимізації динамічних систем за допомогою функції чутливості. Розглянуто постановки задач гарантованої чутливості, що охоплюються критеріями практичної стійкості. Здійснено оцінювання області параметрів, для кожного значення з якої не порушуються обмеження на функції чутливості.

Ключові слова: гарантована чутливість, функції чутливості, параметри, стійкість

При розв'язанні низки прикладних задач, пов'язаних з проектуванням, керуванням і оптимізацією реальних систем [1,3,5], часто виникає необхідність в аналізі чутливості системи відносно різного роду збурень її параметрів. Для забезпечення нормального функціонування системи, зокрема, вводять обмеження на функції чутливості та оцінюють відповідну область початкових умов [2]. При цьому суттєво, щоб вимоги щодо чутливості виконувались не тільки на розрахункових режимах, а з урахуванням розкидів значень реальних параметрів. Такий підхід стосується класу задач гарантованої чутливості, що пропонується розв'язувати за алгоритмами практичної стійкості [2,3] для рівнянь чутливості.

Мета досліджень — розробка конструктивних методів розв'язання задач гарантованої чутливості на підставі алгоритмів практичної стійкості параметричних систем.

Матеріали та методика досліджень. У роботі застосовуються математичні методи теорії стійкості, чутливості та оптимізації.

Розглянемо спочатку лінійну систему диференціальних рівнянь:

$$\frac{dx}{dt} = A(t)x + G(t)\alpha, \ t \in [t_0, T], \tag{1}$$

з початковими умовами

$$x(t_0) = x_0 = x_0(\alpha), \ t_0 = t_0(\alpha). \tag{2}$$

Тут α − m-вимірний вектор параметрів, що вибирається з деякої множини G_α; $x = x(t,\alpha)$ − вектор фазових координат вимірності n; $A(t)$, $G(t)$ − матриці вимірності $n \times n$ і $n \times m$ відповідно.

Рівняння чутливості [2,5] для системи (1) мають вигляд:

$$\frac{du^{(i)}(t,\alpha)}{dt} = A(t)u^{(i)}(t,\alpha) + g^{(i)}(t),\ t \in [t_0, T], \qquad (3)$$

де $u^{(i)}(t,\alpha) = \dfrac{\partial x(t,\alpha)}{\partial \alpha_i}$ – вектор функцій чутливості вимірності n; $g^{(i)}(t)$ – n-вимірний вектор, що відповідає i- тому стовпцю матриці $G(t)$ ($i = 1,2,\ldots,m$).

Розглянемо задачу мінімізації функціонала від кінцевого стану системи (1) по вектору параметрів α:

$$J\left(\alpha^{(0)}\right) = \min_{\alpha \in G_\alpha} \Phi(x(T,\alpha)) \qquad (4)$$

за наявності обмежень на функції чутливості $[1-3]$:

$$\Phi_t = \Gamma_t = \left\{u(t,\alpha):\ \left|\sum_{i=1}^{m} l_s^{(i)^*}(t)u^{(i)}(t,\alpha)\right| \le 1, s = 1,2,\ldots,N\right\},\ t \in [t_0, T]; \qquad (5)$$

$$\Phi_t = \Psi_t = \{u(t,\alpha):\ \psi(u(t,\alpha),t) = \psi\left(u^{(1)}(t,\alpha), u^{(2)}(t,\alpha),\ldots,u^{(m)}(t,\alpha)\right) \le 1\},\ t \in [t_0, T]. \qquad (6)$$

Тут $l_s^{(i)}(t),\ i = 1,2,\ldots,m,\quad s = 1,2,\ldots,N$ – відомі неперервні вектор-функції вимірності n;

$u^*(t,\alpha) = \left(u^{(1)^*}(t,\alpha),\ldots,u^{(m)^*}(t,\alpha)\right)$ – вектор вимірності $n \cdot m$; $\psi(u(t,\alpha),t)$ – скалярна функція, неперервна за своїми аргументами разом з частинними похідними по елементах вектора $u(t,\alpha)$; множина Ψ_t – опукла, замкнена та містить нульову внутрішню точку для будь-яких $t \in [t_0, T]$.

