УДК 517.53

ПРО УМОВУ ЛІПШИЦЯ ДЛЯ ГАРМОНІЧНОЇ ФУНКЦІЇ

В. М. Сафонов, О. П. Зінькевич,
кандидати фізико-математичних наук
Національний університет харчових технологій
О. М. Нещадим, кандидат фізико-математичних наук
Національний університет біоресурсів
і природокористування України
e-mail: nni.elektrik@gmail.com

Анотація. *Розглянуто функцію гармонічну в жордановій області і неперервну в її замиканні. Якщо зазначена функція задовольняє умову Ліпшиця на межі області, то вона задовольняє цю умову в усій замкненій області.*

Ключові слова: ***гармонічна функція, субгармонічна функція, умова Ліпшиця, жорданова область.***

Поняття комплексної диференційованості та голоморфної функції лежать в основі комплексного аналізу. З голоморфними (аналітичними) функціями тісно пов'язаний такий клас дійсних функцій, як гармонічні функції. Відіграючи значну роль в аналізі, гармонічні функції мають важливі застосування в різних технічних питаннях. Особливо важливими в багатьох випадках виявляються дослідження, пов'язані з ліпшіцевими гармонічними функціями.

Мета досліджень – встановлення ліпшиевості гармонічної функції у замкненій жордановій області.

Матеріали та методика досліджень. Використано методи теорії функцій комплексної змінної.

Результати досліджень. Нехай С – комплексна площина. Введемо такі поняття [1], [2], [3]. Відкрита зв'язна множина точок $D \subset C$ називається областю. Множина всіх точок площини C, які не належать області D, але є граничними для її точок, називається межею цієї області і позначається через ∂D. Об'єднання області D та її межі ∂D збігається із замиканням області $\overline{D}$.

Гомеоморфний образ (образ при взаємно однозначному і взаємно неперервному відображенні) кола на комплексній площині називається жордановою (простою замкненою) кривою. Область D називається жордановою, якщо її межа ∂D складена із жорданових (замкнених) кривих.

Надалі для спрощення викладок будемо розглядати дійсну функцію u змінних x та y на площині C як функцію комплексної змінної $z = x + iy$ і позначатимемо $u = u(x, y) = u(z)$.

Означення 1. Гармонічною функцією в області $D \subset C$ називається однозначна і неперервна разом зі своїми частинними похідними перших двох порядків функція u, що задовольняє скрізь у цій області рівняння Лапласа

$$\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 .$$

Відомо, логарифм модуля голоморфної функції є гармонічною функцією лише в околах точок, де функція відмінна від нуля, а в нулях цей логарифм перетворюється у $-\infty$, тобто втрачає гармонічність. Субгармонічні функції утворюють більш загальний клас, який містить і логарифм модуля голоморфної функції. При цьому вони не зобов'язані бути скрізь неперервними і тому можна обмежитися лише вимогою півнеперервності. Дійсна функція u, $-\infty \le u < \infty$, яка визначена в деякому околі точки z_0, називається півнеперервною зверху в цій точці, якщо

$$\overline{\lim_{z \to z_0}}\, u(z) \le u(z_0) .$$

Функція $u : D \to [-\infty, \infty)$, що півнеперервна зверху в кожній точці області D , називається півнеперервною зверху в цій області.

Означення 2. Функція $u : D \to [-\infty, \infty)$ називається субгармонійною в області D, якщо вона півнеперервна зверху в D і для будь-якого достатньо малого круга K та довільної гармонічної в K і неперервної в замиоканні круга $\overline{K}$ функції h із того, що $h \ge u$ на ∂K випливає $h \ge u$ в K. При цьому функцію h називають гармонічною мажорантою функції u для круга K.

Для довільної гармонічної в області D функції u локально в околі кожної точки області можна побудувати голоморфну в цьому околі функцію, для якої u є дійсною або уявною частиною. Цей зв'язок дає змогу поширити на гармонічні функції деякі властивості голоморфних функцій, зокрема, принцип максимуму модуля, який буде використаний в подальшому в цій роботі. Якщо гармонічна в області D функція u досягає (локального) максимуму в якій-небудь точці, то вона є сталою в цій області. Розглядаючи субгармонічну функцію, приходимо до узагальненого принципу максимуму модуля. У разі, коли функція u субгармонічна в D і область $G \subset D$, то для будь-якої функції h, яка гармонічна в G і неперервна в $\overline{G}$, із того, що $h \ge u$ на ∂G випливає $h \ge u$ в G. При цьому, якщо функція u в деякій точці області G збігається зі своєю гармонічною мажорантою h , то $u \equiv h$ у G .

