

that the block-modular construction of biogas plants using the energy supply from solar photovoltaic thermal modules able to significantly improve the energy efficiency biogas plants in agriculture.

Key words: *biogas units, block-modular principle, solar photovoltaic thermal modules*

УДК 530.15:621.3.01

РІВНЯННЯ СТАНУ ЕНЕРГЕТИЧНИХ КІЛ

А. З. Музичак, кандидат технічних наук
Національний університет «Львівська політехніка»
e-mail: mAndriy@polynet.lviv.ua

Анотація. *В основі рівнянь стану енергетичних систем лежать мережні правила Кірхгофа та рівняння вітки. Зазвичай спад зусилля на пасивному елементі пов'язують лише з перетворенням певного виду енергії (механічної, електричної тощо) у теплову. Відповідно до принципу енергетичної аналогії, енергія елемента системи включає три складові: розсіяння енергії, а також зміну потенціальної та кінетичної форм енергії. У роботі враховано всі складові енергії та утворено контурну й вузлову математичні моделі енергетичного кола. Усі енергетичні системи поділено на замкнені та розімкнені, що зумовлено врахуванням складових рівняння енергії, а в енергетичні кола введено поняття фіктивної вітки.*

Ключові слова: *енергетичне коло, рівняння вітки, полюсне рівняння, математична модель, закон збереження енергії*

Одним із нелегких завдань сучасного математичного моделювання є адекватне відтворення та аналіз режимів складних енергетичних систем з поєднанням процесів різної фізичної природи. Такі енергетичні системи можуть бути дуже різноманітними – від силової установки звичайного сільськогосподарського агрегата до системи електро- чи газопостачання, що охоплюють цілі міста чи райони.

Комплексне вирішення цієї проблеми полягає у створенні математичних моделей енергетичних систем в межах єдиної теорії, яка забезпечує узгоджену побудову цих моделей та обчислювальних алгоритмів фізично неоднорідних систем. Побудова моделей можлива в межах теорії енергетичних кіл, математичний апарат якої орієнтований на уніфіковане представлення явищ різної фізичної природи [1].

Початок формування теорії енергетичних кіл закладено в роботах [2, 3]. В основу було покладено принцип метричної аналогії, відповідно до

якого, усі змінні режиму поділено на дві групи – паралельні та послідовні, стосовно методу їх вимірювання. Пізніше теорію енергетичних кіл було доповнено принципом енергетичної аналогії [4], відповідно до якого, введено поняття змінних стану. В [5] паралельну змінну стану названо імпульсом, а послідовну змінну стану – кількістю.

Введення принципу енергетичної аналогії дало змогу в основу математичних розрахунків покласти фундаментальний закон природи – закон збереження енергії. Відповідно до нього, енергія елемента системи W містить три складові, математично це можна подати у формі [5]

$$W = W_p + W_k + W_n, \quad (1)$$

де W_p – енергія розсіяння (перетворення одного виду енергії в інший);
 W_k – кінетична форма енергії;
 W_n – потенціальна форма енергії.

Відповідно до [5] рівняння (1), можна записати через координати режиму енергетичного кола

$$W = YXt + \int_X JdX + \int_Y KdY, \quad (2)$$

де X – потік чи послідовна змінна дії;
 Y – зусилля чи паралельна змінна дії;
 J – імпульс чи паралельна змінна стану;
 K – кількість чи послідовна змінна стану;
 t – час.

Проте принципи метричної та енергетичної аналогій дають змогу лише структурувати множину змінних кіл різної фізичної природи та відобразити єдину систему взаємозв'язків між ним. Однак математичний запис цих принципів ще не дає зручного інструменту адекватного відтворення та аналізу режимів енергетичних систем.

У практичних розрахунках енергетичні системи зазвичай поділяють на фізично однорідні галузеві частини (електричну, механічну, гідравлічну тощо) та виконують їх аналіз математичним апаратом однієї з галузевих теорій. Якщо це необхідно, результати розрахунку в подальшому поєднують.

Мета досліджень – з позицій системного підходу сформуванню систему рівнянь стану енергетичного кола та утворити математичну модель, придатну для адекватного відтворення та аналізу режимів енергетичних систем незалежно від їх фізичної природи. Створюваний математичний апарат повинен бути єдиним для кіл різної фізичної природи.

