

РОЗРАХУНОК МАГНІТНОГО ПОЛЯ В ГЕНЕРАТОРАХ ІЗ ЗАКРИТИМИ ПАЗАМИ

А. В. Жильцов, доктор технічних наук
*Д. О. Кітюк, аспірант**
e-mail: azhilt@gmail.com

Анотація. Користуючись методом вторинних джерел, крайову задачу для рівнянь Максвелла в синхронному генераторі із закритими пазами зведено до еквівалентного інтегрального рівняння для простого шару магнітних зарядів із наступним його чисельним розв'язком.

Ключові слова: синхронний генератор, постійні магніти, метод вторинних джерел.

Аналіз електромеханічних процесів, що проходять у синхронних машинах, зводиться до розв'язку зв'язаних рівнянь Максвелла та рівняння руху, що може бути реалізовано скінченно-різницевиими методами [15–17] або редукцією рівнянь Максвелла до інтегральних рівнянь [1–14] з наступним чисельним їх розв'язанням. Перевага останнього підходу полягає в можливості зведення задачі до розрахунку джерел магнітного поля на границі ферромагнітних тіл, що суттєво зменшує область пошуку невідомих.

Сутність концепції вторинних джерел полягає в такому [21]: розрахунок поля в просторі, що заповнений неоднорідним середовищем, може бути зведений до розрахунку поля в однорідному просторі, створеному як первинними джерелами (наприклад, струмами обмотки намагнічування), так і вторинними джерелами, під якими розуміються густина фіктивних поверхневих і об'ємних магнітних зарядів, струмів або магнітних моментів. Залежно від того,

яке поле потрібно розраховувати, використовують джерела того чи іншого типу. При цьому розподіл густини вторинних джерел повинен бути таким, щоб забезпечити виконання умов або для векторів поля, або для скалярного потенціалу, або для векторного потенціалу на межі розділу, що задовольняє інтегральне рівняння.

Кожен спосіб знаходження густини вторинних джерел перетворює концепцію вторинних джерел у відповідний метод розрахунку поля. Так, введенням вторинних джерел типу простого шару струмів $\vec{j}(Q)$ або подвійного шару магнітних зарядів $\tau(Q)$ можна зберегти незмінним розподіл поля \vec{B} , а введенням вторинних джерел типу простого шару зарядів $\sigma(Q)$ або подвійного шару струмів $\vec{\eta}(Q)$ можна зберегти незмінним розподіл поля \vec{H} . Для цих рівнянь зазвичай залишаються справедливими відомі

* Науковий керівник – доктор технічних наук А. В. Жильцов

теорему Фредгольма [5–10].

Мета досліджень – розробка математичної моделі для розрахунку магнітного поля в генераторах із закритими пазами.

Результати досліджень. *Постановка завдання і вибір методу рішення для розрахунку магнітного поля в електродвигунах із закритими пазами.*

Переріз генератора подано на рис. 1. Простір $R_1 < r < R_0$ заповнено постійними магнітами, постійні магніти однорідно намагнічені паралельно радіальній лінії. Магнітну проникність середовища μ вважаємо постійною величиною. Простір $R_1 < r < R_2$ заповнено повітрям.

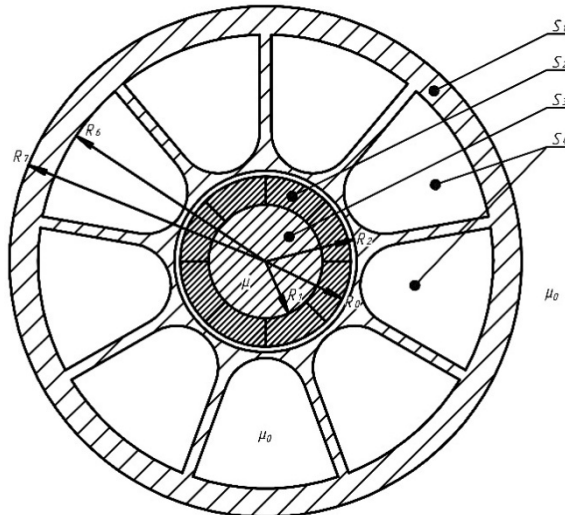


Рис. 1. Переріз генератора (обмотки не зазначені):

