

4. Славин Р. М. Не только механизация... / Р. М. Славин. – М.: Агропроиздат, 1987. – 240 с. (С. 102).
5. Українська сільськогосподарська енциклопедія. Том.3. – К., 1972. – Сіно, сінаж. – С. 243.

Аннотация. *Обоснованные геометрические, кинематические и силовые параметры и режимы работы режущего аппарата для скашивания высокоурожайных травостоя независимо от его состояния и плющильного аппарата динамического действия с сохранением кормовых ценностей и уменьшением потерь урожая при искусственной заготовки сена и сенажа.*

Ключевые слова: *тенденция, развитие, косилка, плющилка*

Annotation. *Reasonable geometric, kinematic and power parameters and modes of operation of the cutting apparatus for the cutting of high grass, regardless of its status and calender machine dynamic action while preserving nutritional value and a decrease in yield losses in the artificial hay and silage.*

Key words: *trend, development, cutting machine, flatting machine*

УДК 514.18

КОНСТРУЮВАННЯ МІНІМАЛЬНИХ ПОВЕРХОНЬ ЗА ДОПОМОГОЮ ІЗОТРОПНОЇ КРИВОЇ, ЯКА ЛЕЖИТЬ НА ПОВЕРХНІ КАТЕНОЇДА

**С. Ф. Пилипака, доктор технічних наук
М. М. Муквич, докторант ***

Анотація. *У статті здійснено конструювання мінімальних поверхонь із використанням ізотропної кривої, яка лежить на поверхні катеноїда. Використано аналітичну умову віднесення катеноїда до ізометричних координат.*

Ключові слова: *ізотропна крива, мінімальна поверхня, лінійний елемент поверхні, катеноїд*

Постановка проблеми. Конструювання та аналітичний опис мінімальних поверхонь є важливою проблемою геометричного моделювання, зумовленою їх застосуванням при проектуванні поверхонь технічних форм та архітектурних конструкцій. До мінімальних поверхонь приводить геометрична задача: знайти

*Науковий консультант – доктор технічних наук С. Ф. Пилипака

© С. Ф. Пилипака, М. М. Муквич, 2016

поверхню, яка проходить через замкнену криву (контур) і має найменшу площу [8]. Зокрема, мінімальні поверхні та поверхні сталої середньої кривини використовуються при проектуванні перехідних оболонок для з'єднання двох циліндричних труб різних діаметрів при мінімальній величині площі поверхні [6] та у багатьох інших задачах проектування технічних форм.

Аналіз останніх досліджень. Теорія мінімальних поверхонь налічує багато способів аналітичного опису. Ряд учених досліджували мінімальні поверхні засобами варіаційного та тензорного числення [1, 6]. Основною проблемою аналітичного опису мінімальних поверхонь є труднощі, пов'язані із знаходженням їх параметричних рівнянь. Зокрема, для математичного опису мінімальної поверхні використовувався точковий каркас цієї поверхні з опорним контуром у формі ромба або паралелограма [2]. У роботі [5] досліджувалось конструювання мінімальної поверхні, яка проходить через наперед задану криву. Але аналітичний опис отриманої поверхні, близької до мінімальної, було представлено за допомогою еліптичних функцій.

Конструювання неперервного каркасу мінімальних поверхонь пов'язане із знаходженням аналітичного опису ізотропних кривих нульової довжини [8]. У дисертаційному дослідженні [4] знайдено способи конструювання просторових ізотропних кривих за формулами Шварца та Вейерштрасса [8], і на основі рівнянь ізотропних кривих побудовано мінімальні та приєднані до них поверхні. У дисертаційному дослідженні [3] розглянуто побудову мінімальних поверхонь за допомогою ізотропних кривих Без'є та застосовуються ізотропні прямі, які визначають сторони характеристичних многокутників. Отже, для розв'язання проблеми конструювання неперервного каркасу мінімальних поверхонь важливим є розширення способів утворення ізотропних кривих.

Мета досліджень. Знайти аналітичний опис ізотропних кривих, які лежать на поверхні катеноїда, використавши аналітичну умову того, що координатні лінії катеноїда утворюють ізометричну систему. На основі вказаних ізотропних кривих побудувати мінімальні поверхні та приєднані до них.

