УДК 517.51

ОЦІНКА DT-МОДУЛЯ ГЛАДКОСТІ

О.Ю. Дюженкова, кандидат фізико-математичних наук[24]
e-mail: nni.elektrik@gmail.com

Розглянуто модулі гладкості Дітзіана-Тотіка (DT - модулі гладкості). Досліджено зв'язок між DT - модулем гладкості r-ї похідної функції f та звичайним k-м модулем гладкості r-ї похідної періодичної функції $\widetilde{f}=f(\cos t)$. Зокрема, одержано оцінку зверху для DT - модуля гладкості.

Ключові слова: рівномірне наближення функцій, конструктивна характеристика, модулі гладкості, оцінка зверху

Важливим розділом теорії наближень є конструктивні характеристики класів функцій, які виражаються через оцінки їх рівномірного наближення алгебраїчними многочленами. Для наближення неперервних на $[-1;1]$ функцій значні результати було отримано в термінах k-го модуля неперервності $\omega_k(\widetilde{f},t)$ функції $\widetilde{f}=f(\cos t)$ (див. [3]). Останнім часом для рівномірного наближення функцій використовують DT-модулі гладкості $\overline{\omega}_k(f,t)$, введені Дітзіаном і Тотіком (див. монографії Ditzian Z., Totik V. [5], Шевчука І.О. [4]).

Мета досліджень – встановлення зв'язку між DT- модулем гладкості та звичайним модулем гладкості k-го порядку для подальшої побудови конструктивної характеристики класів неперервних функцій.

Матеріали та методика досліджень. У роботі використовуються методи рівномірного наближення функцій ([1], [4]), зокрема інтерполяція функцій многочленами Лагранжа.

Результати досліджень. Одержано оцінку зверху для DT- модуля гладкості $\overline{\omega}_{k,r}(\tau,f^{(r)})$ r-ї похідної функції f через k-й модуль гладкості $\omega_k(\tau,\widetilde{f}^{(r)})$ r-ї похідної періодичної функції $\widetilde{f}$. Показано, що пряма оцінка для DT- модуля гладкості є кращою, ніж для звичайного модуля гладкості.

Нехай $C^0_{[a;b]}:=C_{[a;b]}$ – простір неперервних на $[a;b]\subset R$ функцій $f:[a;b]\to R$ із рівномірною нормою $\|f\|_{[a;b]}:=\max\limits_{x\in[a;b]}|f(x)|$. Позначимо через $C^r_{[a;b]}:=\{f\,|\,f^{(r)}\in C_{[a;b]}\}, r\in N$, а через C^r – підмножину функцій $f\in C_{[-1;1]}$, які мають неперервну r-ту похідну на інтервалі $(-1;1)$. Нехай $k\in N, h\in R$. Розглянемо основні означення.

© О.Ю. Дюженкова, 2015

Означення 1. Вираз $\Delta_h^k(f;t) := \sum_{i=0}^{k}(-1)^{k-i}\binom{k}{i} f\left(t - \frac{kh}{2} + ih\right)$ називається k*-ю симетричною різницею функції* f у точці $t \in R$ із кроком h.

Означення 2. *Модулем неперервності (гладкості)* k*-го порядку* функції $f \in C_{[a;b]}$ називається функція

$$\omega_k(\tau, f, [a;b]) := \sup_{h \in [0;\tau]} \left\| \Delta_h^k(f;x) \right\|_{[a+\frac{kh}{2}; b-\frac{kh}{2}]}, \quad \tau \geq 0 .$$

Позначивши $\varphi(x) := \sqrt{1-x^2}$, розглянемо модулі гладкості, введені З.Дітзіаном і В. Тотіком [5].