Означення 3. Функція $u(z)$, що визначена на множині $E \subset C$, задовольняє умову Ліпшиця порядку $\alpha\,(0 < \alpha \le 1)$ і записують $u(z) \in Lip\,\alpha$, якщо існує така стала L, що виконується

$$|u(z_2) - u(z_1)| \le L |z_2 - z_1|^{\alpha}$$

для будь-яких точок $z_1, z_2 \in E$.

Тепер маємо важливе для встановлення головного результату і цікаве саме по собі таке твердження.

Теорема 1. Якщо $u(z)$ – гармонічна функція в деякій області $D \subset C$, то $\ln|u(z)|$ – субгармонічна функція в цій області.

Доведення. У тих точках $z \in D \subset C$, де гармонічна функція $u(z)$ дорівнює нулю, функція $U = U(z) = \ln|u(z)|$ перетворюється, відповідно, у $-\infty$ і є неперервною (у загальному розумінні). Якщо $u(z) \neq 0$, то зрозуміло, що для диференціального оператора Лапласа (лапласіана) достатньо показати виконання нерівності $\Delta U \leq 0$.

Отже, маємо таке:

$$\frac{\partial U}{\partial x} = \frac{1}{u}\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} = -\frac{1}{u^2}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \frac{1}{u}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \text{ і } \frac{\partial U}{\partial y} = \frac{1}{u}\frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} = -\frac{1}{u^2}\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 + \frac{1}{u}\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}.$$

Звідси випливає нерівність

$$\Delta U = \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} = -\frac{1}{u^2}\left[\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2\right] \leq 0,$$

що й потрібно довести.

Нарешті, сформулюємо основну теорему і на підставі попередньої теореми дамо її доведення.

Теорема 2. Нехай функція $u(z)$ є гармонічною всередині жорданової області $D \subset$ і неперервною в її замиканні $\bar{D}$. Якщо вона задовольняє умову Ліпшиця на межі області $\partial D = \bar{D} \setminus D$:

$$|u(z) - u(z_0)| \leq |z - z_0|^\alpha, \quad 0 < \alpha \leq 1, \quad z, z_0 \in \partial D,$$

то вона задовольняє цю умову і на всьому замиканні $\bar{D}$.

Доведення. Припускаючи спочатку, що $z_0 \in \partial D$ і довільна точка $z \in \bar{D}$, покажемо виконання умови Ліпшиця. При цьому достатньо вважати, що для точки z_0 існує замкнений круг K_0 такий, що $\overline{K_0} \cap D = \varnothing$ і $\partial K_0 \cap \partial D = \{z_0\}$. Оскільки такі точки утворюють щільну множину на межі ∂D жорданової області D, то з неперервності функції $u(z)$ у замиканні області $\bar{D}$ зазначена умова Ліпшиця буде випливати для всіх точок $z_0 \in \partial D$.

Нехай z_0 – довільна досяжна кругом K_0 зовні межова точка області D і z_1 – центр круга K_0, причому $\delta = |z_1 - z_0|$. На радіусі з кінцями z_0 і z_1 візьмемо точку

$$z_2 = z_0 + \delta^2 \cdot \frac{z_1 - z_0}{|z_1 - z_0|}.$$

Тоді для всіх точок $z \in \bar{D}$ маємо нерівність

$$|z - z_0| \leq |z - z_2| \cdot \frac{2\delta}{2\delta - \delta^2} = |z - z_2| \cdot \frac{2}{2 - \delta}.$$

Позначивши $\nu = \delta^{2\alpha}\left[(1+\delta)^\alpha - \left(\frac{2}{2-\delta}\right)^\alpha\right]$, знаходимо з останньої нерівності для всіх точок $z \in \bar{D}$:

$$|z-z_0|^\alpha + \nu \le |z-z_2|^\alpha \left(\frac{2}{2-\delta}\right)^\alpha + |z-z_2|^\alpha \left[(1+\delta)^\alpha - \left(\frac{2}{2-\delta}\right)^\alpha\right] = |z-z_2|^\alpha (1+\delta)^\alpha . \quad (1)$$

Покладемо $G_\nu = \left\{\zeta : |u(\zeta)-u(z_0)| > |\zeta - z_0|^\alpha + \nu, \zeta \in \overline{D}\right\}$. Припустимо, всупереч твердженню теореми, що $G_\nu \ne \varnothing$.