Результати досліджень. Дві сім'ї координатних ліній поверхні, віднесеної до ізометричної системи, відображаються у вигляді нескінченно малих квадратів [3]. У роботі [7] наведено алгоритм відшукання параметричних рівнянь меридіана поверхні обертання, при якому поверхня буде віднесена до ізометричних координат.

Розглянемо катеноїд – поверхню обертання ланцюгової лінії навколо осі Oz , який задано параметричними рівняннями:

$$\begin{aligned} X(t;v) &= \operatorname{ch}(t) \cdot \cos v; \\ Y(t;v) &= \operatorname{ch}(t) \cdot \sin v; \\ Z(t;v) &= t, \end{aligned} \quad (1)$$

де: $t \in \mathbb{R}, v \in [0; 2\pi)$.

Знайдемо коефіцієнти першої квадратичної форми катеноїда за формулами [9]:

$$\begin{aligned} E &= \left(\frac{\partial X}{\partial t}\right)^2 + \left(\frac{\partial Y}{\partial t}\right)^2 + \left(\frac{\partial Z}{\partial t}\right)^2; \\ F &= \frac{\partial X}{\partial t} \frac{\partial X}{\partial v} + \frac{\partial Y}{\partial t} \frac{\partial Y}{\partial v} + \frac{\partial Z}{\partial t} \frac{\partial Z}{\partial v}; \\ G &= \left(\frac{\partial X}{\partial v}\right)^2 + \left(\frac{\partial Y}{\partial v}\right)^2 + \left(\frac{\partial Z}{\partial v}\right)^2, \end{aligned} \quad (2)$$

Диференціюючи вирази (1), після перетворень, згідно (2), отримаємо: $E = G = \operatorname{ch}^2(t)$; $F = 0$. Тоді лінійний елемент катеноїда, віднесеного до ізотермічної системи, має вигляд:

$$ds = \operatorname{ch}^2(t) \cdot (dv^2 + dt^2). \quad (3)$$

Розклавши на множники вираз (3) отримаємо:

$$ds = \operatorname{ch}^2(t) \cdot (dv - i \cdot dt)(dv + i \cdot dt),$$

де: i – уявна одиниця.

Прирівнюючи до нуля праву частину останньої рівності, після інтегрування отримаємо:

$$v = i \cdot t + C, \quad (4)$$

або

$$v = -i \cdot t + C, \quad (5)$$

де: C – довільна стала інтегрування.

Вирази у правій частині рівностей (4) та (5) називають координатами Дарбу (Darboux) [8].

Лінійний елемент (3) катеноїда визначає довжину будь-якої кривої, яка лежить на його поверхні. Тому при підстановці виразів (4) або (5) у параметричні рівняння катеноїда (1) отримаємо параметричні рівняння двох сімей уявних ізотропних кривих нульової довжини. Зокрема, при підстановці виразу (4) у рівняння (1) для кожного значення C отримаємо параметричні рівняння уявної ізотропної кривої, яка лежить на поверхні катеноїда:

$$\begin{aligned} x(t) &= \operatorname{ch}(t) \cdot \cos(i \cdot t + C); \\ y(t) &= \operatorname{ch}(t) \cdot \sin(i \cdot t + C); \\ z(t) &= t. \end{aligned} \quad (6)$$

Із метою знаходження рівнянь мінімальної та приєднаної до неї мінімальної поверхні для функцій комплексної змінної (6) уведемо

заміну [8]: $t = u + i \cdot v$. Тоді отримаємо параметричні рівняння мінімальної поверхні [8] $X(u, v), Y(u, v), Z(u, v)$:

$$X(u, v) = \operatorname{Re}\{x(u + i \cdot v)\}; Y(u, v) = \operatorname{Re}\{y(u + i \cdot v)\}; Z(u, v) = \operatorname{Re}\{z(u + i \cdot v)\}; \quad (7)$$