Матеріали та методика досліджень. Невід'ємними складовими математичної моделі енергетичної системи є енергетичне коло як заступна схема енергетичної системи, та система рівнянь, яка описує його стан.

Енергетичне коло складається з трьох взаємопов'язаних частин: джерел енергії, споживачів енергії та сполучних елементів, які пов'язані єдиним режимом генерування-споживання енергії.

У даній статті обмежимося властивостями енергетичних кіл, складених лише з двополюсних компонент. Джерела енергії можна подати як двополюсне джерело зусилля (рис. 1,а) чи двополюсне джерело потоку (рис. 1,б). Споживачі енергії та сполучні елементи представлені пасивним двополюсником (рис. 1,в).

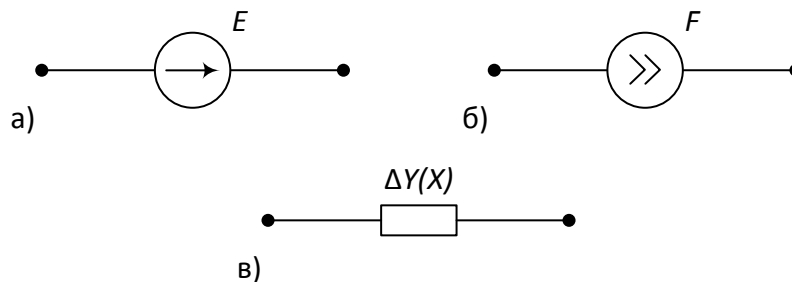


Рис. 1. Двополюсники енергетичного кола: ідеальне джерело зусилля (а), ідеальне джерело потоку (б), пасивний двополюсник (в)

Структурні елементи енергетичного кола, такі як вітка, вузол та контур, еквівалентні поняттям електричного кола [6].

В основі рівнянь стану енергетичних кіл лежать мережні правила Кірхгофа. Згідно з [7], ці правила є властивістю вимірюваних величин та справедливі як для електричних кіл [6], так і для однорідних кіл іншої фізичної природи: гідравлічних [8, 9], теплових [10] тощо.

Відповідно до позначень [5], перше правило Кірхгофа має вигляд

$$\mathbf{A}\vec{X} + \vec{F} = 0, \quad (3)$$

а друге правило Кірхгофа – вигляд

$$\mathbf{B}\vec{Y} = 0, \quad (4)$$

де A, B – перша та друга матриці інциденцій;

\vec{X}, \vec{Y} – вектор-стовпець відповідно потоків та зусиль віток;

\vec{F} – вектор-стовпець джерел потоків.

Рівняння (4) відображує друге правило Кірхгофа у контурній формі. Згідно з [8], його можна також записати у вузловій формі

$$\vec{Y} = \mathbf{A}_0^T \vec{V}_0, \quad (5)$$

де A_0 – повна перша матриця інциденцій;

\vec{V}_0 – вектор-стовпець вузлових потенціалів.

Мережні правила Кірхгофа доповнює рівняння вітки, яке пов'язує основні її параметри. За аналогією до вітки електричного кола [6], вітка енергетичного кола може містити джерело зусилля та пасивну компоненту, яка характеризується деяким спадом зусилля (рис. 2).

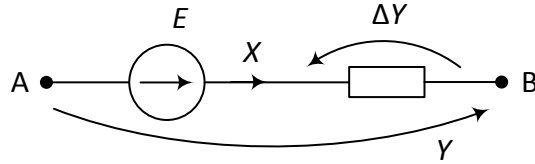


Рис. 2. Вітка енергетичного кола

Згідно з прийнятими в [6] спрямувань (рис. 2), зусилля вітки Y збігається за напрямом з потоком, а спад зусилля на пасивній компоненті ΔY – протилежний до напрямку потоку. Згідно з такими спрямуваннями, рівняння вітки енергетичного кола можна подати у вигляді

$$Y = E - \Delta Y, \quad (6)$$

де E – рушійне зусилля вітки.

