

are used to reduce resonant vibrations of the rotors in a wide range of speeds. In this article the viscous friction's dampers are considered. Using viscous friction's dampers reduce extraneous vibrations. Invariant velocity of amplitude curve is used for finding the optimal parameters of viscous friction dampers. Graphs of invariant velocity are reported.

Imbalance of the damper is considered. Imbalance of the damper is the rejection of its parameters by parameters optimal calculation. The dependency graph of force against the magnitude of damping at optimal stiffness and graph of force against the magnitude of the damper stiffness with optimal damping are plotted. The optimum damper provides minimal power dissipation in the damper.

The results obtained can be further used to refine and improve the methods of engineering calculation of optimal parameters.

**Key words:** calculation, optimization, parameters, damper, viscous friction, damping, imbalance, flexible shaft, drum

УДК 514.18

## **РУХ ЧАСТИНКИ ПО ПОВЕРХНІ СФЕРИЧНОГО ГРУНТООБРОБНОГО ДИСКА**

**С. Ф. Пилипака, доктор технічних наук  
М. Б. Клендій, кандидат технічних наук  
e-mail: engmech\_centre@twin.nauu.kiev.ua**

**Анотація.** Розглянуто відносний рух частинки по внутрішній шорсткій поверхні сферичного ґрунтообробного диска, який обертається навколо горизонтальної осі під дією сили реакції ґрунту. Лезо диска розташовано у вертикальній площині, яка утворює з напрямом руху агрегату кут атаки. Цей кут має допустиму межу, перевищення якої може призвести до волочіння диска. В роботі прийнято допущення, що волочіння відсутнє, кутова швидкість обертання диска є сталою і залежить від сталої швидкості руху агрегату та кута атаки. При роботі агрегату частинки ґрунту попадають на внутрішню поверхню диска і здійснюють по ньому відносний рух, який визначає траєкторію ковзання частинки по поверхні диска. За абсолютною траєкторією руху частинки по відношенню до нерухомої системи координат можна прослідкувати, на яку висоту частинка піднімається після вступу її на поверхню диска.

© С. Ф. Пилипака, М. Б. Клендій, 2017

Складено диференціальні рівняння руху частинки, які розв'язано чисельними способами. Частинка попадає на диск із заданими початковими умовами, якими є напрям вступу на диск і її початкова швидкість. Розглянуто дві моделі руху частинки по диску. Згідно однієї моделі прийнято, що подальший рух частинки після її вступу на поверхню відбувається за рахунок кінетичної енергії, яку має частинка на момент її вступу на поверхню диска. Згідно другої моделі враховується сила підпору інших частинок, яка долає силу тертя частинки по поверхні.

Диференціальні рівняння руху частинки складено в проєкціях на осі нерухомої просторової системи координат. Таким чином, до системи входить три диференціальні рівняння із трьома невідомими функціями. Однією із розшукуваних функцій є сила реакції поверхні і залежності, що описують відносний рух частинки по поверхні диска.

**Ключові слова:** ґрунтообробний диск, обертальний рух, відносний рух частинки, диференціальні рівняння руху

**Постановка проблеми.** Сферичні диски є розповсюдженими робочими органами ґрунтообробних знарядь. Вони встановлюються під кутом атаки до напрямку руху агрегату, внаслідок чого виникає реактивна сила, яка приводить диски у обертальний рух. Частинки ґрунту ковзають при цьому по внутрішній робочій поверхні диска, здійснюючи таким чином відносний рух.

Частинка або матеріальна точка здійснює складний рух, складовою частиною якого є відносна траєкторія ковзання частинки по внутрішній поверхні диска. Вивчення такого руху на прикладі окремої частинки дозволить зрозуміти природу переміщення частинок і встановити вплив параметрів установки диска на їх поведінку. В свою чергу, це буде сприяти проектуванню ґрунтообробних знарядь з дисковими робочими органами.

**Аналіз останніх досліджень.** Вивченню складного руху частинок технологічного матеріалу по рухомих поверхнях присвячені фундаментальні монографії [1, 2]. Рух частинок ґрунту по полиці плуга розглянуто в монографії [3]. Знаходження траєкторії частинки, яка рухається по циліндричній поверхні під дією сил підпору, розглянуто в статті [4]. Окрему групу складають статті, в яких розглядається рух частинки по шорсткій поверхні під дією сили ваги [5–8].

**Метою досліджень** є вивчення закономірностей руху частинки по внутрішній поверхні сферичного ґрунтообробного диска, який обертається навколо горизонтальної осі.