S_1 – пластини статора; S_2 – постійні магніти; S_3 – вал ротора;
 S_4 – пази для обмоток статора

Виведення інтегрального рівняння для розрахунку густини вторинних джерел. Вважаємо, що в повній системі рівнянь електромагнітного поля всі похідні в часі рівні нулю, тоді вони запишуться у вигляді [2]:

$$\operatorname{rot} \vec{H} = \vec{\delta}, \quad (1)$$

$$\operatorname{div} \vec{B} = 0, \quad (2)$$

де \vec{H} – вектор напруженості магнітного поля;

\vec{B} – вектор індукції поля;

$\vec{\delta}$ – густина електричного струму.

У даній постановці задачі макроструми відсутні, тому допускаємо $\vec{\delta} = 0$. Тоді рівняння (1) і (2) переходять у рівняння:

$$\operatorname{rot} \vec{H} = 0, \quad (3)$$

$$\operatorname{div} \vec{B} = 0. \quad (4)$$

Доповнимо рівняння поля (3), (4) рівнянням матеріальності, що пов'язує \vec{B} , \vec{H} і \vec{J} (вектор намагнічування):

$$\vec{B} = \mu_0 \vec{H} + \mu_0 \vec{J}. \quad (5)$$

Перетворимо рівняння (4) з урахуванням співвідношення (5)

$$\operatorname{div} \vec{B} = \operatorname{div} \mu_0 (\vec{H} + \vec{J}) = \mu_0 \operatorname{div} \vec{H} + \mu_0 \operatorname{div} \vec{J}.$$

Звідси

$$\operatorname{div} \vec{H} = -\operatorname{div} \vec{J}. \quad (6)$$

Тоді, для поля \vec{H} маємо систему рівнянь:

$$\operatorname{rot} \vec{H} = 0, \quad (7)$$

$$\operatorname{div} \vec{H} = -\operatorname{div} \vec{J}, \text{ в } S_2. \quad (8)$$

Введемо густину об'ємних магнітних зарядів по формулі:

$$\rho = -\operatorname{div} \vec{J}. \quad (9)$$

Покажемо, що для феромагнетику об'ємна густина магнітного заряду дорівнює нулю. Маємо,

$$\begin{aligned} \operatorname{div} \vec{J} &= -\operatorname{div} \left(\frac{\vec{B}}{\mu_0} - \vec{H} \right) = -\frac{1}{\mu_0} \operatorname{div} \vec{B} + \operatorname{div} \vec{H} = -\frac{1}{\mu_0} \operatorname{div} \vec{B} + \frac{1}{\mu} \operatorname{div} \mu \vec{H} = \\ &= \left(-\frac{1}{\mu_0} + \frac{1}{\mu} \right) \operatorname{div} \vec{B} \equiv 0 \quad \text{в } S_2, \end{aligned}$$

де враховано, що магнітна проникність μ є постійною.

Розглянемо феромагнетик з намагніченістю \vec{J} (рис. 2). Вибираємо точку Q на границі поділу феромагнетик-повітря, напрямлення нормалі \vec{n}_Q із феромагнетику в повітря. Оточимо точку Q циліндром з основою S і малою висотою h (рис. 3). Потік вектора \vec{H} через S :

$$\Phi = \oint_S \vec{H} d\vec{S}. \quad (10)$$

З урахуванням рівняння (8):