Означення 3. DT*- модулем гладкості* k*-го порядку* функції $f \in C_{[-1;1]}$ називається функція

$$\overline{\omega}_k(\tau, f) = \sup_{h \in [0;\tau]} \sup_{x:[x-\frac{kh\varphi(x)}{2}; x+\frac{kh\varphi(x)}{2}] \subset [-1;1]} \left\| \Delta_{h\varphi(x)}^k(f;x) \right\|_{[a+\frac{kh}{2}; b-\frac{kh}{2}]}, \quad \tau \geq 0$$

.

Означення 4 . DT *- модулем гладкості* k *-го порядку з вагою*

$$\varphi_r := \varphi_r(x,k,h) := \left(1 + x - \frac{kh\varphi(x)}{2}\right)^{\frac{r}{2}} \left(1 - x - \frac{kh\varphi(x)}{2}\right)^{\frac{r}{2}}, \quad r \in R ,$$

неперервної на $(-1;1)$ функції f називають функцію

$$\overline{\omega}_{k,r}(\tau, f) := \sup_{h \in [0;\tau]} \sup_{x:[x-\frac{kh\varphi(x)}{2}; x+\frac{kh\varphi(x)}{2}] \subset (-1;1)} \left\| \varphi_r \Delta_{h\varphi(x)}^k(f;x) \right\|_{[a+\frac{kh}{2}; b-\frac{kh}{2}]}, \quad \tau \geq 0 .$$

Зауважимо, що $\overline{\omega}_{k,0}(\tau, f) := \overline{\omega}_k(\tau, f)$.

Для дослідження зв'язку між $\overline{\omega}_{k,r}(\tau, f^{(r)})$ і $\omega_k(\tau, \widetilde{f}^{(r)})$ оцінимо DT - модуль гладкості $\overline{\omega}_{k,r}(\tau, f^{(r)})$ зверху. Для кожної функції $f \in C_{[-1;1]}$ позначимо $\widetilde{f} := \widetilde{f}(t) = f(\cos t)$. Надалі c_i – сталі, що залежать тільки від k та r.

Теорема. *Для будь-яких* $k \in N, r \in N$ *і довільної функції* $f \in C_{[-1;1]}$, *для якої* $\widetilde{f}^{(r)}(t)$ *неперервна на* R, *має місце оцінка*

$$\overline{\omega}_{k,r}(\tau, f^{(r)}) \leq c_1 \omega_k(\tau, \widetilde{f}^{(r)}), \quad \tau \geq 0 . \qquad (1)$$

Позначимо $m := k + r$. Зафіксуємо точку $x_0 \in (-1;1)$ і число $h > 0$ так, щоб $\left[x_0 - \frac{kd}{2}, x_0 + \frac{kd}{2}\right] \subset (-1;1)$, де $d := h\varphi(x_0)$.

Справедливість теореми випливає із оцінки

$$\left(\sqrt{\left(1-\frac{kd}{2}\right)^2-x_0^2}\right)^r \left|\Delta_d^k(f^{(r)},x_0)\right| \le c_2\omega_k(h,\tilde{f}^{(r)}). \qquad (2)$$

Для доведення нерівності (2) скористаємося відомими фактами (див. [4]). Якщо функція $f\in C_{[a;b]}^k$ і $\left(x-\frac{kh}{2};x+\frac{kh}{2}\right)\in[a;b]$, то $\Delta_h^k(f;x)\le h^k\left\|f^{(k)}\right\|_{[a;b]}$. Тоді для парних j справедлива оцінка

$$\left|\Delta_d^k((t^j)^{(r)};x_o)\right|\le c_3h^kt_0^k. \qquad (3)$$

Нехай $\tilde{l}=\tilde{l}(t)$ – многочлен Лагранжа степеня $\le k-1$, який інтерполює функцію $\tilde{f}^r$ у k рівновіддалених точках $t_i=-2t_0+\frac{2i}{k-1}2t_0$, $i=\overline{0,k-1}$. При $k=1$ покладемо $\tilde{l}(t)=\tilde{f}^r(0)$. За нерівністю Уітні (див. напр. [4], с. 50) маємо

$$\left\|\tilde{f}^{(r)}-\tilde{l}\right\|_{[-2t_0;2t_0]}\le c_4\omega(t_0).$$

Розглянемо многочлен $\tilde{\lambda}(t)=\sum_{m=0}^{r-1}\frac{1}{m!}t^m\tilde{f}^m(0)+\frac{1}{(r-1)!}\int_0^t(t-u)^{r-1}\tilde{l}(u)du$,

