УДК 517.51

ЗАСТОСУВАННЯ DT-МОДУЛЯ ГЛАДКОСТІ ДЛЯ ОЦІНКИ РІВНОМІРНОГО НАБЛИЖЕННЯ ФУНКЦІЙ

О. Ю. ДЮЖЕНКОВА, кандидат фізико-математичних наук
e-mail: nni.elektrik@gmail.com

Анотація. *Розглянуто модулі гладкості Дітзіана-Тотіка (DT-модулі гладкості) для неперервних на відрізку $[-1;1]$ функцій. Досліджено зв'язок між DT- модулем гладкості r-ї похідної функції f та звичайним k-м модулем гладкості r-ї похідної періодичної функції $\widetilde{f} = f(\cos t)$, зокрема, одержано оцінку знизу для DT- модуля гладкості для непарного r.*

Ключові слова: рівномірне наближення функцій, многочлен Лагранжа, модулі гладкості, оцінка знизу

Для оцінки наближення функцій алгебраїчними многочленами у теорії апроксимації використовують модулі неперервності (гладкості) функцій або їх похідних. У випадку рівномірного наближення неперервних на відрізку $[-1;1]$ функцій можна розглядати k-й модуль неперервності для функції $f(\cos t)$ (див. [3]). З метою одержання конструктивної характеристики рівномірного наближення неперервних на відрізку $[-1;1]$ функцій зручно користуватися DT–модулями гладкості $\overline{\omega}_k(f, t)$, які ввели Дітзіан і Тотік (див. монографії Ditzian Z., Totik V. [5], Шевчука І. О. [4]).

Мета досліджень – встановлення зв'язку між DT-модулем гладкості r-ї похідної функції f та звичайним модулем гладкості k-го порядку r-ї похідної періодичної функції $\widetilde{f}(t) = f(\cos t)$.

Матеріали і методика досліджень. У роботі використовуються методи рівномірного наближення функцій ([1], [4]), зокрема інтерполяція функцій многочленами Лагранжа.

Результати досліджень. Одержано оцінку знизу для DT-модуля гладкості $\overline{\omega}_{k,r}(\tau, f^{(r)})$ r-ї похідної функції f через модуль гладкості $\omega_k(\tau, \widetilde{f}^{(r)})$ k-го порядку r-ї похідної періодичної функції $\widetilde{f}$ для непарного r. У випадку $r = 0,\ k = 1$ встановлено більш точну оцінку:

Нехай $C_{[a;b]}$ – простір неперервних на $[a;b] \subset R$ функцій $f : [a;b] \to R$ із рівномірною нормою $\|f\|_{[a;b]} := \max\limits_{x \in [a;b]} |f(x)|$. Позначимо через $C^r_{[a;b]} := \{f \big| f^{(r)} \in C_{[a;b]}\}, r \in N$, а через C^r – підмножину функцій

$f \in C_{[-1;1]}$, які мають неперервну r-ту похідну на інтервалі $(-1;1)$. Нехай $k \in N, h \in R$. Розглянемо основні означення, наведені в роботі [4].

Модулем неперервності (гладкості) k-го порядку функції $f \in C_{[a;b]}$ називається функція

$$\omega_k(\tau, f, [a;b]) := \sup_{h \in [0;\tau]} \left\| \Delta_h^k(f;x) \right\|_{[a+\frac{kh}{2}; b-\frac{kh}{2}]}, \quad \tau \geq 0$$
,

де $\Delta_h^k(f;t) := \sum_{i=0}^{k} (-1)^{k-i} \binom{k}{i} f\left(t - \frac{kh}{2} + ih\right)$ – *k-та симетрична різниця функції f* у точці $t \in R$ із кроком h.

Позначивши $\varphi(x) := \sqrt{1-x^2}$, розглянемо модулі гладкості, введені З. Дітзіаном і В. Тотіком [5].

DT-модулем гладкості k-го порядку функції $f \in C_{[-1;1]}$ називається функція

$$\overline{\omega}_k(\tau, f) = \sup_{h \in [0;\tau]} \sup_{x:[x-\frac{kh\varphi(x)}{2}; x+\frac{kh\varphi(x)}{2}] \subset [-1;1]} \left\| \Delta_{h\varphi(x)}^k(f;x) \right\|_{[a+\frac{kh}{2}; b-\frac{kh}{2}]}, \quad \tau \geq 0$$
.