$$\Phi = - \oint_S \vec{J} d\vec{S}. \quad (11)$$

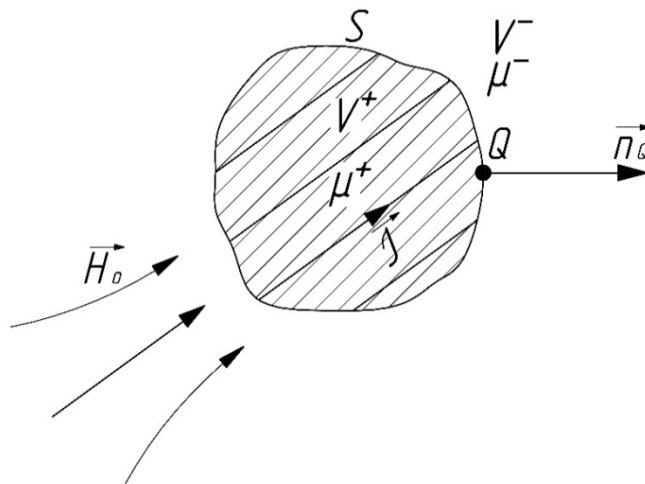


Рис. 2. Феромагнетик із магнітною проникністю μ^+ у зовнішньому магнітному полі \vec{H}_0 : V^+ – об'єм, що займає феромагнетик; V^- – решта простору; \vec{n}_Q – зовнішня нормаль

Застосовуючи теорему Гауса – Остроградського [2], отримаємо

$$- \oint_S \vec{J} d\vec{S} = - \int_V \operatorname{div} \vec{J} dV = + \int_V \rho dV. \quad (12)$$

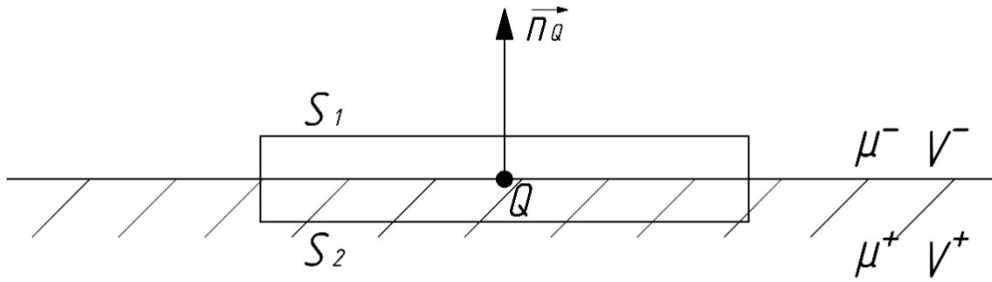


Рис. 3. До виведення граничних умов для вектора \vec{H} :
 V^+ – ферромагнетик; V^- – повітря

Нехай $Q = -\oint \rho dV$ – магнітний заряд, тоді

$$\oint_S \vec{J} d\vec{S} = -Q. \quad (13)$$

Розпишемо інтеграл у лівій частині співвідношення (12):

$$\oint_S \vec{J} d\vec{S} \stackrel{h \rightarrow 0}{=} J_n \Delta S + 0 \cdot \Delta S = J_n \Delta S, \quad (14)$$

де J_n – проекція намагніченості \vec{J} на нормаль \vec{n}_Q ,

ΔS – площа основи циліндра. З іншого боку, об'ємна густина магнітного заряду, як було показано вище, дорівнює нулю, але в силу рівняння (13) поверхнева густина магнітного заряду не дорівнює нулю. Припустимо σ_0 його густина, тоді з рівнянь (13) і (14):

$$\begin{aligned} J_n \Delta S &= \sigma_0 \Delta S, \\ \sigma_0 &= J_n. \end{aligned} \quad (15)$$

Формула (15) визначає поверхневу густина простого шару магнітного заряду для ферромагнетика з намагніченістю \vec{J} .

Нехай ферромагнетик знаходиться в зовнішньому магнітному полі \vec{H}_0 . Результуюче поле \vec{H} в точці Q , яка лежить на границі поділу середовищ (рис. 3), визначається як сума зовнішнього поля \vec{H}_0 і поля \vec{H}' , що обумовлене намагніченістю самого ферромагнетика:

$$\vec{H} = \vec{H}_0 + \vec{H}'. \quad (16)$$

Введемо на поверхні ферромагнетика фіктивний магнітний заряд із густиною $\sigma(Q)$, вибираємо напрям нормалі із ферромагнетика назовні. Позначимо індексом "+" всі величини, що відносяться до внутрішньої області ферромагнетик, індексом "-" – зовнішньої області.