**Результати досліджень.** Схема розташування диска на ґрунтообробному знарядді показана на рис. 1,а в проєкціях. Диск

представляє собою сегмент сфери радіуса  $R$ , у якого периферія є колом радіуса  $r$  і це коло є ріжучою крайкою, тобто лезом. Якщо агрегат рухається в напрямі осі  $Y$ , то кут  $\alpha$ , який утворює площина леза із віссю  $Y$ , є кутом атаки. Диск занурений в ґрунт на глибину  $a$ . Для спрощення розрахунків ми диск не повертатимемо на кут  $\alpha$ , як показано на рис. 1,а, а вважатимемо, що на нього насувається ґрунт із швидкістю  $V_{az}$  під кутом  $\alpha$ , де  $V_{az}$  – швидкість руху агрегату (рис. 1,б). Така модель дозволить спрощено описати поверхню диска без повороту його на кут  $\alpha$ , замінивши поворот диска на поворот вектора швидкості агрегату.

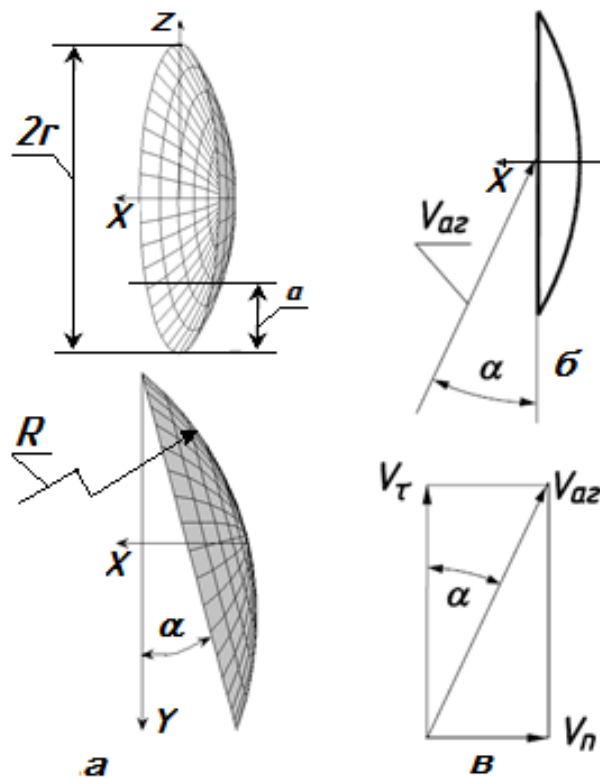


Рис. 1. Ілюстрації до розташування диска в системі координат.

Від кута атаки  $\alpha$  залежить величина кутової швидкості обертання диска. При  $\alpha=90^\circ$  обертання стає неможливим. По мірі зменшення кута  $\alpha$  збільшується кутова швидкість обертання диска і при  $\alpha=0^\circ$  вона стає максимальною. Для визначення її величини розкладемо вектор швидкості агрегату  $V_{az}$  на дві складові: поздовжню  $V_\tau$  і поперечну  $V_n$  (рис. 1,в). Величину складових можна знайти через кут  $\alpha$ :  $V_\tau = V_{az} \cos \alpha$ ,  $V_n = V_{az} \sin \alpha$ . З поперечною швидкістю  $V_n$  частинка вступає на поверхню диска, а від поздовжньої  $V_\tau$  залежить кутова швидкість обертання диска. Для ефективної роботи агрегату кут  $\alpha$  потрібно збільшувати, однак до певної межі, при якій починається волочіння. Будемо виходити із умови, що

волочіння відсутнє, тобто  $V_\tau = \omega r$ , де  $\omega$  – кутова швидкість обертання диска. Звідси знаходимо  $\omega$ :  $\omega = V_{az} \cos \alpha / r$ . Величину поперечної швидкості  $V_n$ , так як і кутову швидкість обертання диска, будемо враховувати при чисельному інтегруванні диференціальних рівнянь відносного руху частинки по поверхні диска.

Опишемо початкове положення сфери параметричними рівняннями, взявши при цьому за вісь обертання координатну вісь  $X$  (рис. 1,б), яка є паралельною до горизонтальної площини, тобто до поверхні поля:

$$\begin{aligned} X &= -R \cos u; \\ Y &= R \sin u \sin v; \\ Z &= R \sin u \cos v, \end{aligned} \quad (1)$$

де:  $v$  і  $u$  – незалежні змінні поверхні, причому  $v$  – кут повороту поточної точки сфери навколо осі  $X$  вздовж паралелі ( $v=0\dots 2\pi$ );  $u$  – кутова координата цієї точки вздовж меридіана, у якої відлік починається від точки перетину осі  $X$  із поверхнею сфери.