Для розв'язання задачі (4) скористаємося схемою градієнтного спуску $[1]$:

$$\alpha_i^{(k+1)} = P_{G_{\alpha^{(k)}}}\left\{\alpha_i^{(k)} - \rho_k \cdot grad_x^* \Phi\left(x\left(T,\alpha^{(k)}\right)\right)u^{(i)}\left(T,\alpha^{(k)}\right)\right\},$$
$$i = 1,2,\ldots,m,\ k = 0,1,2,\ldots, \qquad (7)$$

де $P(.)$ – операція проектування вектора параметрів $\alpha^{(k+1)}$ на множину $G_{\alpha^{(k)}} \subset G_\alpha$, ρ_k – крок градієнтного спуску.

З метою урахування обмежень (5), (6) введемо до розгляду множину початкових умов для функцій чутливості $G_0 = \left\{u(t_0):\ \sum_{i=1}^{m} u^{(i)^*}(t_0)B_i u^{(i)}(t_0) \le c^2\right\}$ та застосуємо алгоритми практичної стійкості $[3]$ у просторі цих функцій.

Так, для системи диференціальних рівнянь (3) за наявності обмежень (5) умови практичної стійкості набувають вигляду:

$$c^2 \le \min_{t \in [t_0, T]} \min_{s = 1,2,\ldots N} \frac{\left(1 - \left|\sum_{i=1}^{m} l_s^{(i)^*}(t)a^{(i)}(t)\right|\right)^2}{\sum_{i=1}^{m} l_s^{(i)^*}(t)\mathrm{X}(t,t_0)B_i^{-1}\mathrm{X}^*(t,t_0)l_s^{(i)}(t)},$$

$$\left|\sum_{i=1}^{m} l_s^{(i)*}(t)a^{(i)}(t)\right| < 1 \quad , \; s = 1,2,...N \,, \; t \in [t_0, T], \qquad (8)$$

де $a^{(i)}(t) = \int_{t_0}^{t} \mathrm{X}(t,\tau) g^{(i)}(\tau) d\tau$, $i = 1,2,...,m$, а фундаментальна матриця розв'язків $\mathrm{X}(t,t_0)$ задовольняє матричному рівнянню

$$\frac{d\mathrm{X}(t,t_0)}{dt} = A(t)\,\mathrm{X}(t,t_0), \; \mathrm{X}(t_0,t_0) = \mathrm{E}.$$

Для нелінійних обмежень на функції чутливості оцінка початкової області G_0 буде такою:

$$c^2 \le \min_{t\in[t_0,T]} \min_{\bar{u}\in\psi_t'} \frac{[grad_u^* \psi(\bar{u},t)(\bar{u}-a(t))]^2}{grad_u^* \psi(\bar{u},t) Q^{-1}(t) grad_u \psi(\bar{u},t)},$$
$$grad_u^* \psi(\bar{u},t)(\bar{u}-a(t)) > 0 \,, \; \bar{u} \in \Psi_t' \; , \quad t \in [t_0, T]. \qquad (9)$$

Тут $a^*(t) = \left(a^{(1)^*}(t), a^{(2)^*}(t)..., a^{(m)^*}(t)\right)$, Ψ_t' – межа множини Ψ_t, $t \in [t_0, T]$, а квадратна матриця $Q^{-1}(t)$ вимірності $n \cdot m$ такої структури:

$$Q^{-1}(t) = \begin{pmatrix} X(t,t_0)B_1^{-1}X^*(t,t_0) & 0 & ... & 0 \\ 0 & X(t,t_0)B_2^{-1}X^*(t,t_0) & ... & 0 \\ ... & ... & ... & ... \\ 0 & 0 & ... & X(t,t_0)B_m^{-1}X^*(t,t_0) \end{pmatrix}.$$