Множина рівнянь віток енергетичного кола у векторній формі

$$\vec{Y} = \vec{E} - \Delta \vec{Y}, \quad (7)$$

де \vec{E} – вектор-стовпець рушійних зусиль віток;

\vec{Y} – вектор-стовпець зусиль віток;

$\Delta \vec{Y}$ – вектор-стовпець спадів зусиль на пасивних компонентах віток.

Поєднання рівнянь віток та рівнянь за правилами Кірхгофа дозволяє утворити математичну модель енергетичного кола. Із застосуванням другого правила Кірхгофа в контурній формі (4) отримуємо контурну математичну модель енергетичного кола

$$\begin{cases} \mathbf{A}\vec{X} + \vec{F} = 0, \\ \mathbf{B}\vec{Y} = 0, \\ \vec{Y} = \vec{E} - \Delta \vec{Y}, \end{cases} \quad (8)$$

у випадку вузлової форми другого правила Кірхгофа (5) отримуємо вузлову математичну модель

$$\begin{cases} \mathbf{A}\vec{X} + \vec{F} = 0, \\ \vec{Y} = \mathbf{A}_0^T \vec{V}_0, \\ \vec{Y} = \vec{E} - \Delta \vec{Y}. \end{cases} \quad (9)$$

Зазвичай спад зусилля ΔY пов'язують лише з перетворенням певного виду енергії у теплову. Для прикладу, в теорії електричних кіл [6] спад напруги (аналог спаду зусилля) пов'язують лише з перетворенням електричної енергії у теплову (так звані Джоулеві втрати). Подібним чином у теорії гідравлічних кіл [8, 9] спад тиску (аналог спаду зусилля) пов'язують лише з перетворенням гідравлічної енергії (механічної енергії середовища) в теплову (так звані втрати на тертя).

Водночас, відповідно до принципу енергетичної аналогії, енергія елемента системи включає три складові, що відображено в рівняннях (1) чи (2). Змін може зазнавати кожна зі складових.

Згідно з [6, 8, 9] у рівняння віток (6) закладена складова перетворення певного виду енергії (механічної, електричної, гідравлічної тощо) у теплову, тобто рівняння (6) правильно буде записати у вигляді

$$Y = E - \Delta Y_p, \quad (10)$$

де ΔY_p – спади зусилля, пов'язані з розсіянням енергії (перетворення певного виду енергії у теплову).

Відповідно до (1) і (2), у рівнянні вітки необхідно врахувати також потенціальну та кінетичну форми енергії. Покажемо це на прикладі механічної системи, де обидві форми енергії можна подати наочно.

Розглянемо транспортер, який піднімає однакові тіла на певну висоту h , після чого вони зісковзують з його поверхні та вільно падають униз (рис. 3,а).

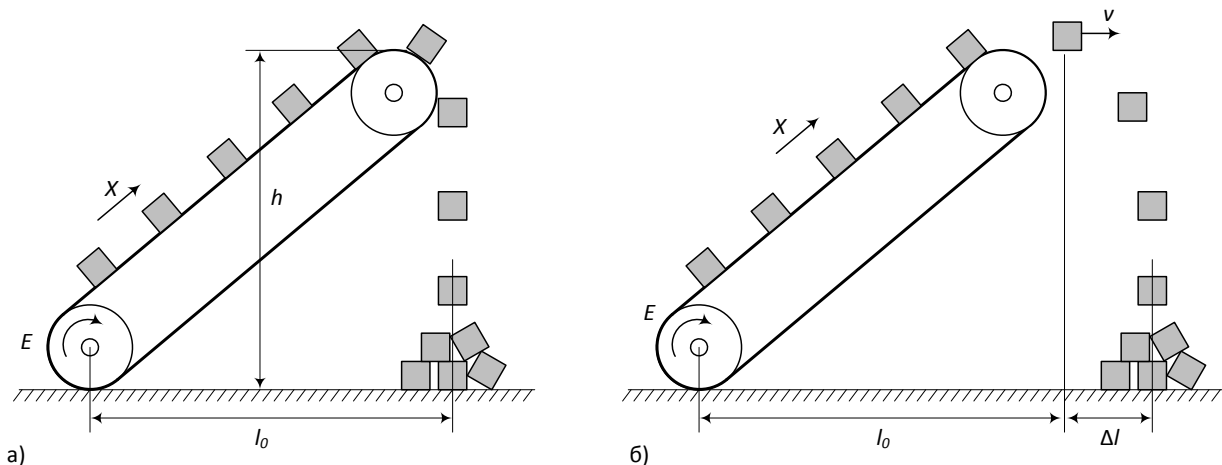


Рис. 3. Приклади витрат енергії в механічній системі:

тіла вільно падають (а), тіла виштовхуються (б)

У такому транспортері енергія джерела витрачається на подолання сил опору (тертя у підшипниках, опір повітря тощо) та на піднімання тіл на необхідну висоту (у тіл збільшується потенціальна енергія). Щоразу, коли чергове тіло зісковзує з транспортера, потенціальна енергія тіла втрачається для системи безповоротно. Ця енергія спочатку перетворюється у кінетичну енергію падіння, а далі – у теплову енергію удару, однак це вже відбувається за межами системи. Тому у заступній схемі такої механічної системи необхідно відтворювати як спади зусилля на тертя, так і спад зусилля, зумовлений втратою потенціальної енергії (рис. 4,а).

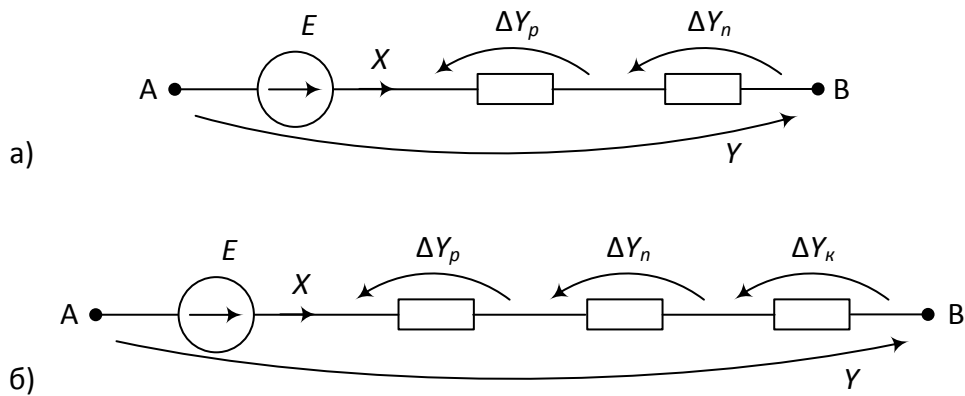


Рис. 4. Заступна схема механічної системи:
(а) – наведеної на рис. 3,а, (б) – наведеної на рис. 3,б

З урахуванням рівняння (10) для вітки (рис. 4,а) матиме вигляд

$$Y = E - \Delta Y_p - \Delta Y_n, \quad (11)$$

де ΔY_n – спад зусилля, зумовлений втратою потенціальної енергії.

Дещо інакшою буде картина, коли транспортер не просто піднімає тіла на певну висоту, а ще й надає їм початкової швидкості (рис. 3,б), щоб тіла падали не під транспортером а на деякій віддалі Δl від нього. У цьому випадку, з кожним тілом втрачається кінетична енергія. Ця енергія частково йде на подолання опору повітря під час польоту, частково перетворюється у теплову енергію удару, але це все вже за межами системи.

Очевидно, що в заступній схемі такої механічної системи необхідно враховувати й спад зусилля, зумовлений втратою кінетичної енергії (рис.4,б).

Відповідно рівняння (11) для вітки (рис. 4,б) матиме вигляд

$$Y = E - \Delta Y_p + \Delta Y_n + \Delta Y_k, \quad (12)$$

де ΔY_k – спад зусилля, зумовлений втратою кінетичної енергії.

Таким чином, у рівнянні вітки енергетичного кола, необхідно враховувати всі складові енергії (1) чи (2), що й відображено в рівнянні вітки (12).