DT-модулем гладкості k-го порядку з вагою

$$\varphi_r := \varphi_r(x,k,h) := \left(1 + x - \frac{kh\varphi(x)}{2}\right)^{\frac{r}{2}} \left(1 - x - \frac{kh\varphi(x)}{2}\right)^{\frac{r}{2}}, \quad r \in R$$
,

неперервної на $(-1;1)$ функції f називають функцію

$$\overline{\omega}_{k,r}(\tau, f) := \sup_{h \in [0;\tau]} \sup_{x:[x-\frac{kh\varphi(x)}{2}; x+\frac{kh\varphi(x)}{2}] \subset (-1;1)} \left\| \varphi_r \Delta_{h\varphi(x)}^k(f;x) \right\|_{[a+\frac{kh}{2}; b-\frac{kh}{2}]}, \quad \tau \geq 0$$
.

Зазначимо, що $\overline{\omega}_{k,0}(\tau, f) := \overline{\omega}_k(\tau, f)$.

Досліджуючи зв'язок між $\overline{\omega}_{k,r}(\tau, f^{(r)})$ і $\omega_k(\tau, \widetilde{f}^{(r)})$, оцінимо DT-модуль гладкості $\overline{\omega}_{k,r}(\tau, f^{(r)})$ знизу.

Для кожної функції $f \in C_{[-1;1]}$ позначимо $\widetilde{f} := \widetilde{f}(t) = f(\cos t)$. Нехай $\|f\| := \|f\|_{[-1;1]}$, $m = k + r$. Зафіксуємо $t_* \in [0; \frac{\pi}{2}]$ і число $0 < h \leq \frac{1}{m}$. Якщо $\left[t_* - \frac{mh}{2}, t_* + \frac{mh}{2}\right] \subset (0;\pi)$, то покладемо $x_0 := \cos(t_* - \frac{mh}{2})$, в іншому випадку – $x_0 := 1$. Позначимо $x_m := \cos(t_* + \frac{mh}{2})$, знайдемо точку $x_* \in (x_m; x_0)$ і число $h_* > 0$ з умов $x_* - \frac{mh_*\varphi(x_*)}{2} = x_m$, $x_* + \frac{mh_*\varphi(x_*)}{2} = x_m$ та покладемо $d := h_*\varphi(x_*)$. Надалі вважатимемо, що $x \in (x_m; x_0)$.

Позначимо $P_j(x)=(x-x_0)(x-x_1)...(x-x_{j-1})$, $\tilde{P}_j(t)=P_j(\cos t)$.

За допомогою простих перетворень дістанемо нерівності

$$\Delta_h^k(\tilde{P}_j^{(r)},t_0)\le c_1h^k,\quad 1\le j\le\frac{m}{2}, \tag{1}$$

$$\Delta_h^k(\tilde{P}_j^{(r)},t_0)\le c_2h^k\left(\frac{d}{h}\right)^{2j-m},\quad \frac{m}{2}\le j\le m-1. \tag{2}$$

Розглянемо многочлен Лагранжа $L:=L(x,f;x_0,...,x_{m-1})$ степеня $\le m-1$, який інтерполює функцію f в m рівновіддалених точках $x_j=x_0+j\dfrac{x_m-x_0}{m}$, $j=\overline{0,m-1}$. Позначимо $\tilde{L}(t):=L(\cos t)$ і доведемо оцінки

$$\left|\Delta_h^k(\tilde{L}^{(r)},t_*)\right|\le c_3\left(\overline{\omega}_{k,r}(h,f^{(r)})+h^k\|f\|\right),\qquad m \text{ – непарне}, \tag{3}$$

$$\left|\Delta_h^k(\tilde{L}^{(r)},t_*)\right|\le c_4\left(h^k\int_h^2\frac{\overline{\omega}_{k,r}(u,f^{(r)})}{u^{k+1}}du+h^k\|f\|\right),\quad m \text{ – парне}. \tag{4}$$