тоді для всіх $t_0\in[0;2t_0]$ та $j=\overline{0,r}$ маємо

$$\left|\tilde{\lambda}^{(j)}(t)-\tilde{f}^{(j)}(t)\right|\le c_5t^{r-j}\omega(t_0).$$

Враховуючи відому нерівність для многочлена $P=P(x)$ (степеня $\le k-1$)

$$\left\|P^{(j)}\right\|_{[a;b]}\le c_6(b-a)^{-j}\left\|P\right\|_{[a;b]},\quad j=\overline{0,k-1}, \qquad (4)$$

одержимо $\left|\tilde{\lambda}^{(j)}(0)\right|\le c_7\omega(\pi)<c_8h^{-k}\omega(h),\quad j=\overline{0,r}$,

зокрема $\left|\tilde{\lambda}^{(j)}(0)\right|\le c_9h^{-k}t_0^{r-j}\omega(h),\qquad j=\overline{r+1,m-1}. \qquad (5)$

Оскільки функція $\tilde{f}$ парна, то і многочлен $\tilde{\lambda}(t)$ також є парним, тобто $\tilde{\lambda}^j(0)=0$, якщо j - непарне. Позначимо $\lambda(x)=\tilde{\lambda}(\arccos x)$, тоді за формулою Маклорена маємо $\lambda^r(x)=\sum_{j=0}^{\left[\frac{m-1}{2}\right]}\frac{1}{(2j)!}\tilde{\lambda}^{(2j)}(0)(t^{2j})^r$,

$t=t(x)=\arccos x$.

Скориставшись нерівностями (3) і (5), знаходимо оцінку

$$\Delta_d^k(\lambda^r;x_0)\le c_{10}\omega(h). \qquad (6)$$

Позначимо через $\tilde{L}=\tilde{L}(t)$ – многочлен Лагранжа степеня $\le m-1$, який інтерполює функцію $\tilde{f}$ в m точках $t'_i=\beta+\frac{i(\alpha-\beta)}{m-1}$, $i=\overline{0,m-1}$. З нерівностей Уітні і Маршо (див. напр. [4], с. 51) та властивості k-го модуля гладкості випливає

$$\tau_1^{-k}\omega_k(\tau_1,\widetilde{f}^{(r)}) \le 2^k \tau_2^{-k}\omega_k(\tau_2,\widetilde{f}^{(r)}), \quad 0<\tau_2<\tau_1,$$

випливає $\left\|\tilde{L}-\tilde{\lambda}\right\|_{[0;2t_0]} \le c_{11}h^{-k}t_0^m\omega(h)$, звідки, враховуючи нерівність (4), маємо

$$\left|\tilde{L}^{(j)}(0)-\tilde{\lambda}^{(j)}(0)\right| \le c_{12}h^{-k}t_0^{\,m-j}\omega(h), \qquad j=\overline{0,r}. \tag{7}$$

Позначимо $L(x)=\widetilde{L}(\arccos x)$ і розкладемо різницю $L(x)-\lambda(x)$ за формулою Маклорена $L(x)-\lambda(x)=\sum_{j=0}^{m-1}\frac{1}{j!}(\widetilde{L}^{(j)}(0)-\widetilde{\lambda}^{(j)}(0))t^j$. Тоді має місце рівність $\Delta_d^k(L^{(r)}-\lambda^{(r)},x_0)=\sum_{j=0}^{m-1}\frac{1}{j!}(\widetilde{L}^{(j)}(0)-\widetilde{\lambda}^{(j)}(0))\Delta_d^k((t^j)^{(r)},x_0)$.