Результати досліджень. З врахуванням рівняння вітки (12), контурна математична модель енергетичного кола (8) набуде вигляду

$$\begin{cases} \mathbf{A}\vec{X} + \vec{F} = 0, \\ \mathbf{B}\vec{Y} = 0, \\ \vec{Y} = \vec{E} - \Delta\vec{Y}_p + \Delta\vec{Y}_n + \Delta\vec{Y}_k \end{cases} \quad (13)$$

а вузлова математична модель – вигляду

$$\begin{cases} \mathbf{A}\vec{X} + \vec{F} = 0, \\ \vec{Y} = \mathbf{A}_0^T \vec{V}_0, \\ \vec{Y} = \vec{E} - \Delta\vec{Y}_p + \Delta\vec{Y}_n + \Delta\vec{Y}_k \end{cases} \quad (14)$$

де $\Delta\vec{Y}_p$ – вектор-стовпець спадів зусиль віток, пов'язаних із розсіянням енергії (перетворення енергії у теплоу);

$\Delta\vec{Y}_n$, $\Delta\vec{Y}_k$ – вектор-стовпці спадів зусиль віток, пов'язаних із втратою, відповідно, потенціальної чи кінетичної енергії.

На відміну від спаду зусилля, пов'язаного з розсіянням енергії ΔY_p , що втрачається безповоротно, спади зусилля, пов'язані зі збільшенням потенціальної (чи кінетичної) енергії, можуть бути зворотними. Покажемо це на прикладі транспортера, у якого тіла «приклеєні» до стрічки (рис. 5,а).

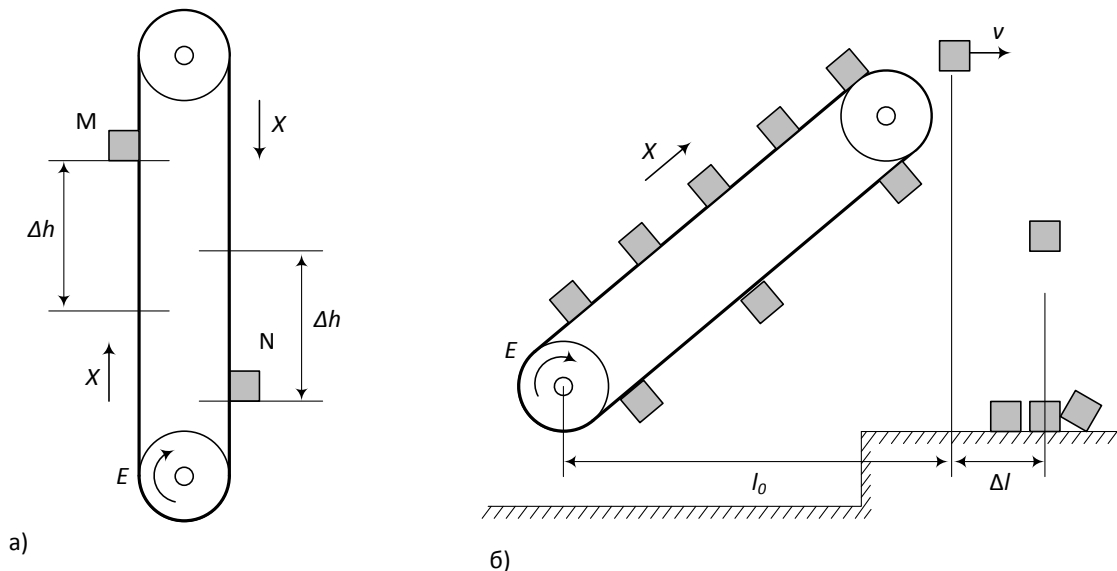


Рис. 5. Приклади зворотного перетворення енергії в механічній системі: потенціальної енергії тіл (а), потенціальної та кінетичної (б)

Відповідно до рис. 5,а, зусилля, яке необхідно затратити на збільшення потенціальної енергії тіла М, компенсується зменшенням потенціальної енергії тіла N. Якщо вага цих тіл однакова і швидкість руху стрічки транспортера незмінна, тоді енергія джерела затрачається лише на подолання тертя у підшипниках та опору повітря. Зворотне перетворення стосується також кінетичної форми енергії. Якщо тілам на транспортері надати достатньої швидкості, то після вимкнення приводного двигуна транспортер ще деякий час продовжуватиме рух за рахунок кінетичної енергії тіл.