Поле в будь-якій точці простору визначається[21]:

$$\vec{H}(M) = \vec{H}_0(M) + \frac{1}{2\pi} \int_l \sigma(P) \frac{\vec{r}_{PM}}{r_{PM}^2} dl_p, \quad (17)$$

де $\sigma(P)$ – густина простого шару магнітних зарядів в точці P на границі l розділу середовищ;

\vec{r}_{PM} – радіус-вектор, що проведено з точки інтегрування P в точку спостереження M .

На границі ферромагнетика в точці Q з внутрішньої сторони, поле \vec{H} дорівнює (у проекції на зовнішню нормаль \vec{n}_Q):

$$H_n^+(Q) = -\frac{\sigma(Q)}{2} + \frac{1}{2\pi} \int_l \sigma(P) \frac{(\vec{r}_{PQ}\vec{n}_Q)}{r_{PQ}^2} dl_p + H_{on}. \quad (18)$$

Із зовнішньої сторони

$$H_n^-(Q) = \frac{\sigma(Q)}{2} + \frac{1}{2\pi} \int_l \sigma(P) \frac{(\vec{r}_{PQ}\vec{n}_Q)}{r_{PQ}^2} dl_p + H_{on}. \quad (19)$$

Доповнимо рівняння (18) і (19) крайовими умовами

$$B_n^+ = B_n^-, \quad (20)$$

$$H_\tau^+ = H_\tau^-. \quad (21)$$

Умова (21) виконується автоматично. Умову (20) розпишемо як:

$$\mu^+ H_n^+ = \mu^- H_n^-. \quad (22)$$

Підставляючи рівняння (18) і (19) у рівняння (22), отримуємо інтегральне рівняння для розрахунку густини вторинних джерел $\sigma(Q)$:

$$\sigma(Q) = \frac{1}{\pi} \frac{\mu^+ - \mu^-}{\mu^+ + \mu^-} \int_l \sigma(P) \frac{(\vec{r}_{PQ}\vec{n}_Q)}{r_{PQ}^2} dl_p + 2 \frac{\mu^+ - \mu^-}{\mu^+ + \mu^-} H_{on}. \quad (23)$$

Для обчислення вихрової складової напруженості магнітного поля скористаємося формулою:

$$H_{on}(Q) = \frac{1}{2\pi} \int_{l_k} \sigma_0(P) \frac{(\vec{r}_{PQ}\vec{n}_Q)}{r_{PQ}^2} dl_p, \quad (24)$$

де $\sigma_0(P)$ – поверхнева густина магнітного заряду, що вводиться на границі l_k постійних магнітів, визначається співвідношенням (15).

Отже, остаточно отримуємо інтегральне рівняння, якому повинна задовольняти шукана густина $\sigma(Q)$ вторинних джерел для плоскопаралельного випадку:

$$\sigma(Q) = \frac{\lambda}{\pi} \oint_l \sigma(P) \frac{(\vec{r}_{PQ}\vec{n}_Q)}{r_{PQ}^2} dl_p + \frac{\lambda}{\pi} \oint_{l_k} \mathcal{J}_n \frac{(\vec{r}_{PQ}\vec{n}_Q)}{r_{PQ}^2} dl_p, \quad (25)$$

де $\lambda = \frac{\mu^+ - \mu^-}{\mu^+ + \mu^-}$.

Параметр λ при великих μ^+ близький до характеристичного значення – одиниці. Це ускладнює чисельний розв'язок рівняння (25). Тому, використовуючи інтегральне співвідношення для магнітних зарядів [9]

$$\oint_l \sigma(Q) dl_p = 0, \quad (26)$$

інтегральне рівняння (25) приводиться до інтегрального рівняння (2).

$$\sigma(Q) = \frac{\lambda}{\pi} \oint_l \sigma(P) \left[\frac{(\vec{r}_{PQ}\vec{n}_Q)}{r_{PQ}^2} - \frac{\pi}{l} \right] dl_p + f(Q). \quad (27)$$

Рівняння (27) розв'язується методом послідовних наближень або зведенням його до системи алгебраїчних рівнянь з наступним її розв'язком. Знаючи $\sigma(Q)$ можна легко встановити поле \vec{H} за формулою (17), а, отже, і поле \vec{B} :

$$\vec{B} = \mu \vec{H}, \quad (28)$$

де $\mu = \mu^+$ для ферромагнітного середовища, $\mu = \mu^-$ для повітря.