Для того, щоб виділити із рівнянь сфери (1) потрібний відсік (сегмент), потрібно задати межі зміни змінної  $u$ . Змінна  $u$  змінюється від  $0$  (відповідає точка на сегменті, через яку проходить вісь обертання) до  $\arcsin(r/R)$  – цьому значенні  $u$  відповідає коло на сегменті (ріжуча крайка) [9]. Якщо незалежні змінні поверхні  $u$  і  $v$  зробити залежними одна від іншої, то на поверхні сегмента буде описана лінія. Будемо вважати, що така залежність встановлена через іншу змінну  $t$  – час ковзання частинки по поверхні сегмента (диска). Тоді внутрішнє рівняння відносної траєкторії частинки опишеться залежностями:  $u=u(t)$  і  $v=v(t)$ . Ці залежності потрібно розшукати. Рівняння (1) є рівняннями поверхні, але при встановленні залежностей  $u=u(t)$  і  $v=v(t)$  вони перетворюються у рівняння лінії на поверхні. Щоб відрізнити рівняння поверхні від рівнянь кривої на ній, у рівняннях поверхні будемо робити позначення « $X$ », « $Y$ », « $Z$ » прописними літерами, а у рівняннях лінії – строчними. При залежностях  $u=u(t)$  і  $v=v(t)$  (поки що невідомих) рівняння (1) опишуть на поверхні траєкторію відносного руху частинки. Диференціюванням (1) по часу  $t$  отримаємо проєкції відносної швидкості ковзання частинки по поверхні диска:

$$\begin{aligned} x' &= R u' \sin u; \\ y' &= R [u' \cos u \sin v + v' \sin u \cos v]; \\ z' &= R [u' \cos u \cos v - v' \sin u \sin v]. \end{aligned} \quad (2)$$

Величину відносної швидкості отримаємо із геометричної суми складових (2):

$$V = \sqrt{x'^2 + y'^2 + z'^2} = R\sqrt{u'^2 + v'^2 \sin^2 u}. \quad (3)$$

При обертанні навколо своєї осі із кутовою швидкістю  $\omega$  всі точки сегмента (1) повертаються на кут  $\varphi = -\omega t$ . Знак «-» прийнято для узгодження вектора швидкості руху агрегату і напряму обертання сегменту (диска). Застосувавши формули повороту, запишемо параметричні рівняння сегмента, які описують його положення після повороту на кут  $\varphi$ :

$$\begin{aligned} X &= -R \cos u; \\ Y &= R \sin u \sin v \cos(-\omega t) - R \sin u \cos v \sin(-\omega t); \\ Z &= R \sin u \sin v \sin(-\omega t) + R \sin u \cos v \cos(-\omega t). \end{aligned} \quad (4)$$

Після спрощень (4) ми отримуємо рівняння лінії на поверхні сегмента, яка є абсолютною траєкторією руху частинки, тому переходимо до строчних літер:

$$\begin{aligned} x &= -R \cos u; \\ y &= R \sin u \sin(v + \omega t); \\ z &= R \sin u \cos(v + \omega t). \end{aligned} \quad (5)$$

Диференціальне рівняння руху частинки по поверхні сферичного сегмента складемо у вигляді  $m\bar{w} = \bar{F}$ , де  $m$  – маса частинки,  $\bar{w}$  – вектор абсолютного прискорення,  $\bar{F}$  – рівнодійний вектор прикладених до частинки сил. Такими силами є: сила ваги частинки  $mg$  ( $g = 9,81 \text{ м/с}^2$ ), реакція  $\bar{N}$  поверхні і сила тертя  $f\bar{N}$ , яка чинить опір ковзанню частинки по поверхні сегмента ( $f$  – коефіцієнт тертя). Наведене векторне рівняння розпишемо в проекціях на осі координат, в результаті чого отримуємо систему із трьох диференціальних рівнянь.

Абсолютне прискорення частинки отримуємо послідовним диференціюванням рівнянь абсолютної (5) по часу  $t$ . Перша похідна рівнянь (5), тобто вектор абсолютної швидкості частинки, має вигляд:

$$\begin{aligned} x' &= Ru' \sin u; \\ y' &= R[u' \cos u \sin(v + \omega t) + (v' + \omega) \sin u \cos(v + \omega t)]; \\ z' &= R[u' \cos u \cos(v + \omega t) - (v' + \omega) \sin u \sin(v + \omega t)]. \end{aligned} \quad (6)$$

