УДК 681.5.07

НЕДИФЕРЕНЦІЙОВНІ ЗАДАЧІ ОПТИМІЗАЦІЇ ЧУТЛИВОСТІ ДИНАМІЧНИХ СИСТЕМ

Л. А. Панталієнко, кандидат фізико-математичних наук
e-mail: wnyrk001@mail.ru

Анотація. *Наведено алгоритми мінімізації чутливості динамічних систем до зміни параметрів. Розглянуто постановки мінімаксних задач для фіксованих початкових умов і заданого компакту. На підставі принципу максимуму Понтрягіна та ітераційного методу градієнтного спуску здійснено чисельне розв'язання оптимізаційних задач чутливості.*

Ключові слова: *параметри, оптимізація, чутливість, функції чутливості.*

Проблеми проектування та керування різних складних систем часто вирішуються шляхом розв'язання задач оптимізації із застосуванням методів параметризації [1]. За суттю даний підхід полягає у побудові параметричної моделі, що достатньо точно відображує властивості реальної системи. При цьому вихідна задача керування трансформується у скінченновимірну задачу нелінійного програмування відносно параметрів, що характеризують перехідний процес, функції та об'єкт керування.

На практиці, через різноманітні фізичні й технологічні причини, значення реальних параметрів завжди відрізняються від розрахункових (оптимальних), що змінює характеристики та якість функціонування системи. При значних відхиленнях характеристик об'єкта оптимізована система стає взагалі непрацездатною. У зв'язку з цим, набувають актуальності задачі проектування малочутливих до зміни параметрів систем [2]. На відміну від постановок задач з обмеженою та гарантованою чутливістю [3], вихідну задачу формалізовано до вигляду задачі оптимізації функцій чутливості. При такому підході приходимо до задачі недиференційовної оптимізації [3], розв'язання якої ґрунтується на методах теорії керування.

Мета досліджень — розробка чисельних методів розв'язання задач мінімізації чутливості на підставі принципу максимума Понтрягіна та алгоритмів недиференційовної оптимізації.

Матеріали та методика досліджень. У роботі застосовуються математичні методи теорії керування, чутливості та недиференційовної оптимізації.

Розглянемо нелінійну систему диференціальних рівнянь:

$$\frac{dx}{dt} = f(x,t,\alpha), \;\; f(0,t,0) \equiv 0, \;\; t \in [t_0, T] \qquad (1)$$

з початковими умовами із заданої компактної множини M_0. Тут $\alpha \in G_\alpha$ − m -вимірний вектор параметрів; $x = x(t,\alpha)$ − вектор фазових координат вимірності n.

Припустимо, що область допустимих значень параметрів G_α − опукла й компактна, а $f(x,t,\alpha)$ − достатньо гладка вектор-функція своїх аргументів. За такими умовами однозначно визначається розв'язок системи (1): $x(t)=x(t,x_0,\alpha)$.

Розв'язок задачі траєкторної оптимізації [1], наприклад,

$$\min_{\alpha\in G_\alpha}\max_{x_0\in M_0}\max_{t\in[t_0,T]}\Phi(x(t,x_0,\alpha))$$

гарантує оптимальність системи (1) лише при виконанні рівності $\alpha=\alpha^{(0)}$. Тому, для урахування відхилень параметрів від їх розрахункових значень на реальних режимах, доцільно мінімізувати максимальну чутливість системи до зміни параметрів:

$$\min_{\alpha\in G_\alpha}\max_{t;k;x_0\in M_0}\Phi\left(u^{(k)}(t,\alpha)\right), \tag{2}$$

де $\Phi(.)$ − опукла функція.

Дослідимо недиференційовну задачу оптимізації чутливості (2) на траєкторіях системи диференціальних рівнянь чутливості [2, 3]

$$\frac{du^{(i)}(t,\alpha)}{dt}=\frac{\partial f(\bar{x},t,\bar{\alpha})}{\partial x}u^{(i)}(t,\alpha)+ +\frac{\partial f(\bar{x},t,\bar{\alpha})}{\partial \alpha_i}, \tag{3}$$

що одержуються шляхом прямого диференціювання вихідної системи (1) по α_i. Тут $\bar{\alpha}$, $\bar{x}=x(t,\bar{\alpha})$ − розрахункові вектори параметрів та траєкторії системи (1), відповідно; $u^{(i)}(t,\alpha)=\dfrac{\partial x(t,\alpha)}{\partial \alpha_i}$, $i=1,2,...,m$ − n-вимірні вектори функцій чутливості першого порядку.