Розв'язання інтегрального рівняння методом послідовних наближень. Для побудови послідовності функцій $\{\sigma_m\}$, які є наближенням до шуканого розв'язання рівняння (27), використаємо рекурентну формулу [21]

$$\sigma_{m+1}(Q) = f(Q) + \int_l K(P, Q) \sigma_m(P) dl_P, \quad (29)$$

де

$$f(Q) = \frac{\lambda}{\pi} \oint_{l_k} J_n \frac{(\vec{r}_{PQ} \vec{n}_Q)}{r_{PQ}^2} dl_P,$$

$$K(P, Q) = \frac{\lambda}{\pi} \left[\frac{(\vec{r}_{PQ} \vec{n}_Q)}{r_{PQ}^2} - \frac{\pi}{l} \right].$$

Як нульове наближення приймається права частина:

$$\sigma_1(Q) = f(Q),$$

потім за формулою (29) розв'язується наступне наближення. Застосування процесу пошуку розв'язку, яке відображується формулою (29) означає, що за наближений розв'язок приймається $\sigma_m(Q)$ при достатньо великому m , якщо при цьому всі інтеграли обчислюються точно. Практично ознакою близькості отриманих наближень до шуканої функції є досягнення малої величини відношення.

$$\varepsilon = \frac{\max |\sigma_{m+1} - \sigma_m|}{\max |\sigma_m|} 100\%. \quad (30)$$

Метод зведення інтегрального рівняння до системи лінійних алгебраїчних рівнянь. Поставимо індекс i у відповідність точки σ , точки P – індекс m , тоді інтегральне рівняння (27) запишеться у вигляді

$$\sigma_i = \lambda \int_l K(i, m) \sigma_m dl_m + f_i.$$

Перенесемо перший доданок з правої частини в ліву та замінімо інтеграл на суму:

$$\sigma_i - \lambda \sum_k K(i, m) \sigma_m \Delta l_m = f_i.$$

Для кожної точки i маємо місце:

$$\delta_{im} \sigma_m - \lambda K(i, m) \sigma_m \Delta l_m = f_i, \quad (31)$$

де $\delta_{im} = \begin{cases} 1, & \text{якщо } i = m, \\ 0, & \text{якщо } i \neq m. \end{cases}$ – дельта-функція Дирака.

Отже, отримали для визначення густини вторинних джерел систему лінійних алгебраїчних рівнянь, яка може бути розв'язана.

Висновки

Розроблено математичну модель для розрахунку характеристик магнітного поля постійних магнітів у синхронному генераторі шляхом зведення крайової задачі для рівнянь Максвелла до еквівалентного інтегрального рівняння відносно простого слою магнітних зарядів із наступ-

ним його розв'язком або методом послідовних наближень або зведенням його до системи лінійних алгебраїчних рівнянь.