Диференціюємо вирази (6) і отримуємо проекції вектора абсолютного прискорення на осі координат:

$$\begin{aligned}
x'' &= R(u'^2 \cos u + u'' \sin u); \\
y'' &= R \cos(v + \omega t) [2u'(v' + \omega) \cos u + v'' \sin u] + \\
&+ R \sin(v + \omega t) [u'' \cos u - (u'^2 + (v' + \omega)^2) \sin u]; \\
z'' &= -R \sin(v + \omega t) [2u'(v' + \omega) \cos u + v'' \sin u] + \\
&+ R \cos(v + \omega t) [u'' \cos u - (u'^2 + (v' + \omega)^2) \sin u].
\end{aligned} \tag{7}$$

Першою прикладеною силою є вага частинки  $mg$ . Оскільки вектор ваги спрямований вниз, то його проекції на осі координат запишуться:

$$\{0; \quad 0; \quad -mg\}. \tag{8}$$

Друга прикладена сила – реакція поверхні  $\bar{N}$  сегмента, яка спрямована по нормалі до поверхні. Всі нормалі сфери спрямовані до її центру, тому їх координати рівні параметричним рівнянням (1), взятим із протилежним знаком із врахуванням дії поверхні на частинку. Цей вектор прикладений до частинки в точці її знаходження. Його потрібно повернути на кут  $\varphi = -\omega t$ , щоб він відповідав точці розташування частинки на поверхні. Після повороту проекції вектора запишуться:

$$\begin{aligned}
N_x &= \cos u; \\
N_y &= -\sin u \sin(v + \omega t); \\
N_z &= -\sin u \cos(v + \omega t).
\end{aligned} \tag{9}$$

Як видно із (9), проекції вектора відрізняються від рівнянь (5) знаком і відсутністю радіуса  $R$ , оскільки вектор одиничний.

Остання сила – сила тертя  $\bar{fN}$  – спрямована в сторону, протилежну відносній швидкості  $\bar{V}$  руху частинки, тобто по дотичній до відносної траєкторії. Проекції одиничного вектора  $\bar{T}$ , вздовж якого спрямована швидкість частинки, визначається діленням складових швидкості (2) на її модуль (3) з наступним поворотом на кут  $\varphi = -\omega t$ .

$$\begin{aligned}
T_x &= \frac{u' \sin u}{\sqrt{u'^2 + v'^2 \sin^2 u}}; \\
T_y &= \frac{u' \cos u \sin(v + \omega t) + v' \sin u \cos(v + \omega t)}{\sqrt{u'^2 + v'^2 \sin^2 u}}; \\
T_z &= \frac{u' \cos u \cos(v + \omega t) - v' \sin u \sin(v + \omega t)}{\sqrt{u'^2 + v'^2 \sin^2 u}}.
\end{aligned} \tag{10}$$

Тепер можна записати диференціальні рівняння відносного руху частинки із врахуванням прикладених сил ваги (8), реакції поверхні  $\overline{N}$  і сили тертя  $f\overline{N}$ , напрям яких задається одиничними векторами (9) і (10). Векторне рівняння  $m\overline{w} = \overline{F}$  розпишемо в проекціях на осі координат, беручи до уваги, що проекції вектора абсолютного прискорення  $\overline{w}$  представлені виразами (7):

$$\begin{aligned}
 mx'' &= N \cos u - fN \frac{u' \sin u}{\sqrt{u'^2 + v'^2 \sin^2 u}}; \\
 my'' &= -N \sin u \sin(v + \omega t) - \\
 &- fN \frac{u' \cos u \sin(v + \omega t) + v' \sin u \cos(v + \omega t)}{\sqrt{u'^2 + v'^2 \sin^2 u}}; \\
 mz'' &= -mg - N \sin u \cos(v + \omega t) - \\
 &- fN \frac{u' \cos u \cos(v + \omega t) - v' \sin u \sin(v + \omega t)}{\sqrt{u'^2 + v'^2 \sin^2 u}}.
 \end{aligned} \tag{11}$$

Підставимо у (11) вирази других похідних із (7) і розв'яжемо систему (11) відносно других похідних невідомих функцій  $u=u(t)$  і  $v=v(t)$ , а також  $N=N(t)$ . Після спрощень отримаємо:

$$\begin{aligned}
 u'' &= -fu' \frac{R(v' + \omega)^2 \sin^2 u + Ru'^2 - g \sin u \cos(v + \omega t)}{R\sqrt{u'^2 + v'^2 \sin^2 u}} + \\
 &+ \cos u \left[ (v' + \omega)^2 \sin u - \frac{g}{R} \cos(v + \omega t) \right]; \\
 v'' &= -fv' \frac{R(v' + \omega)^2 \sin^2 u + Ru'^2 - g \sin u \cos(v + \omega t)}{R\sqrt{u'^2 + v'^2 \sin^2 u}} + \\
 &+ \frac{g \sin(v + \omega t)}{R \sin u} - \frac{2u'(v' + \omega) \cos u}{\sin u}; \\
 N &= m \left[ R(v' + \omega)^2 \sin^2 u + Ru'^2 - g \sin u \cos(v + \omega t) \right].
 \end{aligned} \tag{12}$$