На відміну від задач обмеженої чутливості [2], тут обмеження на функції чутливості будуть виконуватись для довільних α з множини

$$G_1^\alpha = \left\{\alpha : \; \sum_{i=1}^{m} \left(\frac{dx_0(\alpha)}{d\alpha_i} - \left(\tilde{A}x_0(\alpha) + \tilde{G}\alpha\right)\frac{dt_0(\alpha)}{d\alpha_i} \right)^* B_i \left(\frac{dx_0(\alpha)}{d\alpha_i} - \left(\tilde{A}x_0(\alpha) + \tilde{G}\alpha\right)\frac{dt_0(\alpha)}{d\alpha_i} \right) \le c^2 \right\},$$

де $\tilde{A} = A(t_0(\alpha))$, $\tilde{G} = G(t_0(\alpha))$.

Тому, проекції в ітераційній процедурі (7) необхідно здійснювати на множину $G_{\alpha^{(k)}} = G_\alpha \cap G_1^\alpha$. Якщо в момент t_0 функції чутливості не залежать від вектора параметрів, то множина G_1^α визначає неявно допуски на збурення початкових умов для функцій чутливості, за якими не порушуються відповідні обмеження на них у динаміці.

З таких позицій можна розглядати і нелінійні системи вигляду

$$\frac{dx}{dt} = f(x,t,\alpha), \;\; f(0,t,0) \equiv 0, \;\; t \in [t_0, T]. \qquad (10)$$

Якщо провести лінеаризацію системи (10) в околі будь-якого розрахункового руху, наприклад $x(t) = 0$, $\alpha = 0$, одержимо систему

$$\frac{dx}{dt} = A(t)x + G(t)\alpha + R(x,t,\alpha), \;\; t \in [t_0, T]. \qquad (11)$$

Рівняння чутливості, що відповідають (11), мають вигляд:

$$\frac{du^{(i)}(t,\alpha)}{dt} = A(t)u^{(i)}(t,\alpha) + g^{(i)}(t) + \frac{\partial R(x,t,\alpha)}{\partial \alpha_i}, \ t \in [t_0, T], \ i = 1,2,\ldots,m, \qquad (12)$$

де $A(t) = \left\{ \frac{\partial f_i(x,t,\alpha)}{\partial x_j} \right\}_n^n \Bigg|_{\substack{x=0,\\ \alpha=0}}$, $G(t) = \left\{ \frac{\partial f_i(x,t,\alpha)}{\partial \alpha_j} \right\}_n^m \Bigg|_{\substack{x=0,\\ \alpha=0}}$, $R(x,t,\alpha)$ − вектор-функція вимірності n, що визначає похибку апроксимації.

Критерії стійкості типу (8), (9) для системи (12) за наявності обмежених збурень $\frac{\partial R(x,t,\alpha)}{\partial \alpha_i}$ набувають відповідно вигляду:

$$c^2 \le \min_{t\in[t_0,T]} \min_{s=1,2,\ldots N} \left[1 - \left| \sum_{i=1}^{m} l_s^{(i)^*}(t) a^{(i)}(t) \right| - \int_{t_0}^{t} \left\| \sum_{i=1}^{m} l_s^{(i)^*}(t) X(t,\tau) \frac{\partial R(x(\tau),\tau,\alpha)}{\partial \alpha_i} \right\| d\tau \right]^2 \times$$

$$\times \left[\sum_{i=1}^{m} l_s^{(i)^*}(t) X(t,t_0) B_i^{-1} X^*(t,t_0) l_s^{(i)}(t) \right]^{-1},$$

$$\left| \sum_{i=1}^{m} l_s^{(i)^*}(t) a^{(i)}(t) \right| + \int_{t_0}^{t} \left\| \sum_{i=1}^{m} l_s^{(i)^*}(t) X(t,\tau) \frac{\partial R(x(\tau),\tau,\alpha)}{\partial \alpha_i} \right\| < 1 \quad , \ s = 1,2,\ldots N, \ t \in [t_0, T];$$

$$c^2 \le \min_{t\in[t_0,T]} \min_{s=1,2,\ldots N} c^2 \le \min_{t\in[t_0,T]} \min_{\bar{u}\in\Psi_t'} \frac{[grad_u^* \psi(\bar{u},t)(\bar{u} - a^{(i)}(t)) - a_l(t)]^2}{grad_u^* \psi(\bar{u},t) Q^{-1}(t) grad_u \psi(\bar{u},t)},$$

$$grad_u^* \psi(\bar{u},t)\left(\bar{u} - a^{(i)}(t) - a_l(t)\right) > 0, \ \bar{u} \in \Psi_t', \quad t \in [t_0, T],$$