Зауважимо, що для довільної 2π-періодичної r раз диференційованої функції $\widetilde{\psi}(t)$ має місце зображення $\psi^r(x)=\sum_{j=1}^{r}\widetilde{\psi}^{(j)}(t)\frac{T_{j,r}(t)}{(\sin t)^{2r-j}}, \quad \sin t\ne 0$.

Скориставшись цим зображенням і нерівністю (7), одержимо оцінку (2), що й доводить теорему.

Висновки

У роботі було досліджено зв'язок між DT-модулем гладкості $\overline{\omega}_{k,r}(\tau,f^{(r)})$ та звичайним k-м модулем гладкості $\omega_k(\tau,\widetilde{f}^{(r)})$, в результаті чого одержано оцінку зверху для $\overline{\omega}_{k,r}(\tau,f^{(r)})$.

Список літератури

1. Дзядык В.К. Введение в теорию равномерного приближения функций полиномами / В.К. Дзядык. – М.: Наука, 1977.– 512 с.
2. Дюженкова О.Ю. Замечание о модуле гладкости З. Дитзиана и В. Тотика/ О.Ю.Дюженкова // Укр. мат. журнал. –1995.–47, № 12. – С.1627–1638.
3. Фуксман Л. Структурная характеристика функций, у которых $E_n(f;-1;1)\le Mn^{-(k+\alpha)}$ / Л. Фуксман // Успехи мат. наук.– 1965. –20, № 4. – С. 187–190.
4. Шевчук И.А. Приближение многочленами и следы непрерывных на отрезке функций/ И.А.Шевчук. – К.: Наук. думка, 1992. – 223 с.
5. Ditzian Z. Moduli of smoothness/ Ditzian Z., Totik V. Springer-Verlag, New York/Berlin, 1987. – 300 p.

ОЦЕНКА DT-МОДУЛЯ ГЛАДКОСТИ

О. Ю. Дюженкова

Рассмотрены модули гладкости Дитзиана-Тотика (DT - модули гладкости). Исследована связь между DT-модулем гладкости r-й *производной функции f и k-модулем гладкости r- й производной периодической функции $\widetilde{f} = f(\cos t)$. В частности, получена оценка сверху для DT -модуля гладкости.*

Ключевые слова: равномерное приближение функций, конструктивная характеристика, модули гладкости, оценка сверху

THE ESTIMATE FOR THE DT-MODULE OF SMOOTHNESS

O. Dyuzhenkova

We consider the DT - module of smoothness, introduced by Ditzian and Totik. We investigate the connection between the DT - module of smoothness of the r-s derivative of the function f and classical module of smoothness of the r-s derivative of the periodic function $\widetilde{f} = f(\cos t)$. In particular, we get the upper estimate for the DT -module of smoothness.

Keywords: function approximation, constructive characteristic, modules of smoothness, the upper estimate

УДК 517.53

ПРО МНОЖИНУ СКІНЧЕННИХ РІВНІВ НЕПЕРЕРВНИХ ФУНКЦІЙ

В.М. Сафонов, кандидат фізико-математичних наук
Національний університет харчових технологій
О.М. Нещадим, кандидат фізико-математичних наук
Національний університет біоресурсів і природокористування України
О.П. Зінькевич, кандидат фізико-математичних наук
Національний університет харчових технологій
e-mail: oleksandr_neshchadym@mail.ru

Розглянуто неперервні функції однієї дійсної змінної, які мають множину скінченних рівнів скрізь другої категорії. Доведено, що у разі нульвимірності зазначених відображень множина їх нескінченних рівнів ніде не щільна.

Ключові слова: рівень функції, нульвимірне відображення, ніде не щільна множина, скрізь щільна множина, множина другої категорії

© В.М. Сафонов, О.М. Нещадим, О.П. Зінькевич, 2015