Вирази (12) потрібно розглядати як систему двох перших рівнянь. Третє рівняння – реакція поверхні – стає відомим після розв'язання системи двох перших рівнянь. Її потрібно розв'язувати чисельними методами.

Початкові умови інтегрування вибираються виходячи із того, в якій точці леза частинка вступає на поверхню. Цю точку можна вибирати в межах глибини  $a$  занурення диска у ґрунт і вона задається початковими координатами  $u$  і  $v$ . При  $u = \arcsin(r/R)$  і

$v=\pi$  точка буде знаходитися в самому низу диска, тобто на глибині  $a$ . При  $u = \arcsin(r/R)$  і  $v = \pi - \arccos((r-a)/r)$  точка буде знаходитися в тому місці леза, де воно зустрічається із поверхнею поля. Вибираючи параметр  $v$  із зазначених меж, ми вибираємо точку на лезі на різній глибині занурення.

Початковим значенням перших похідних  $u'$  і  $v'$  визначається напрям вступу частинки на поверхню. При  $u = \arccos(r/R) - const$  і зміні незалежної змінної  $v$  на поверхні буде описане коло – периферія диска. Похідна  $v'$  означає кутову швидкість ковзання частинки в момент її вступу на лезо. Оскільки до вступу на диск частинка ґрунту є нерухомою, то по відношенню до диска, що обертається із кутовою швидкістю  $\omega = V_{az} \cos \alpha / r$ , приймаємо  $v' = -\omega$ . Якби диск обертався, а частинка залишалася на місці, то швидкість ковзання по лезу була б сталою, протилежною напрямку обертання диска і рівною  $v' = -\omega$ . Однак це відбувається тільки на момент вступу частинки на лезо, а далі частинка захоплюється поверхнею, рухається по ній і кутова швидкість ковзання зменшується. Похідна  $u'$  означає кутову швидкість руху частинки по поверхні вздовж координатної лінії (кута)  $u$ , тобто вздовж меридіана, який іде від точки леза до центру диска. Припустимо, що лінійна швидкість руху частинки по меридіану, яка визначається із виразу  $R \cdot u'$ , рівна поперечній складовій швидкості руху агрегату, тобто  $V_{az} \sin \alpha$ . Звідси знаходимо початкове значення  $u'$ :  $u' = V_{az} \sin \alpha / R$ .

Розглянемо приклад. Нехай агрегат рухається із швидкістю  $9 \text{ км/год} = 2,5 \text{ м/с}$ . Кут атаки  $\alpha = 20^\circ$ . Конструктивні параметри диска  $R = 0,5 \text{ м}$ ,  $r = 0,225 \text{ м}$ . Глибина обробітку  $a = 0,08 \text{ м}$ .

Із наведених залежностей знаходимо початкові умови інтегрування:  $u = 0,47 \text{ рад.}$ ;  $v = 2,27 \dots \pi \text{ рад.}$  (в залежності, на якій глибині частинка вступає на лезо диска);  $u' = 1,72 \text{ с}^{-1}$ ;  $v' = -\omega = -10,4 \text{ с}^{-1}$ . В результаті чисельного інтегрування системи (12) були побудовані відносні (за формулами (1)) і абсолютні (за формулами (5)) траєкторії руху частинки. Вони наведені на рис. 2,а з точки зору, напрям якого перпендикулярний площині леза. Суцільними лініями показано траєкторії абсолютного руху частинки, яка попадає на лезо на різній глибині, а штриховими – відносні траєкторії, тобто траєкторії ковзання частинки по диску. Нагадаємо, що в нас прийнято геометричну модель, згідно якої диск обертається навколо горизонтальної осі, але не рухається по полю. Натомість, на нього під кутом атаки  $\alpha$  подається частинка із заданою початковою швидкістю  $V_{az}$ , яка розкладається на дві складові: поздовжню і поперечну. Траєкторії ковзання (штрихові лінії) є нецікавими для



дослідження, а от абсолютні траєкторії (суцільні лінії) дають уявлення про рух частинки по відношенню до проекції диска, зокрема про висоту їх підйому.

