Рассмотрены непрерывные функции одной действительной переменной, которые имеют множество конечных уровней всюду второй категории. Доказано, что в случае нульмерности указанных отображений множество их бесконечных уровней нигде не плотно.

Ключевые слова: уровень функции, нульмерное отображение, нигде не плотное множество, всюду плотное множество, множество второй категории

ON THE SET OF THE FINAL LEVEL CONTINUOUS FUNCTIONS

V. Safonov, A. Neshchadym, A. Zinkevych

This paper considers continuous functions of real variable with a set of finite levels of the second category. We proved that in the case of zero-dimensionality, the set of its infinite levels is nowhere-dense.

Keywords: level of function, zero-dimensional mapping, nowhere-dense set, dense set, set of the second category

УДК 517.51

ІТЕРАЦІЙНІ МЕТОДИ В ЗАДАЧАХ ПІДВИЩЕННЯ МІЦНОСТІ МАТЕРІАЛІВ

Т.Г.Криворот, асистент
e-mail:tania.krivorot@gmail.com

Досліджено термомеханічні зв’язані процеси, застосовуючи основні рівняння і співвідношення динамічної зв’язаної задачі термомеханіки. Для розв’язку задачі використано апроксимаційні схеми Кранка-Нікольсона за часом в поєднанні з ітераційним процесом, застосовано ітераційний метод і метод скінченних елементів.

Ключові слова: мікроструктурні перетворення, напружений стан, параметр, рівняння, модель, процес

Постановка термомеханічної задачі включає: співвідношення Коші, рівняння руху, рівняння теплопровідності, початкові умови, граничні умови термомеханічного навантаження. Імпульсна обробка металу є ефективним методом підвищення міцності, зносостійкості та довговічності металевих елементів системи енергозабезпечення.

Мета досліджень – чисельне визначення мікроструктурних перетворень та напруженого стану при термомеханічному навантаженні.

Матеріали та методика досліджень. Задача є нелінійною і розв’язується чисельно кроковим методом за часом, моделює термічний та силовий фактор дії лазерного опромінення поверхні металевих тіл.

Результати досліджень. Задача розв'язується чисельно з використанням часової схеми, ітераційного методу і методу скінченних елементів. Розрахунок концентрації фаз розпаду переохолодженого аустеніту проводився за допомогою термокінетичної діаграми і співвідношень для питомих об'ємів фаз. Закон накопичення нової фази вздовж траєкторії згідно з законом Коістінена–Марбургера апроксимується.

Розглядаються мікроструктурні перетворення у напівпросторі, на який діє термомеханічний імпульс. При цьому враховується вплив об'ємних і пластичних характеристик окремих фаз на напружений стан матеріалу. Задача, що розв'язується, моделює як термічний, так і силовий фактор дії лазерного опромінення поверхні металевих тіл при їх технологічній обробці, зокрема наклепі. Інтерес до таких задач обумовлений визначенням раціональних технологічних параметрів процесів зміцнення поверхонь металевих деталей [1].

Постановка також включає рівняння моделі Боднера–Партома.

$$\varepsilon_{zz} = \frac{\partial u_z}{\partial z};\ \varepsilon_{rr} = \frac{\partial u_r}{\partial r};\ \ \varepsilon_{\varphi\varphi} = \frac{u_r}{r};\ \ \varepsilon_{rz} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_z}{\partial r} + \frac{\partial u_r}{\partial z}\right),$$

де u_r і u_z – компоненти вектора переміщень; ε_{rr}, ε_{zz}, ε_{rz} і $\varepsilon_{\varphi\varphi}$ – компоненти тензора деформації.

$$\frac{\partial \sigma_{rr}}{\partial r} + \frac{1}{r}\left(\sigma_{rr} - \sigma_{\varphi\varphi}\right) + \frac{\partial \sigma_{rz}}{\partial z} = \rho \ddot{u}_r\ ;$$

$$\frac{\partial \sigma_{rz}}{\partial r} + \frac{1}{r}\sigma_{rz} + \frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial z} = \rho \ddot{u}_z,$$

де σ_{rr}, σ_{zz}, σ_{rz} і $\sigma_{\varphi\varphi}$ – компоненти тензора напружень; ρ – густина матеріалу,

$$c_V\dot{\theta} + 3\alpha\theta K_V\left(\dot{\varepsilon}_{kk} - 3\alpha\dot{\theta}\right) - \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(rk\frac{\partial \theta}{\partial r}\right) - \frac{\partial}{\partial z}\left(k\frac{\partial \theta}{\partial z}\right) - D' = r_s\ ,$$

де θ – температура ($^\circ C$); α, c_V і k – коефіцієнти лінійного теплового розширення, теплоємності при сталому об'ємі і теплопровідності відповідно; K_V – модуль об'ємного стиску;

$$\dot{\varepsilon}_{kk} = \dot{\varepsilon}_{rr} + \dot{\varepsilon}_{zz} + \dot{\varepsilon}_{\varphi\varphi}\,.$$

$$u_r = \dot{u}_r = 0;\quad u_z = \dot{u}_z = 0;\quad \theta = \theta_0,\quad t = 0\,,$$

де θ_0 – початкова температура ($^\circ C$).