та приєднаної поверхні $X^*(u, v), Y^*(u, v), Z^*(u, v)$:

$$X^*(u, v) = \operatorname{Im}\{x(u + i \cdot v)\}; Y^*(u, v) = \operatorname{Im}\{y(u + i \cdot v)\}; Z^*(u, v) = \operatorname{Im}\{z(u + i \cdot v)\}. \quad (8)$$

Відокремивши дійсну та уявну частину для кожної з функцій (6), маємо рівняння мінімальної поверхні:

$$\begin{aligned} X(u, v) &= \cos(C - v) \cdot \cos(v) \cdot \operatorname{ch}^2(u) + \sin(C - v) \cdot \sin(v \cos \beta) \cdot \operatorname{sh}^2(u); \\ Y(u, v) &= \sin(C - v) \cdot \cos(v) \cdot \operatorname{ch}^2(u) - \cos(C - v) \cdot \sin(v) \cdot \operatorname{sh}^2(u); \\ Z(u, v) &= u; \end{aligned} \quad (9)$$

та приєднаної поверхні:

$$\begin{aligned} X^*(u, v) &= -\frac{1}{2} \sin(C - 2v) \cdot \operatorname{sh}(2u); \\ Y^*(u, v) &= \frac{1}{2} \cos(C - 2v) \cdot \operatorname{sh}(2u); \\ Z^*(u, v) &= v. \end{aligned} \quad (10)$$

де: C – довільна стала інтегрування.

На рис. 1 зображено відсік мінімальної поверхні, побудованої за рівняннями (9) при $C = \pi; u \in [-1; \dots; 1]; v \in [-1; \dots; 1]$.

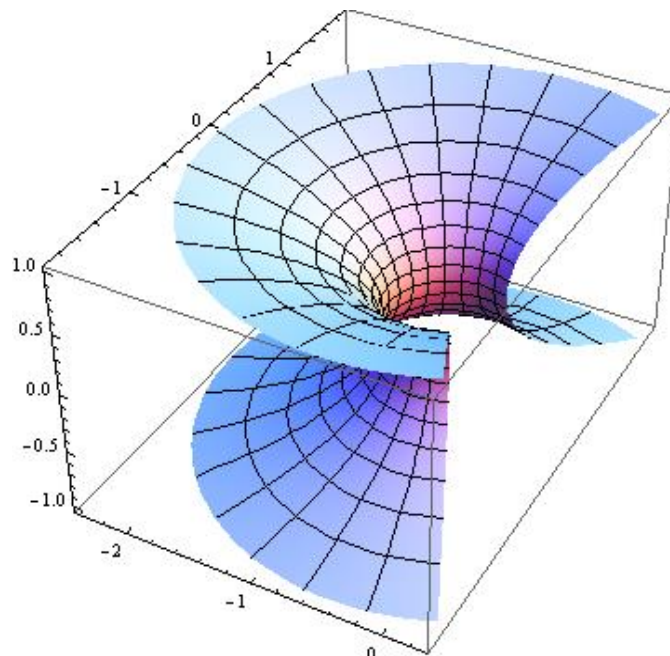


Рис. 1. Відсік мінімальної поверхні, побудованої за рівняннями (9).

Приєднана мінімальна поверхня, утворена за рівняннями (10) при $C = \pi; u \in [-1; \dots; 1]; v \in [-1; \dots; 1]$, має форму гвинтового коноїда і побудована на рис. 2 та рис. 3 відповідно.

Коефіцієнти першої квадратичної форми мінімальної поверхні (9) та приєднаної поверхні (10), знайдені за формулами (2), дорівнюють:

$$E = G = ch^2(2u); F = 0. \quad (11)$$

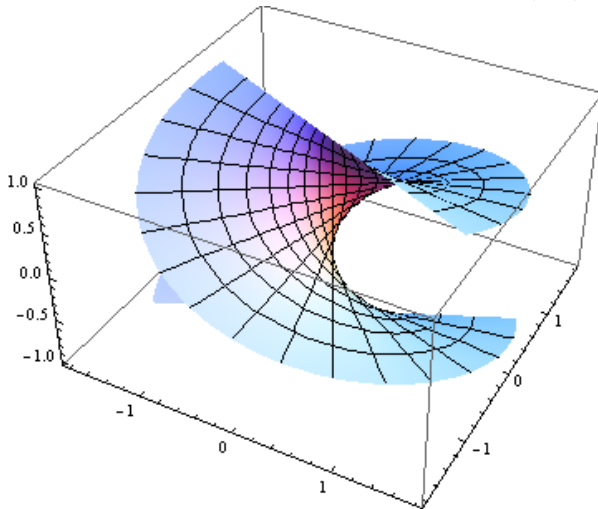


Рис. 2. Аксонометрія приєднаної мінімальної поверхні, побудованої за рівняннями (10).

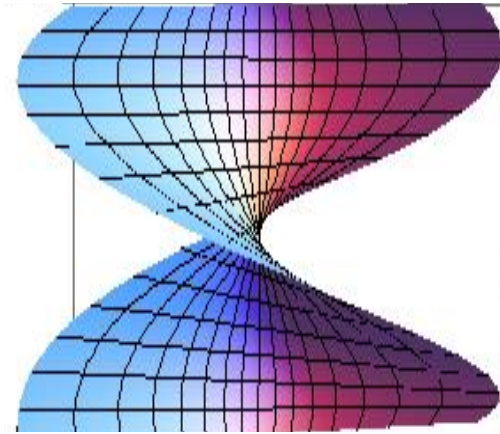


Рис. 3. Фронтальна проекція приєднаної мінімальної поверхні.

Коефіцієнти другої квадратичної форми мінімальної поверхні (9) та приєднаної поверхні (10), знайдені за відомими формулами диференціальної геометрії [9], перетворюють вираз середньої кривини $H = \frac{E \cdot N - 2 \cdot F \cdot M + G \cdot L}{2(E \cdot G - F^2)}$, для кожної із указаних поверхонь,

до нуля. При підстановці виразу (5) у рівняння (1) для кожного значення C отримаємо параметричні рівняння іншої уявної ізотропної кривої, яка лежить на катеноїді:

$$\begin{aligned} x(t) &= ch(t) \cdot \cos(-i \cdot t + C); \\ y(t) &= ch(t) \cdot \sin(-i \cdot t + C); \\ z(t) &= t. \end{aligned} \quad (12)$$

Використовуючи для функцій комплексної змінної (12) заміну $t = u + i \cdot v$, можна знайти за формулами (7) і (8) параметричні рівняння мінімальної поверхні та приєднаної до неї. Параметричні рівняння вказаних мінімальних поверхонь відрізняються від поверхонь, заданих рівняннями (9) і (10), тільки довільною сталою C , мають одні й ті самі коефіцієнти першої та другої квадратичних форм, тобто допускають паралельне перенесення одна на одну у системі координат.

Вираз (3) можна розкласти на множники у вигляді:

$$ds = ch^2(t) \cdot (dt - i \cdot dv)(dt + i \cdot dv) . \quad (13)$$

Прирівнюючи до нуля праву частину рівності (13), після інтегрування отримаємо:

$$t = i \cdot v + C \text{ або } t = -i \cdot v + C. \quad (14)$$

Підставивши вирази (14) у параметричні рівняння катеноїда (1), отримаємо рівняння двох сімей уявних ізотропних кривих нульової довжини. Для кожного значення C за знайденими ізотропними кривими можна побудувати мінімальні поверхні та приєднані до них. Тоді, у знайдених параметричних рівняннях мінімальної та приєднаної поверхонь, у порівнянні з виразами (9) і (10) відповідно, змінні t і v "поміняються місцями". Але утворені поверхні матимуть рівні коефіцієнти першої та другої квадратичних форм із мінімальними поверхнями (9) і (10), тобто допускатимуть паралельне перенесення одна на одну.

Висновок. На поверхні катеноїда можна побудувати дві сім'ї ізотропних ліній і кожній лінії поставити у відповідність мінімальну поверхню та приєднану до неї. Спосіб аналітичного опису уявної ізотропної кривої, яка лежить на поверхні катеноїда, дозволяє керувати процесом утворення мінімальних поверхонь при відокремленні дійсної та уявної частин функції комплексної змінної.