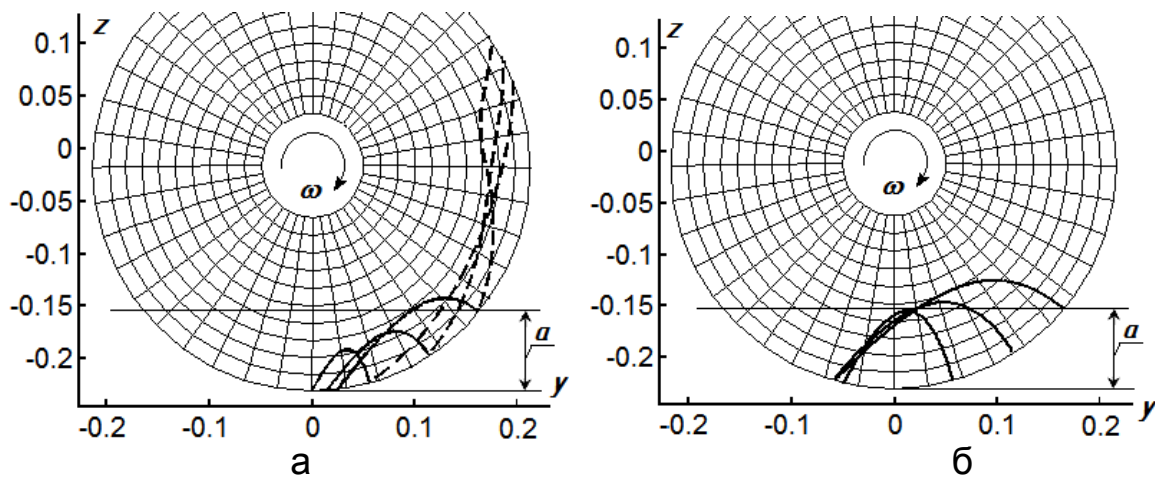


Рис. 2. Проекція диска і нанесені траєкторії руху частинки: а) абсолютні і відносні траєкторії при куті атаки  $\alpha=20^{\circ}$ ; б) абсолютні траєкторії при куті атаки  $\alpha=30^{\circ}$ .

На рис. 2,б побудовано абсолютні траєкторії руху частинок при попаданні їх на лезо диска на тих же самих глибинах занурення, що і в попередньому випадку, але уже при куті атаки, рівному  $30^{\circ}$ . Початкові умови інтегрування взято відповідними цьому куту при попередній швидкості руху агрегату:  $u'=2,5 \text{ c}^{-1}$ ;  $v'=-\omega=-9,6 \text{ c}^{-1}$ . Із рис. 2,б видно, що висота підйому частинок зростає і збільшується площа розсосередження частинок по поверхні диска.

На рис. 3,а побудовано графік зміни кутової швидкості ковзання частинки, яка попадає на лезо в точці його дотику із поверхнею поля при  $\alpha=30^{\circ}$  (найвища траєкторія на рис. 2,б). Від початкового значення  $v'=-\omega=-9,6 \text{ c}^{-1}$  величина кутової швидкості зменшується за рахунок тертя по поверхні, а потім починає зростати при русі частинки вниз. Тривалість такого руху до досягнення нижньої точки –  $0,26 \text{ с}$ . На рис. 3,б побудовано графік зміни абсолютної швидкості руху частинки. Початкове значення швидкості дорівнює поперечній складовій  $V_{az} \sin \alpha = 1,25 \text{ м/с}$ , яка в момент вступу на поверхню диска відповідає початковій кутовій швидкості  $u' = V_{az} \sin \alpha / R = 2,5 \text{ c}^{-1}$ . Після цього швидкість зменшується, що відповідає підйому частинки, а потім знову зростає. У всіх наведених прикладах коефіцієнт тертя частинки по поверхні диска прийнятий рівним  $f=0,3$ . Наведена модель руху частинки лише наближено описує реальний процес. В цій моделі прийнято, що подальший рух частинки після її вступу на поверхню відбувається за рахунок

кінетичної енергії, яку має частинка на момент вступу її на поверхню диска. Насправді ж існують сили підпору суміжних частинок, які примушують частинку рухатися по поверхні. Можна припустити, що сила підпору долає силу опору тертя, тобто ці сили врівноважені, і в такому випадку можна прийняти коефіцієнт тертя  $f$  рівним нулеві. Однак це може бути справедливим тільки на етапі підйому частинки, а на етапі опускання сила підпору може відігравати роль гальмівної сили, що суперечить реальному процесу.