Зобразимо многочлен Лагранжа за формулою Ньютона (див., напр., [4])

$$L(x)=f(x_0)+\sum_{j=1}^{m-1}(x_0,x_1,...,x_j;f)(x-x_0)(x-x_1)...(x-x_{j-1})$$

і дістанемо рівність

$$\Delta_h^k(\tilde{L}^{(r)},t_*)=\sum_{j=1}^{m-1}(x_0,x_1,...,x_j;f)\Delta_h^k(\tilde{P}_j^{(r)},t_*).$$

Скориставшись нерівностями (1) і (2), оцінимо $\Delta_h^k(\tilde{L}^{(r)},t_*)$. Маємо

$$\left|\Delta_h^k(\tilde{L}^{(r)},t_*)\right|\le c_5\left(\frac{\overline{\omega}_m(h,f)}{h^r}+h^k\|f\|\right),\qquad m \text{ – непарне}. \tag{5}$$

$$\left|\Delta_h^k(\tilde{L}^{(r)},t_*)\right|\le c_6\left(h^k\int_h^2\frac{\overline{\omega}_m(u,f)}{u^{m+1}}du+h^k\|f\|\right),\quad m \text{ – парне}. \tag{6}$$

За властивістю DT-модуля маємо

$$\overline{\omega}_m(u,f)\le c_7\overline{\omega}_{k,r}(u,f^{(r)}).$$

З останньої рівності та нерівностей (5) і (6) випливають оцінки (3) і (4). Для подальших досліджень скористаємося лемою.

***Лема*.** [4] Нехай $(p+1)\in N$, $p<k$, $[x_0;x_0+(k-1)h]\subset[a;b]$, $G=[x_0-h;x_0+kh]\cap[a;b]$. Якщо $f\in C^p_{[a;b]}$, то має місце рівність

$$\left\|f^{(p)}-L^{(p)}\right\|_G\le c_8\overline{\omega}_{k-p}(h,f^{(p)};[a,b]).$$

Розглянемо r – непарне, тоді за допомогою наведеної леми, можна довести оцінку

$$\left|\Delta_h^k(\tilde{f}^{(r)}-\tilde{L}^{(r)},t_*)\right|\le c_9\,\overline{\omega}_{k,r}(h,f^{(r)}). \tag{7}$$

З нерівностей (3), (4) і (7) випливають оцінки

$$\left|\Delta_h^k(\tilde{f}^{(r)},t_*)\right| \le c_9\left(\overline{\omega}_{k,r}(h,f^{(r)})+h^k\|f\|\right),\quad k \text{ – парне},\ r \text{ – непарне;}$$

$$\left|\Delta_h^k(\tilde{f}^{(r)},t_*)\right| \le c_{10}\left(h^k\int_h^2\frac{\overline{\omega}_{k,r}(u,f^{(r)})}{u^{k+1}}du+h^k\|f\|\right),\ k \text{ – непарне},\ r \text{ – непарне.}$$

Результатом проведених досліджень є наступна теорема.

Теорема. Для будь-яких $k \in N$, непарних r і довільної функції $f \in C^r$ мають місце оцінки

$$\omega_k(\tau,\tilde{f}^{(r)}) \le c_{11}\left(\overline{\omega}_{k,r}(\tau,f^{(r)})+\tau^k\|f\|\right),\quad \tau \ge 0,\quad k \text{ – \textit{парне},}$$

$$\omega_k(\tau,\tilde{f}^{(r)}) \le c_{12}\left(\tau^k\int_\tau^2\frac{\overline{\omega}_{k,r}(u,f^{(r)})}{u^{k+1}}du+\tau^k\|f\|\right),\quad 0\le\tau\le 2,\quad k \text{ – \textit{непарне}.}$$

Зауважимо, що у випадку $r=0,\ k=1$ має місце більш точна оцінка:

$$\omega_1(\tau,\tilde{f}) \le c\overline{\omega}_1(\tau,f),\quad \tau \ge 0.$$

Висновки

У роботі було досліджено зв'язок між DT-модулем гладкості $\overline{\omega}_{k,r}(\tau,f^{(r)})$ та звичайним k-м модулем гладкості $\omega_k(\tau,\tilde{f}^{(r)})$, у результаті чого, одержано оцінку знизу для $\overline{\omega}_{k,r}(\tau,f^{(r)})$ для випадку непарного r. Зокрема доведено, що модуль гладкості $\overline{\omega}_{k,r}(\tau,f^{(r)})$ еквівалентний звичайному модулю гладкості $\omega_k(\tau,\tilde{f}^{(r)})$ для функції $\tilde{f}=f(\cos t)$ у випадку, коли k – парне, r – непарне.