Розглядається напівпростір $z > 0$, $0 < r < \infty$. Припускається, що від нуля відмінна лише осьова компонента переміщення u_z, причому $u_z = u_z(z,t)$, а також $\theta = \theta(z,t)$. Із цих припущень задача для напівпростору еквівалентна задачі для стержня $0 < r < R$, $z > 0$, на бічній поверхні якого реалізуються умови жорсткого гладкого контакту і теплоізоляції:

$$u_r = 0,\quad \sigma_{rz} = 0,\quad \frac{\partial \theta}{\partial r} = 0,\quad r = R,\quad z > 0$$

з умовами (6) – (7) на торці $z = 0$.

$$-k\frac{\partial\theta}{\partial z}=\begin{cases} q_0\sin\dfrac{\pi}{t_p}t, & t\le t_p,\\ 0, & t>t_p; \end{cases}$$

$$\sigma_{zz}=\begin{cases} -p_0\sin\dfrac{\pi}{t_\sigma}t, & t\le t_\sigma,\\ 0, & t>t_\sigma, \end{cases}$$

де q_0 і p_0 – задані параметри навантаження; t_p, t_σ – часові параметри навантаження – терміни дії імпульсів, між якими приймається співвідношення $t_\sigma = 2t_p$.

При термомеханічному навантаженні на тіло одночасно діють термічне і механічне навантаження, що супроводжуються взаємодією парціальних термомеханічних процесів.

Термомеханічна поведінка матеріалу описується уніфікованою моделлю течії Боднера-Партома [3], яка узагальнена на випадок мультифазового складу матеріалу. Сутність узагальнення полягає у використанні правила сумішей для визначення параметрів моделі, що відповідають за границю течії і тимчасовий опір матеріалу.

Модель включає такі співвідношення:

– рівняння адитивності деформації $\varepsilon_{ij}=\varepsilon_{ij}^{e}+\varepsilon_{ij}^{p}+\varepsilon_{ij}^{\theta ph}$, $\quad i,j=r,z,\varphi$,

– закон Гука $\quad s_{ij}=2G\left(e_{ij}-\varepsilon_{ij}^{p}\right)$, $\sigma_{kk}=3K_v\left(\varepsilon_{kk}-\varepsilon_{kk}^{\theta ph}\right)$,

– закон течії Прандтля-Рейса

$$\dot\varepsilon_{ij}^{p}=D_0\exp\left\{-\frac{1}{2}\left[\frac{\left(\bar K_0+K\right)^2}{3J_2}\right]^n\right\}\frac{s_{ij}}{\sqrt{J_2}},\quad \dot\varepsilon_{kk}^{p}=0,\ \dot\varepsilon_{jj}^{p}(0)=0,$$

– рівняння еволюції параметра ізотропного зміцнення

$$\dot K=m_1\left(\bar K_1-K\right)\dot W^{p},\ K(0)=0,$$

де G – модуль зсуву; K_v – модуль об’ємного стиску; s_{ij}, e_{ij} – девіатори тензорів напружень і деформації, $s_{ij}=\sigma_{ij}-\delta_{ij}\sigma_{kk}/3$, $e_{ij}=\varepsilon_{ij}-\varepsilon_{kk}\delta_{ij}/3$; δ_{ij} – символ Кронекера; J_2 – другий інваріант тензора напружень, $J_2=s_{ij}s_{ij}/2$; $\dot W^{p}$ – пластична потужність, $\dot W^{p}=\sigma_{ij}\dot\varepsilon_{ij}^{p}$; ε_{ij}^{p}, ε_{ij}^{e} – непружна і пружна складові деформації; $\varepsilon_{ij}^{\theta ph}$ – термофазова деформація, яка враховує зміну об’єму матеріалу при фазових перетвореннях і визначається через питомі об’єми та концентрації фаз, $\varepsilon_{ij}^{\theta ph}=\varepsilon^{\theta ph}\delta_{ij}$; D_0, n, $\bar K_0$, $\bar K_1$ і m_1 – параметри моделі.

У цій роботі параметри моделі $\bar{K}_0$ і $\bar{K}_1$ для мультифазового складу матеріалу визначаються за допомогою лінійного правила сумішей.

$$K_0 \to \bar{K}_0 = K_0^{(\xi)} y_\xi;$$

$$K_1 \to \bar{K}_1 = K_1^{(\xi)} y_\xi,$$

де y_ξ – об'ємні концентрації мікроструктурних фаз,

$\xi = f, p, b, m$; $K_1^{(\xi)}$, $K_0^{(\xi)}$ – параметри моделі для відповідних фаз.