Функція $I(\alpha)=\min\limits_{\alpha\in G_\alpha}\max\limits_{t;k;x_0\in M_0}\Phi\left(u^{(k)}(t,\alpha)\right)$ є диференційованою в кожній точці α по будь-якому напрямку $\Delta\alpha$. При цьому, якщо $\alpha^{(0)}$ − розв'язок задачі (2), (3), то похідна функціоналу $I(\alpha)$ в точці $\alpha^{(0)}$ по довільному допустимому напрямку невід'ємна. На підставі цього формулюються необхідні умови оптимальності [1]: якщо $\alpha^{(0)}$ − розв'язок задачі (2) на траєкторіях системи рівнянь чутливості, то

$$\max_{\alpha\in G_\alpha}\min_{k\in M_k}\min_{x_0\in \overline{M}_{0,k}}\min_{\tau\in M_{x_0,k}}\int_{t_0}^{t}\psi^*(t,\tau)\left[\frac{\partial\tilde{f}\left(x,t,\alpha^{(0)},u^{(k)}\right)}{\partial\alpha}+\frac{\partial\tilde{f}\left(x,t,\alpha^{(0)},u^{(k)}\right)}{\partial x}\cdot\frac{\partial x}{\partial\alpha}\right]\Big|_{x=x(t,\alpha^{(0)})}\left(\alpha-\alpha^{(0)}\right)dt\le 0,$$

де M_k, $\overline{M}_{0,k}$, $M_{x_0,k}$ − множини точок, в яких, відповідно, досягаються максимуми по k, x_0, t у співвідношенні (2);

$\tilde{f}(.)$ − права частина системи диференціальних рівнянь чутливості;

$\psi(t,\tau)$ − розв'язок спряженої системи

$$\frac{d\psi(t,\tau)}{dt}=-\frac{\partial\tilde{f}^*\left(x,t,\alpha^{(0)},u^{(k)}\right)}{\partial u}\Big|_{x=x(t,\alpha^{(0)})}\psi(t,\tau),\ t\in[t_0,T],\ \tau\in M_{x_0,k}$$

з початковими умовами

$$\psi(\tau,\tau)=-\frac{\partial\Phi\left(u^{(k)}\left(t,\alpha^{(0)}\right)\right)}{\partial u}.$$

Для чисельного розв'язання оптимізаційних задач типу (1), (2) застосовується ітераційний метод:

$$\alpha^{(i+1)} = P_{G_{\alpha^{(i)}}}\left\{\alpha^{(i)} - \rho_k G\left(\alpha^{(i)}\right)\right\},\ i = 0,1,2,..., \qquad (4)$$

де $P_{G_{\alpha^{(i)}}}()$ − операція проектування вектора параметрів $\alpha^{(i+1)}$ на множину $G_{\alpha^{(i)}} \subset G_\alpha$, ρ_k − послідовність додатних чисел, що задовольняють умови збіжності ітераційного процесу;

$G\left(\alpha^{(i)}\right)$ − вектор, що визначає напрям спуску [4].

Розглянемо докладно один зі способів побудови вектора $G\left(\alpha^{(i)}\right)$ на i-тій ітерації [4]. З цією метою, задамо додатні числа $\varepsilon_i^{(1)}$, $\varepsilon_i^{(2)}$, $\varepsilon_i^{(3)}$, що визначають точність обчислення максимумів по k, x_0, t. Знайдемо множини

$$M_k^{(i)} = \left\{k : \max_{x_0 \in M_0}\max_{t\in[t_0,T]} \Phi\left(u^{(k)}\left(t, x_0, \alpha^{(i)}\right)\right) \geq \max_{k=1,2,...,m}\max_{x_0 \in M_0}\max_{t\in[t_0,T]} \Phi\left(u^{(k)}\left(t, x_0, \alpha^{(i)}\right)\right) - \varepsilon_i^{(1)}\right\};$$

$$\overline{M}_{0,k}^{(i)} = \left\{x_0 \in M_0 : \max_{t\in[t_0,T]} \Phi\left(u^{(k)}\left(t, x_0, \alpha^{(i)}\right)\right) \geq \max_{x_0 \in M_0}\max_{t\in[t_0,T]} \Phi\left(u^{(k)}\left(t, x_0, \alpha^{(i)}\right)\right) - \varepsilon_i^{(2)}\right\},\ k \in M_k^{(i)};$$

$$M_{x_0,k}^{(i)} = \left\{\tau \in [t_0, T] : \Phi\left(u^{(k)}\left(\tau, x_0, \alpha^{(i)}\right)\right) \geq \max_{t\in[t_0,T]} \Phi\left(u^{(k)}\left(t, x_0, \alpha^{(i)}\right)\right) - \varepsilon_i^{(3)}\right\},\ k \in M_k^{(i)},\ x_0 \in \overline{M}_{0,k}^{(i)}.$$