де

$$a_l(t) = \int_{t_0}^{t} \left\| \sum_{i=1}^{m} grad_{u^{(i)}}^* \psi(\bar{u},t) X(t,\tau) \frac{\partial R(x(\tau),\tau,\alpha)}{\partial \alpha_i} \right\| d\tau,$$

а норма, що стоїть під знаком інтеграла, визначає максимум по змінних u, x із заданих областей.

Визначивши область змінювання параметрів $G_{\alpha^{(k)}}$, що не порушують відповідні вимоги для функцій чутливості, можна розв'язувати чисельно пряму задачу оцінювання збуреної траєкторії вихідної системи. Крім того, розв'язок задачі гарантованої чутливості визначає неявним чином допустиму множину розкиду параметрів при заданих обмеженнях на функції чутливості в динаміці. За допомогою поняття практичної стійкості за напрямом [4] можна одержувати оптимальні оцінки для наведених постановок задач.

Висновки

На підставі критеріїв практичної стійкості для параметричних систем розроблено алгоритми розв'язання задач гарантованої чутливості. За наявності динамічних обмежень на функції чутливості здійснене чисельне оцінювання області початкових умов, що неявно визначає допустиму множину розкиду параметрів вихідної системи.

Список літератури

1. Бублик Б.Н. Структурно-параметрическая оптимизация и устойчивость динамики пучков / Бублик Б.Н, Гаращенко Ф.Г., Кириченко Н.Ф. – К.: Наук. думка, 1985. – 304 с.
2. Панталієнко Л.А. Дослідження задач обмеженої чутливості методами практичної стійкості / Л.А. Панталієнко // Науковий вісник НУБіП України. Серія «Техніка та енергетика АПК». — 2014. — Вип. 194, ч.2. — С. 243−248.
3. Панталиенко Л.А. Оценивание и оптимизация параметрических систем методами практической устойчивости / Л.А. Панталиенко // Доповіді Національної академії наук України. Математика. Природознавство. Технічні науки. –1998. – №8 – С.110−114.
4. Панталієнко Л.А. Стабілізація руху динамічних систем за напрямом / Л.А. Панталієнко // Науковий вісник НУБіП України. — 2009. — №134, ч.1. — С. 195 — 200.
5. Розенвассер Е.Н. Чувствительность систем управления / Е.Н. Розенвассер, Р.М. Юсупов.– М.: Наука , 1981. – 464 с.

ЗАДАЧИ ГАРАНТИРОВАННОЙ ЧУВСТВИТЕЛЬНОСТИ ДЛЯ СИСТЕМ ОБЫКНОВЕННЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

Л.А. Панталиенко

Приведены алгоритмы оптимизации динамических систем с помощью функции чувствительности. Рассмотрены постановки задач гарантированной чувствительности, которые охватываются критериями практической устойчивости. Осуществлено оценивание области параметров, для каждого значения из которой не нарушаются ограничения на функции чувствительности.

Ключевые слова: ***гарантированная чувствительность, функции чувствительности, параметры, устойчивость***

PROBLEMS THE GUARANTEED SENSITIVITY FOR SYSTEMS OF ORDINARY DIFFERENTIAL EQUATIONS

L. Pantalienko

The algorithms optimization of dynamic systems using the function of sensitivity. The problem of guaranteed sensitivity covered practical stability criteria. Done field evaluation parameters for each value of which does not violate the restrictions on the function of sensitivity.

Keywords: guaranteed sensitivity, sensitivity functions, parameters, resistance