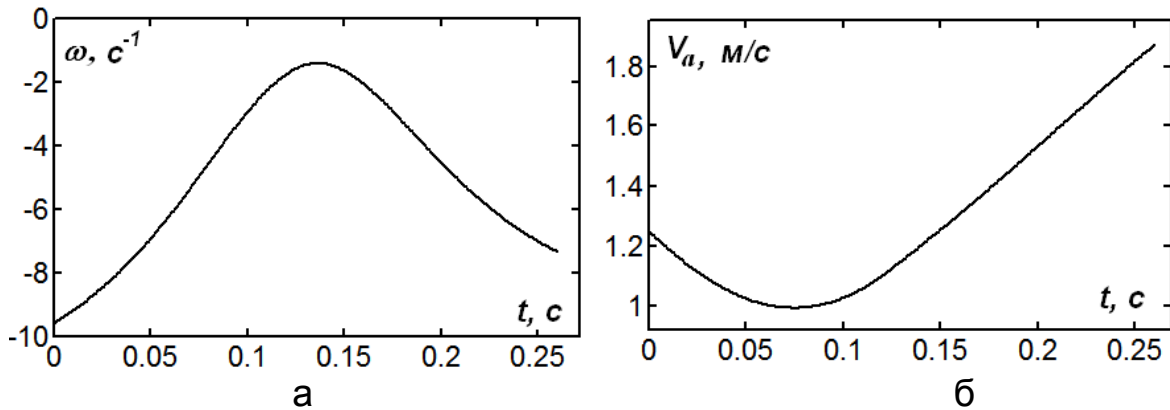


Рис. 3. Кінематичні характеристики руху частинки при  $\alpha=30^\circ$  і її попаданні на лезо в точці його дотику із поверхнею поля (найвища траєкторія на рис. 2,б): а) графік зміни кутової швидкості ковзання частинки; б) графік зміни абсолютної швидкості руху.

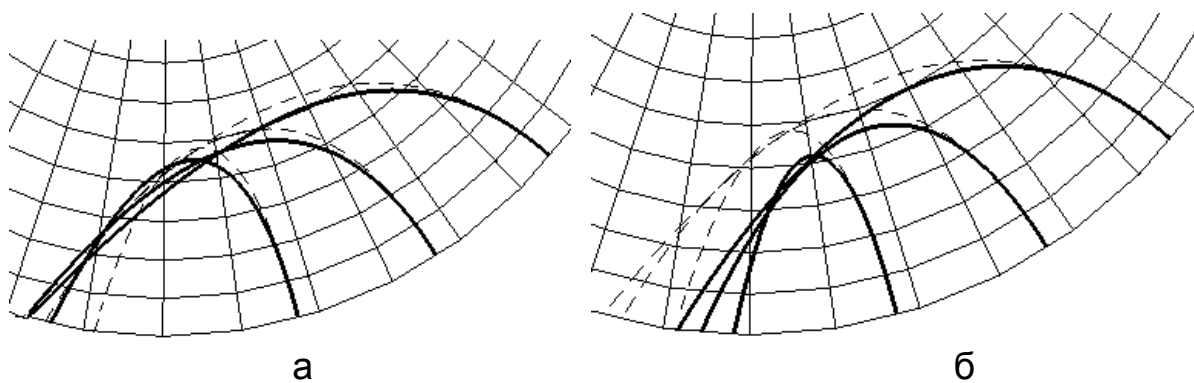


Рис. 4. Фрагменти диска з нанесеними абсолютними траєкторіями руху частинки при куті атаки  $\alpha=30^\circ$  і різними коефіцієнтами тертя (суцільна лінія при  $f=0,3$  і штрихова при  $f=0$ ): а) диск обертається із кутовою швидкістю  $\omega=9,6 \text{ c}^{-1}$ ; б) диск нерухомий ( $\omega=0$ ).

На рис. 4,а у збільшеному масштабі побудовані траєкторії абсолютного руху частинки для  $\alpha=30^\circ$  при  $f=0,3$  (суцільна потовщена лінія, ці ж траєкторії у зменшеному масштабі показано на рис. 2,б) і при  $f=0$  (тонка штрихова лінія). Аналізуючи ці траєкторії можна зробити висновок, що величина коефіцієнта тертя незначно впливає

на траєкторію абсолютного руху. Проте цього не можна сказати по відношенню до нерухомого диска, тобто при  $\omega=0$  (якого, наприклад, заклинило). На рис. 4,б побудовані абсолютні траєкторії при тих же значеннях параметрів, але для нерухомого диска.