Оскільки при $z \in \partial G_\nu$ маємо рівність $|u(z)-u(z_0)| = |z-z_0|^\alpha + \nu$, то з (1) для всіх $z \in \partial G_\nu$ випливає нерівність $|u(z)-u(z_0)| \le |z-z_0|^\alpha (1+\delta)^\alpha$ або, що те саме,

$$\ln|u(z)-u(z_0)| \le \alpha \ln|z-z_0| + \ln(1+\delta)^\alpha . \quad (2)$$

Враховуючи, що на межі області ∂D умова Ліпшиця справджується, дістанемо включення $G_\nu \subset IntD$. Тому функція $\ln|u(z)|$ субгармонічна в G_ν згідно з теоремою 1 та неперервна на $\overline{G_\nu}$. При цьому функція $\alpha \ln|z-z_0| + \ln(1+\delta)^\alpha$ є гармонічною на $\overline{G_\nu}$. Унаслідок принципу максимуму модуля, нерівність (2) має місце для всіх $z \in G_\nu$. Приймаючи до уваги означення G_ν, а також нерівність (1), здобудемо вже для всіх $z \in D$ співвідношення

$$|u(z)-u(z_0)| \le \max\left\{|z-z_2|^\alpha (1+\delta)^\alpha, |z-z_0|^\alpha + \nu\right\} = |z-z_2|^\alpha (1+\delta)^\alpha .$$

Спрямуємо тут δ до нуля. Тоді для довільних точок $z \in \overline{D}$ має бути

$$|u(z)-u(z_0)| \le |z-z_0|^\alpha .$$

Зокрема, ця нерівність є справедливою і для точок $z \in G_\nu$, що суперечить означенню множини G_ν. Тому $G_\nu = \varnothing$. Звідси знову випливає ця сама нерівність для будь-якої точки $z \in \overline{D}$ і $z_0 \in \partial D$.

Візьмемо далі довільні точки $z, z' \in IntD$ і розглянемо допоміжну функцію

$$\varphi(\zeta) = u(\zeta + z') - u(\zeta + z) .$$

Ця функція гармонічна в околі початку координат $\zeta = 0$. Максимальна область G її гармонічності, яка містить цю точку, має ту властивість, що для кожної її межової точки ζ_0 або точка $\zeta_0 + z'$, або $\zeta_0 + z$ буде межовою для D.

Через неперервність функції $u(z)$ у замкненій області $\overline{D}$ функція $\varphi(\zeta)$ є неперервною в G. Отже, за принципом максимуму знайдеться точка $\zeta_0 \in \partial G$ така, що для всіх точок $\zeta \in \overline{G}$ виконується нерівність

$$|\varphi(\zeta)| \le |\varphi(\zeta_0)| . \quad (3)$$

Оскільки для такої точки ζ_0 одна з точок $\zeta_0 + z', \zeta_0 + z$ неодмінно є межовою для області D, то $|\varphi(\zeta_0)| \le |z'-z|^\alpha$.

Нарешті, поклавши $\zeta = 0$ в нерівності (3), дістанемо умову Ліпшиця:

$$|u(z')-u(z)| \le |z'-z|^\alpha .$$

Із довільності вибраної пари точок $z, z' \in IntD$ і випливає твердження основної теореми.

Висновки

Якщо деяка функція гармонічна в жордановій області комплексної площини і неперервна в її замиканні, причому на межі цієї області вона ліпшицева, то ця функція ліпшицева (з тією самою константою) і на всій замкненій області. Аналог цього результату для голоморфної функції у багатовимірному випадку отриманий раніше у [4].

Гармонічні й голоморфні функції тісно пов'язані між собою. Цей зв'язок дає змогу поширити на гармонічні функції чимало властивостей голоморфних функцій. Встановлений у цій роботі результат доповнює низку таких властивостей.

Список літератури

1. Маркушевич А. И. Теория аналитических функций. Т. 2 / А. И. Маркушевич. – М. : Наука, 1968. – 624 с.
2. Стоилов С. Теория функций комплексного переменного. Т. 2 / С. Стоилов. – М. : ИЛ, 1962. – 416 с.
3. Шабат Б. В. Введение в комплексный анализ. Ч. 1 / Б. В. Шабат. – М. : Наука, 1985. – 336 с.
4. Трохимчук Ю. Ю. Дифференцирование, внутренние отображения и критерии аналитичности / Ю. Ю. Трохимчук. – К. : Ин-т математики НАН Украины, 2008. – 539 с.

ОБ УСЛОВИИ ЛИПШИЦА ДЛЯ ГАРМОНИЧЕСКОЙ ФУНКЦИИ

В. М. Сафонов, А. П. Зинькевич, А. М. Нещадим

Аннотация. *Рассмотрена функция гармоническая в жордановой области и непрерывная в ее замыкании. Если указанная функция удовлетворяет условию Липшица на границе области, то она удовлетворяет этому условию во всей замкнутой области.*

Ключевые слова: ***гармоническая функция, субгармоническая функция, условие Липшица, жордановая область.***

ABOUT LIPSHIT'S CONDITION FOR THE HARMONIC FUNCTION

V. Safonov, A. Zinkevych, A. Neshchadym

Annotation. *Function harmonic in Jordan domain and continuous in its closure had been considered. If this function satisfies Lipshit's conditionon the border area, then it satisfies this condition in all closed areas.*

Key words: ***harmonic function, subharmonic function, Lipshit's condition, Jordan domain.***