У випадку, коли множини $\overline{M}_{0,k}^{(i)}$, $M_{x_0,k}^{(i)}$ не є дискретними, покриваємо їх достатньо густою сіткою $x_0^{(l,j,k)}$, $\tau_{ljk}^{(i)}$ ($j = 1,2,...,\ n_{lk}^{(i)}$, $l = 1,2,...,Q_k^{(i)}$, $k \in M_k^{(i)}$) за формулою

$$G^{(l,j,k)^*}\left(\alpha^{(i)}\right) = \int_{t_0}^{t} \psi^*\left(t, \tau_{ljk}^{(i)}\right)\left[\frac{\partial \tilde{f}\left(x\left(t, x_0^{(l,j,k)}, \alpha^{(i)}\right), t, \alpha^{(i)}, u^{(k)}\right)}{\partial \alpha} + \frac{\partial \tilde{f}\left(x\left(t, x_0^{(l,j,k)}, \alpha^{(i)}\right), t, \alpha^{(i)}, u^{(k)}\right)}{\partial x}\cdot\frac{\partial x}{\partial \alpha}\right] dt.$$

На наступному етапі по векторах $G^{(l,j,k)}\left(\alpha^{(i)}\right)$ будуємо опуклу оболонку градієнтів та знаходимо найкоротшу відстань від неї до початку координат. Знайдена таким чином точка буде визначати вектор найшвидшого спуску на i-тій ітерації.

Далі розглянемо спрощений варіант задачі недиференційованої оптимізації для випадку фіксованих початкових умов $x(t_0) = x_0$, тобто

$$I\left(\alpha^{(0)}\right) = \min_{\alpha \in G_\alpha}\max_{t;k} \Phi\left(u^{(k)}(t, \alpha)\right). \qquad (5)$$

Необхідні умови оптимальності тут формулюються аналогічно: якщо $\alpha^{(0)}$ − розв'язок задачі (3), (5), то

$$\max_{\alpha \in G_\alpha}\min_{k \in M_k}\min_{\tau \in \overline{M}_{0,k}} \int_{t_0}^{t} \psi^*(t,\tau)\left[\frac{\partial \tilde{f}\left(x, t, \alpha^{(0)}, u^{(k)}\right)}{\partial \alpha} + \frac{\partial \tilde{f}\left(x, t, \alpha^{(0)}, u^{(k)}\right)}{\partial x}\cdot\frac{\partial x}{\partial \alpha}\right]\Bigg|_{x = x\left(t, \alpha^{(0)}\right)} \left(\alpha - \alpha^{(0)}\right) dt \leq 0,$$

де M_k, $\overline{M}_{0,k}$ − множини точок, в яких, відповідно, досягаються максимуми по k, t у співвідношенні (5).

Чисельний розв'язок задачі (5) знаходимо згідно з ітераційною схемою (4). Зокрема, для обчислення вектора найшвидшого спуску на i-тій ітерації визначимо множини

$$M_k^{(i)} = \left\{ k : \max_{t\in[t_0,T]} \Phi\left(u^{(k)}\left(t, x_0, \alpha^{(i)}\right)\right) \geq \max_{k=1,2,\ldots,m} \max_{t\in[t_0,T]} \Phi\left(u^{(k)}\left(t, x_0, \alpha^{(i)}\right)\right) - \varepsilon_i^{(1)} \right\};$$

$$\overline{M}_{0,k}^{(i)} = \left\{ \tau \in [t_0, T] : \Phi\left(u^{(k)}\left(\tau, x_0, \alpha^{(i)}\right)\right) \geq \max_{t\in[t_0,T]} \Phi\left(u^{(k)}\left(t, x_0, \alpha^{(i)}\right)\right) - \varepsilon_i^{(2)} \right\}, \; k \in M_k^{(i)}.$$

Множину максимумів $\overline{M}_{0,k}^{(i)}$, якщо вона не дискретна, покриваємо достатньо густою сіткою: τ_{i1}, τ_{i2}, …, $\tau_{in_i^{(k)}}$, $k \in M_k^{(i)}$. Далі визначаємо вектори

$$G^{(l,k)^*}\left(\alpha^{(i)}\right) = \int_{t_0}^{t} \psi^*\left(t, \tau_{il}\right)\left[\frac{\partial \widetilde{f}\left(x, t, \alpha^{(i)}, u^{(k)}\right)}{\partial \alpha} + \frac{\partial \widetilde{f}\left(x, t, \alpha^{(i)}, u^{(k)}\right)}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial \alpha}\right] dt, \; l = 1,2,\ldots,n_i^{(k)}, \; k \in M_k^{(i)},$$

за допомогою яких будуємо опуклу оболонку, а по ній − напрям найшвидшого спуску $G\left(\alpha^{(i)}\right)$.