Список літератури

1. *Агальцев А. В.* Моделирование минимальных поверхностей / *А. В. Агальцев* // Прикладная геометрия и инженерная графика. – К.: Будівельник, 1969. – № 9. – С. 94–96.
2. *Агальцев А. В.* Определение точечного каркаса минимальной поверхности методом правильной косоугольной сетки / *А. В. Агальцев, М. П. Сапагоvas* // Прикладная геометрия и инженерная графика. – К.: Будівельник, 1973. – № 16. – С. 54–56.
3. *Аушева Н. М.* Геометричне моделювання об'єктів дійсного простору на основі ізотропних характеристик : автореф. дис. ... д-ра техн. наук: 05.01.01 / *Н. М. Аушева*. – К.: КНУБА, 2014. – 38 с.
4. *Коровіна І. О.* Конструювання поверхонь сталої середньої кривини за заданими лініями інциденції : автореф. дис. на здобуття наук. ступеня канд. техн. наук: спец. 05.01.01 "Прикладна геометрія, інженерна графіка" / *І. О. Коровіна*. – К.: КНУБА, 2012. – 20 с.
5. *Курек Г. К.* Пример задания минимальной поверхности линейным каркасом / *Г. К. Курек* // Прикладная геометрия и инженерная графика. – К.: Будівельник, 1974. – № 18. – С. 39–43.
6. *Пульпинский Я. С.* Математическое моделирование оболочек вращения сложных форм : автореф. дисс. на соиск. уч. степени канд. техн. наук: спец. 05.13.18 "Математическое моделирование, численные методы и комплексы программ" / *Я. С. Пульпинский*. – Пенза: Пензенский государственный университет архитектуры и строительства, 2006. – 20 с.
7. *Несвідомін В. М.* Конструювання поверхонь обертання, віднесених до ізометричних сіток координатних ліній / *В. М. Несвідомін, Т. С. Кременець* // Прикладна геометрія та інженерна графіка. – К.: КНУБА, 2012. – № 89. – С. 271–276.

8. Фиников С. П. Теория поверхностей / С. П. Фиников. – М.-Л.: ГТТИ, 1934. – 206 с.
9. Норден А. П. Теория поверхностей / А. П. Норден. – М.: ГТТЛ, 1956. – 261 с.

Аннотация. В данной работе осуществлено конструирование минимальных поверхностей с использованием изотропной кривой, которая находится на поверхности катеноида. Использовано аналитическое условие того, что координатные линии катеноида образуют изометрическую систему.

Ключевые слова: *изотропная кривая, минимальная поверхность, линейный элемент поверхности, катеноид*

Annotation. In paper the design of minimal surfaces using isotropic curve that lies on the surface of the catenoid. It uses analytical condition that the coordinate lines catenoid form isometric system.

Key words: *isotropic curve, the minimum surface, line element surface, catenoid*

УДК 658.382.3

ВПРОВАДЖЕННЯ СИСТЕМИ ВІДСТЕЖЕННЯ ПОТЕНЦІЙНИХ НЕБЕЗПЕК НА АГРАРНОМУ ПІДПРИЄМСТВІ НА БАЗІ РИЗИК-ОРІЄНТОВАНОГО ПІДХОДУ

О. В. Войналович, О. А. Гнатюк, кандидати технічних наук

Анотація. Проаналізовано структуру системи відстеження потенційних небезпек в аграрній галузі та застосовні методи оцінювання виробничих ризиків. Описано алгоритми визначення виробничих ризиків та межі їх оцінок щодо характеристик небезпек на робочих місцях сільськогосподарського виробництва. Для кількісного оцінювання ризиків на механізованих процесах у рослинництві та тваринництві запропоновано використовувати розроблений класифікатор.

Ключові слова: *виробничі небезпеки, система управління охороною праці, ризик-орієнтований підхід, професійний ризик трактористів-машиністів*

Поставлення проблеми. Для зменшення ступеню впливу виробничих чинників на зародження і формування аварійних та

© О. В. Войналович, О. А. Гнатюк, 2016