Сформулюємо таке загальне правило: якщо носії потенціальної та/чи кінетичної форм енергії не залишають систему, а рухаються по замкнутому контуру, сума змін зусиль, затрачених на зміну форм енергії, у цьому самому контурі рівна нулю

$$\sum_{i=1}^m \Delta Y_{n,i} - \Delta Y_{\kappa,i} = 0 \quad (15)$$

де m – кількість віток, що входять в i -ий контур.

Це правило справедливе для енергетичних кіл різної фізичної природи: електричних, механічних, гідравлічних, пневматичних тощо.

Окремо необхідно розглядати лише теплове коло, що зумовлено особливістю теплової форми енергії. У колах будь-якої іншої фізичної природи втрати енергії на розсіяння – це перетворення її в теплову енергію. Можна припустити, що у теплових колах також існує тепловий потік розсіяння, однак він невіддільний від основного потоку тепла, оскільки має однакову з ним фізичну природу. В силу цього, загальний тепловий потік залишається постійним. Іншою пересторогою є те, що, відповідно до [3, 10а], відсутня кінетична форма теплової енергії.

Оскільки зміну потенціальної та кінетичної форм енергії доцільно враховувати лише у випадку, коли носії енергії залишають систему, енергетичні кола доцільно поділити на замкнені та розімкнені.

Прикладами замкнених енергетичних систем можуть бути електроенергетичні системи, системи теплопостачання без відбору теплоносія тощо. Прикладами розімкнених енергетичних систем можуть бути системи газопостачання, системи водопостачання, системи теплопостачання із відбором теплоносія, системи водовідведення тощо.

В енергетичному колі розімкнених систем, відповідно до [8, 11], необхідно ввести крім реальних віток фіктивні (чи умовні) вітки. Реальні вітки відповідають реальним елементам системи й відтворюють процес розсіяння енергії (перетворення певного виду енергії у теплову).

Фіктивні вітки відтворюють вихід носіїв енергії за межі системи. Вони виходять із вузлів енергетичного кола, у яких носії енергії залишають систему, та сходяться в один із вузлів, який називають опорним. У розрахунках такий вузол приймають за базовий.

Для прикладу розглянемо транспортер (рис. 5,б), у якого тіла «приклеєні» до транспортера через один. Таким чином половина тіл (а отже й їхня енергія йтиме по замкнутому контуру), а друга половина тіл (їх енергія) залишатиме систему. Енергетичне коло для такої системи можна подати у вигляді (рис. 6).

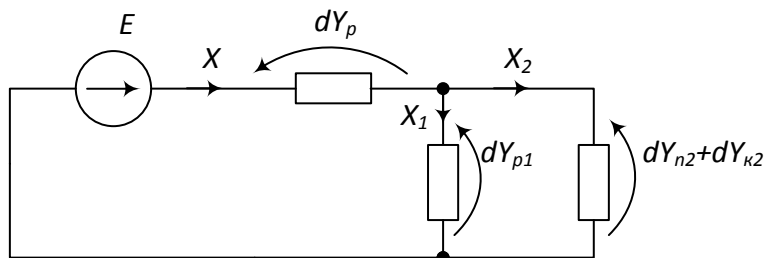


Рис. 6. Енергетичне коло транспортера, зображеного на рис. 5,б

Подальшим розвитком математичних моделей енергетичного кола є формування полюсного рівняння

$$\Delta Y = f \cdot X \quad (16)$$

Полюсне рівняння характеризує власне компоненту незалежно від її сполучення з іншими компонентами. На відміну від лінійних рівнянь математичних моделей (13) і (14), полюсне рівняння може бути як лінійним, так і нелінійним.

У випадку лінійної компоненти полюсне рівняння відносно потоку записують у вигляді

$$\Delta Y = RX, \quad (17)$$

де R – резистанс пасивної компоненти, його розмірність визначається розмірністю паралельної та послідовної змінної дії [3, 10].

Зауважимо, що в природі існує достатньо процесів, які відповідають лінійному полюсному рівнянню, а також процесів, що описуються нелінійним полюсним рівнянням.

Нелінійне полюсне рівняння слід подавати залежністю уніфікованою для процесів різної фізичної природи.