Список літератури

1. Боженко А. И. Моделирование на ЭВМ переходных процессов в осесимметричных устройствах с немагнитными проводниками с учетом симметричности исходного интегро-дифференциального уравнения / А. И. Боженко, Е. И. Петрушенко : препр. // АН УССР. Ин-т электродинамики. – К., 1984. – 55 с.
2. Гринберг Г. А. Избранные вопросы теории электрических и магнитных явлений / Г. А. Гринберг. – М. : АН СССР, 1984. – 727 с.
3. Маергойз И. Д. Итерационные методы расчета статических полей в неоднородных, анизотропных и нелинейных средах / И. Д. Маергойз. – К. : Наукова думка, 1979. – 208 с.
4. Михлин С. Г. Лекции по линейным интегральным уравнениям / С. Г. Михлин. – М. : Физматгиз, 1959. – 232 с.
5. Обэн Ж.-П. Приближенное решение эллиптических краевых задач / Ж.-П. Обэн. – М. : Мир, 1977. – 383 с.
6. Интегральные уравнения для расчета трехмерного магнитного поля ненасыщенного одноэлементного трансформатора тока / А. И. Пашко, Е. И. Петрушенко, Н. Л. Трофимчук, Г. А. Филиппова // Техническая электродинамика. – 1984. – № 5. – С. 8–13.
7. О численном решении векторного интегрального уравнения для расчета трехмерного магнитного поля ненасыщенного одноэлементного трансформатора тока / А. И. Пашко, Е. И. Петрушенко, Н. Л. Трофимчук, Г. А. Филиппова // Техническая электродинамика. – 1985. – № 2. – С. 28–35.
8. Петрушенко Е. И. К расчету статических магнитных полей в нелинейных средах методом интегральных уравнений / Е. И. Петрушенко // Теоретическая электротехника. – 1967. – Вып. 4. – С. 131–133.
9. Петрушенко Е. И. К расчету трехмерных магнитных полей в кусочно-однородных средах с помощью векторных интегральных уравнений / Е. И. Петрушенко // Электронное моделирование. – 1983. – № 5. – С. 27–32.
10. Петрушенко Е. И. Алгоритмы расчета на ЭЦВМ критических кривых продольных криотронов / Е. И. Петрушенко, О. Е. Гаврюшенко // Математическое моделирование и теория электрических цепей. – К. : Наукова думка, 1971. – Вып. 9. – С. 144–150.
11. Моделирование на ЭВМ трехмерного магнитного поля линейного одноэлементного трансформатора тока на основе векторного интегрального уравнения / Е. И. Петрушенко, А. И. Пашко, Н. Л. Трофимчук, Г. А. Филиппова : препр. // АН УССР. Ин-т проблем моделирования в энергетике. – К. : 1986. – 46 с.
12. Петрушенко Е. И. До апроксимації інтегральних рівнянь теорії електромагнітного поля алгебраїчними системами / Е. И. Петрушенко // Доповіді АН УРСР. Сер. А. – 1969. – № 7. – С. 618–621.
13. Романович С. С. Градиенты поля осесимметричных токов и зарядов / С. С. Романович // Изв. вузов. Электромеханика. – 1983. – № 10. – С. 26–28.
14. Романович С. С. Регуляризация интегральных уравнений в задачах электро- и магнитостатики / С. С. Романович // Техническая электродинамика. – 1986. – № 1. – С. 44–49.
15. Сегерлинд Л. Применения метода конечных элементов / Л. Сегерлинд. – М. : Мир, 1979. – 392 с.

16. Сильвестер П. Метод конечных элементов для радиоинженеров и инженеров-электриков / П. Сильвестер, Р. Феррари. – М. : Мир, 1986. – 229 с.
17. Стренг Г. Теория метода конечных элементов / Г. Стренг, Дж. Фикс. – М. : Мир, 1977. – 349 с.
18. Тозони О. В. Математические модели для расчета электрических и магнитных полей / О. В. Тозони. – К. : Наукова думка, 1964. – 271 с.
19. Тозони О. В. Метод вторичных источников в электротехнике / О. В. Тозони. – М. : Энергия, 1975. – 295 с.
20. Тозони О. В. Расчет электромагнитных полей на вычислительных машинах / О. В. Тозони – К. : Техніка, 1967. – 252 с.
21. Тозони О. В. Расчет трехмерных электромагнитных полей / О. В. Тозони, И. Д. Маергойз. – К. : Техніка, 1974. – 352 с.

РАСЧЕТ МАГНИТНОГО ПОЛЯ В ГЕНЕРАТОРАХ С ЗАКРЫТЫМИ ПАЗАМИ

А. В. Жильцов, Д. А. Китюк

Аннотация. На основании метода вторичных источников, краевую задачу для уравнений Максвелла в синхронном генераторе с закрытыми пазми сведено к эквивалентному интегральному уравнению для простого слоя магнитных зарядов с последующим его численным решением.

Ключевые слова: синхронной генератор, постоянные магниты, метод вторичных источников.

CALCULATION OF MAGNETIC FIELD IN GENERATORS WITH CLOSED SLOTS

A. Zhiltsov, D. Kityuk

Annotation. Based on the method of secondary sources, boundary value problem for Maxwell's equations in the synchronous generator with closed postures reduced to the equivalent integral equation for the single-layer magnetic charges followed its numerical solution.

Key words: synchronous generator, permanent magnet, the method of secondary sources.