Список літератури

1. Дзядык В. К. Введение в теорию равномерного приближения функций полиномами / В. К. Дзядык. – М. : Наука, 1977.– 512 с.
2. Дюженкова О. Ю. Замечание о модуле гладкости З. Дитзиана и В. Тотика / О. Ю. Дюженкова // Укр. мат. журнал. – 1995. – 47, № 12. – С. 1627–1638.
3. Фуксман Л. Структурная характеристика функций, у которых $E_n(f;-1;1) \le Mn^{-(k+\alpha)}$ / Л. Фуксман // Успехи мат. наук.– 1965. – 20. – № 4. – С. 187–190.
4. Шевчук И. А. Приближение многочленами и следы непрерывных на отрезке функций / И. А. Шевчук. – К. : Наук. думка, 1992. – 223 с.
5. Ditzian, Z. (1987). Moduli of smoothness/ Ditzian Z., Totik V. Springer-Verlag, New York/Berlin, 300.

References

1. Dzyadyk, V. K. (1977). Vvedeniye v teoriyu ravnomernogo pryblyzheniya funktsyy polynomamy [Introduction to the theory of uniform approximation of functions by polynomials]. M.: Nauka, 512.
2. Dyuzhenkova, O. Yu. (1995). Zamechaniye o module gladkosty Z. Dytzyana y V. Totyka [Note on the smoothness module Z. Design and Totik]. Ukr. mat. Zhurnal, 47 (12), 1627–1638.

3. Fuksman, L. (1965). Strukturnaya kharakterystyka funktsyy, u kotorykh [Structural characteristic of functions for which $E_n(f;-1;1) \le Mn^{-(k+\alpha)}$]. Uspekhy mat. Nauk, 20 (4), 187–190.
4. Shevchuk, Y. A. (1992). Pryblyzheniye mnogochlenamy y sledy nepreryvnykh na otrezke funktsiyi [Approximation by polynomials and traces of continuous functions on the interval]. Kiyiv: Nauk. dumka, 223.
5. Ditzian, Z., Totik, V. (1987). Moduli of smoothness. Springer-Verlag, New York/Berlin, 300.

ПРИМЕНЕНИЕ DT-МОДУЛЯ ГЛАДКОСТИ ДЛЯ ОЦЕНКИ РАВНОМЕРНОГО ПРИБЛИЖЕНИЯ ФУНКЦИЙ

О. Ю. Дюженкова

Аннотация. *Рассмотрены модули гладкости Дитзиана-Тотика (DT-модули гладкости) для непрерывных на отрезке [-1;1] функций. Исследована связь между DT-модулем гладкости r-й производной функции f и k-модулем гладкости r- й производной периодической функции $\tilde{f} = f(\cos t)$, в частности, получена оценка снизу для DT-модуля гладкости для нечетного r.*

Ключевые слова: равномерное приближение функций, многочлен Лагранжа, модули гладкости, оценка снизу

APPLICATION OF DT-MODULE OF SMOOTHNESS FOR UNIFORM APPROXIMATION OF FUNCTIONS

O. Dyuzhenkova

Abstract. *We consider the DT- module of smoothness, introduced by Ditzian and Totik, for continuous on the [-1;1] functions. We investigate the connection between the DT- module of smoothness of the r-s derivative of the function f and classical module of smoothness of the r-s derivative of the periodic function $\tilde{f} = f(\cos t)$. In particular, we get the lower estimate for the DT-module of smoothness for odd r.*

Keywords: function approximation, Lagrange polynomial, modules of smoothness, the lower estimate