Висновки

Обґрунтовано форму рівняння вітки енергетичного кола з усіма складовими рівняння енергії.

Сформовано контурну та вузлову математичні моделі енергетичного кола.

Енергетичні системи поділено на замкнені та розімкнені (наявний відбір носіїв енергії).

Адекватне відтворення режимів розімкнених енергетичних систем потребує врахування всіх складових рівняння енергії; під час аналізу режимів замкнених енергетичних систем зміну потенціальної та кінетичної форм енергії можна не враховувати.

Список літератури

1. Саух С. М. Математическое моделирование энергетических цепей / С. М. Саух // Электронное моделирование. – 2011. – Т. 33, № 3. – С. 3–12.
2. Trent H. M. Isomorphism between oriented linear graphs and lumped physical system / H. M. Trent // J. Acoustic America. – 1955. – Vol. 5. – P. 500–527.
3. Бердников В. В. Прикладная теория гидравлических цепей / В. В. Бердников. – М. : Машиностроение, 1977 – 192 с.
4. Саух С. М. (2003) Енергетичні аналогії в теорії енергетичних кіл / Доп. НАН України, 12, 76–83.
5. Muzychak A. System of mode variables in power circuits / A. Muzychak // Energy engineering and control systems. – 2015. – Vol. 2. – [прийнято до друку].
6. Перхач В. С. Математичні задачі електроенергетики / В. С. Перхач. – Львів : Вища школа. Видання при Львівському університеті, 1989. – 464 с.
7. Koenig H. Electromechanical system theory / H. Koenig, W. Blackwell. – N. Y. : McGraw-Hill Book Company, 1961. – 424 p.

8. Меренков А. П. Теория гидравлических цепей / А. П. Меренков, В. Я. Хасилев. – М. : Наука, 1985. – 278 с.

9. Гидравлические цепи. Развитие теории и приложения / [Н. Н. Новицкий, Е. В. Сеннова, М. Г. Сухарев и др.]. – Новосибирск : Наука, Сибирская издательская фирма РАН, – 2000. – 273 с.

10. Malinowski A. Thermal conditions of buildings: mathematical modeling by power circuit theory / A. Malinowski, W. Turkowski, A. Muzychak // Technical transactions Civil engineering. – 2014. – Vol. 3-B (8). – P. 299–309.

11. Евдокимов А. Г. Потокораспределение в инженерных сетях / А. Г. Евдокимов, В. В. Дубровский, А. Д. Тевяшев ; под общ. ред. А. Г. Евдокимова. – М. : Стройиздат, 1979. – 199 с. ил.

УРАВНЕНИЕ СОСТОЯНИЯ ЭНЕРГЕТИЧЕСКИХ ЦЕПЕЙ

А. З. Музычак

Аннотация. В основе уравнений состояния энергетических систем лежат сетевые правила Кирхгофа и уравнения ветви. Обычно падение усилия на пассивном элементе связывают только с преобразованием определенного вида энергии (механической, электрической и т. п.) в тепловую. В соответствии с принципом энергетической аналогии, энергия элемента системы включает три составляющие: рассеяние энергии, а также изменение потенциальной и кинетической форм энергии. В работе учтены все составляющие энергии и образованы контурная и узловая математические модели энергетической цепи. Все энергетические системы разделены на замкнутые и разомкнутые, что обусловлено учетом составляющих уравнения энергии, а в энергетических цепях введено понятие фиктивной ветви.

Ключевые слова: энергетическая цепь, уравнение ветви, полюсное уравнение, математическая модель, закон сохранения энергии

STATE EQUATIONS OF POWER CIRCUITS

A. Muzychak

Annotation. The basis of the state equations of energy systems are network Kirchhoff's rules and branch equation. Usually effort drop on passive element is associated only with the conversion of a certain type of energy (mechanical, electrical etc.) into heat. In accordance with the principle of energy analogy energy of the system element consists of three components: energy dissipation, and change potential or kinetic energy forms. In paper takes into account all components of energy and created contour and nodal mathematical models of power circuit. All power systems are divided into closed and opened due regard constituents of energy equation. In the energy circuits introduced the concept of fictitious branch.

Key words: power circuit, branch equation, pole equation, mathematical model, law of conservation of energy