Закон накопичення нової фази вздовж траєкторії згідно з законом Коістінена–Марбургера апроксимується виразом:

$$p_\xi = \left[1 - \exp\left(-k \frac{\theta_s - \theta}{\theta_s - \theta_e}\right)\right] p_{\xi e},$$

де θ, θ_s і θ_e – поточна температура і температури початку і кінця перетворення відповідно ($^\circ C$), $p_{\xi e}$ – максимальне значення нової фази; k – деякий коефіцієнт, його приймають $k = 3$. Розрахунок фаз ґрунтується на припущенні, що процент нової фази визначається за формулою $p_\xi = p_{as} y_\xi$, де величина p_{as} – відсоток при вході кривої охолодження в область фазового переходу, а y_ξ – поточне значення відносної фази. Початковою структурою матеріалу вважається $a = 0$, $b = 0,79$, $f + p = 0,11$, $m = 0,10$ [2].

Розрахунки проводились для стержня радіусом $R = 10^{-4}$ *м*, довжиною $L = 5 \cdot 10^{-3}$ *м*. Приймалося: $p_0 = 8$ *ГПа*, $q_0 = 2 \cdot 10^{11} кВт/м^2$, $t_p = 1 \cdot 10^{-8} c$, початковий крок за часом дорівнював $dt = 0.2 \cdot 10^{-10} c$. Початкова температура стержня θ_0 дорівнює $20^\circ \mathrm{C}$.

Розпад аустеніту в мартенсит починається при температурі $\theta = \theta_H \approx 390^\circ C$. При чому $t_m \approx 0.34 \cdot 10^{-7} c$ – час початку ефекту. В області $0 < z \le z_m$, де $z_m = 1.27 \cdot 10^{-7}$ *м,* збільшується об'єм мартенситної фази в порівнянні з аустенітною. Наростання концентрації мартенситу відбувається рівномірно у вказаній області, оскільки розподіл $\theta = \theta(z, t_m)$ при підході до θ_H є платоподібним. Це зумовлює фронтальний залишковий розподіл $m(z)$.

У приповерхневому шарі у момент часу виникають значні стискаючі напруження *ГПа.* Це зумовлено тим, що парціальні напруження термічної та механічної задачі накладаються.

Врахування залежності трансформаційних змін об'єму від мікроструктурного стану зумовлює більший рівень стискаючих радіальних напружень, які збільшують міцність і довговічність деталей конструкцій.

Висновки

У роботі для дослідження термомеханічних зв'язаних процесів використовуються основні рівняння і співвідношення динамічної зв'язаної задачі термомеханіки. Задача є нелінійною і розв'язується чисельно кроковим методом за часом. Використовується ітераційний метод і метод кінцевих елементів. Рівняння руху інтегруються неявним методом Ньюмарка, а рівняння течії – неявним методом Ейлера. Нелінійна крайова задача розв'язується методом простої ітерації. Лінеаризована задача термомеханіки на кожній ітерації розв'язується методом скінченних елементів на базі варіаційного формулювання Лагранжа.

Список літератури

1. Коваленко В. С. Микро– и нанообработка сверхмощными лазерными імпульсами / В. С. Коваленко // Оборудование и эксперимент для профессионалов. – 2003. – №4. – С. 4–14.
2. Сенченков И. К. Термодинамически согласованные модификации обобщенных моделей термовязкопластичности / И. К. Сенченков, Я. А. Жук, Г. А. Табиева // Прикл. механика. – 1998. – Т. 34, №4. – С. 53-60.
3. Шоршоров М. Х. Фазовые превращения и изменения свойств стали при сварке: Атлас./ М. Х. Шоршоров, В. В. Белов. – М.: Наука, 1972. – 220 с.

ИТЕРАЦИОННЫЕ МЕТОДЫ В ЗАДАЧАХ ПОВЫШЕНИЯ ПРОЧНОСТИ МАТЕРИАЛА

Т.Г.Криворот

Исследованы термомеханические связанные процессы, применяя основные уравнения и соотношения динамической связанной задачи термомеханики. Для решения задачи использованы аппроксимационные схемы Кранка-Никольсона по времени в сочетании с итерационным процессом, применены итерационный метод и метод конечных элементов.

Ключевые слова: микроструктурные преобразования, напряженное состояние, параметр, уравнения, модель, процесс

ITERATIVE METHODS IN THE TASK OF IMPROVING THE STRENGTH OF THE MATERIAI

T. Krivorot

Abstract thermomechanical related processes using basic equations and relations are dynamically linked thermomechanics problem. To solve the problem used approximation scheme Crank-Nicholson of time in conjunction with an iterative process, applied iterative method and finite element method..

Keywords: microstructural transformation, stresses state, parameter, equation, model, process