Необхідно відзначити, що крім наведених постановок задач, вибір оптимальних параметрів, які забезпечують нормальну роботу системи в реальних умовах, можна здійснювати й за допомогою критерію сумісного типу

$$\min_{\alpha\in G_\alpha} \max_{t;k;x_0\in M_0} \left\{ \lambda_1 \Phi_1\left(x\left(t, x_0, \alpha\right)\right) + \lambda_2 \Phi_2\left(u^{(k)}\left(t, \alpha\right)\right)\right\},$$

де $\Phi_1()$, $\Phi_2()$ − опуклі функції;

λ_1, λ_2 − вагові коефіцієнти. Інший підхід полягає у розв'язанні задачі (2) для множини допусків на параметри ΔG_α.

Висновки

На основі необхідної умови оптимальності та методів недиференційовної оптимізації розроблено алгоритми мінімізації чутливості динамічних систем. Окремо розглянуто процедуру розрахунку оптимальних параметрів для фіксованих початкових умов і компактної множини.

Список літератури

1. Бублик Б. Н. Структурно-параметрическая оптимизация и устойчивость динамики пучков / Бублик Б. Н, Гаращенко Ф. Г., Кириченко Н. Ф. – К. : Наук. думка, 1985. – 304 с.
2. Розенвассер Е. Н. Чувствительность систем управления / Е. Н. Розенвассер, Р. М. Юсупов.– М. : Наука , 1981. – 464 с.
3. Панталієнко Л. А. Дослідження задач обмеженої чутливості методами практичної стійкості / Л. А. Панталієнко // Науковий вісник НУБіП України. Серія «Техніка та енергетика АПК». – 2014. – Вип. 194, ч. 2. – С. 243−248.
4. Демьянов В. Ф. Введение в минимакс / В. Ф. Демьянов, В. Н. Малоземов. – М. : Наука, 1972. – 368 с.
5. Гаращенко Ф. Г. Недифференцируемые задачи структурно-параметрической оптимизации и проектирование ускоряющих и фокусирующих систем / Ф. Г. Гаращенко // Автоматика. – 1986. – № 1. – С. 50−53.

НЕДИФФЕРЕНЦИРУЕМЫЕ ЗАДАЧИ ОПТИМИЗАЦИИ ЧУВСТВИТЕЛЬНОСТИ ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМ

Л. А. Панталиенко

Аннотация. *Приведены алгоритмы минимизации чувствительности динамических систем к изменению параметров. Рассмотрены постановки минимаксных задач для фиксированных начальных условий* *и заданного компакта. На основании принципа максимума Понтрягина и итерационного метода градиентного спуска осуществлено численное решение оптимизационных задач чувствительности.*

Ключевые слова: ***параметры, оптимизация, чувствительность, функции чувствительности.***

UNDIFFERENTIATED PROBLEMS OF OPTIMIZATION THE SENSITIVITY OF DYNAMICAL SYSTEMS

L. Pantalienko

Annotation. *The algorithms to minimize the sensitivity of dynamical systems to changing parameters. Considered statement of minimax problems for fixed initial conditions and given the compact. On the basis of the Pontryagin maximum principle and iterative method of gradient descent implemented numerical solution of optimization problems of sensitivity.*

Key words: ***parameters, optimization, sensitivity, sensitivity functions.***

УДК 535.37

ЛАЗЕРНА СПЕКТРОФЛУОРИМЕТРІЯ ЗЛАКОВИХ КУЛЬТУР *IN VIVO*

Ю. І. Посудін, доктор біологічних наук
Я. В. Кожем’яко, асистент
О. О. Годлевська, кандидат фізико-математичних наук
І. А. Залоїло, кандидат біологічних наук
e-mail: posudin@ukr.net

Анотація. *Запропоновано можливі області застосування методу лазерної спектрофлуориметрії злакових культур. Показано, що даний підхід є перспективним для диференціювання вікових і видових відмінностей злакових культур на різних фазах розвитку. Залежність флуоресцентних індексів від роду та сорту і генетичних форм не знайдена.*

Ключові слова: ***флуоресценція, спектрофлуориметрія, злакові культури.***

Розробка засобів та методів швидкого точного аналізу сільськогосподарських культур впродовж розвитку та під впливом стресових факторів є одним з найбільш актуальних питань сучасного рослинництва. Кореляція кількісних флуоресцентних параметрів хлорофілу із загальним процесом фотосинтезу є доволі складною для прогнозування: випромінювання флуоресценції хлорофілу *а* може становити 2–5 % від поглинутої енергії. Даний показник значною мірою залежить не лише від інтенсивності та