Варто зазначити, що траєкторії, позначені штриховими лініями на рис. 4,а і 4,б, абсолютно однакові. Це означає, що за відсутності тертя, тобто для абсолютно гладенької поверхні диска, абсолютна траєкторія не залежить від величини кутової швидкості його обертання. Наявність сил тертя впливає на траєкторії руху частинки по нерухомому і рухомому дисках. Якщо на етапі підйому траєкторії для обох випадків майже збігаються, то при опусканні вони відрізняються. Це пояснюється тим, що сили тертя на рухомому диску зтягують частинку в напрямі його обертання.

**Висновок.** Побудовано математичну модель руху частинки ґрунту по дисковому робочому органу, який обертається навколо нерухомої горизонтальної осі. Рух диска під кутом атаки по відношенню до напрямку руху агрегату замінено подачею частинки на диск під таким же кутом. Це спростило процес складання диференціальних рівнянь руху. Результати чисельного розв'язку рівнянь показали, що при збільшенні кута атаки висота підйому частинок зростає і збільшується площа розсосередження їх по поверхні диска. Коефіцієнт тертя незначно впливає на траєкторію руху частинки. Однак якщо диск нерухомий, то він відіграє більш вагомую роль у формуванні траєкторії руху частинок.

### Список літератури

1. *Василенко П. М.* Теория движения частицы по шероховатым поверхностям сельскохозяйственных машин. Киев. УАСХН. 1960. 283 с.
2. *Заика П. М.* Избранные задачи земледельческой механики. Киев. УСХА. 1992. 507 с.
3. *Гячев Л. В.* Теория лемешно-отвальной поверхности. зерноград. 1961. 317 с.
4. *Войтюк Д. Г., Пилипака С. Ф.* До визначення траєкторій руху частинок ґрунту по циліндричних поверхнях робочих органів ґрунтообробних знарядь. Механізація сільськогосподарського виробництва. Київ. 1999. Т. 5. С. 242—251.
5. *Сысоев Н. И.* Теоретические основы и расчет сортировки “Змейка”. Сельхозмашина. № 8. 1949. С. 5—8.
6. *Войтюк Д. Г., Пилипака С. Ф.* Знаходження траєкторії руху матеріальної частинки по гравітаційних лінійчатих поверхнях із горизонтальними твірними. Механізація сільськогосподарського виробництва. Київ. 2002. Т. 12. С. 58—69.
7. *Войтюк Д. Г., Пилипака С. Ф.* Знаходження траєкторії руху матеріальної точки по гравітаційній розгортній поверхні на прикладі розгортного гелікоїда. Механізація і енергетика сільського господарства. IV Міжнародна науково-технічна конференція MOTROL-2003. Київ. НАУ. 2003. Т. 6. С. 113—126.
8. *Войтюк Д. Г., Пилипака С. Ф.* Особливості руху матеріальної частинки по гравітаційних лінійчатих поверхнях. Вісник Харківського державного технічного університету сільського господарства. Харків. 2003. Вип. 21. С. 75—88.

9. Клендій М. Б., Пилипака С. Ф. Аналітична модель установки ґрунтообробних сферичних дисків для визначення геометричних та технологічних характеристик. Науковий вісник Національного університету біоресурсів і природокористування України. Київ. 2016. Вип. 241. С. 140—150.

## References

1. Vasilenko P. M. (1960). Teoriya dvigeniya chastici po sherohovatim poverhnostyam selskohozyaistvennih mashin [The theory of traffic of a corpuscle on rough surfaces of agricultural machiner]. Kiev. UASHN. 283.
2. Zaika P. M. (1992). Izbrannye zadachi zemlede-lcheskoj mehaniki [The selected problems of agricultural mechanics]. Kiev. USHA. 507.
3. Gyachev L. V. (1961). Teoriya lemeshno-otvalnoj poverhnosti [The theory of share-moldboard surface]. Zernograd. 317.
4. Vojtyuk D. G., Pilipaka S. F. (1999). Do viznachennya traektorij ruhu chastinok ґрунту po cilindrichnih poverhnyah robochih organiv ґрунтообробnih znaryad [To determining the trajectory of soil particles at the surfaces of the working bodies of tillers]. Modern problems of agricultural mechanization. National Agrarian University. 5. 242-251.
5. Sysoev N. I. (1949). Teoreticheskie osnovy i raschet sortirovki "Zmejka" [Theoretical basis and calculation sorting "Snake"]. A farm machine. 8. 5-8.
6. Vojtyuk D. G. Pilipaka S. F. (2002). Znahodzhennja traektorii ruhu materialnoi chastinki po gravitacijnih linijchatih poverhnjah iz gorizontalnimi tvirnimi [Finding the trajectory of motion of material particle in gravitational ruled surfaces with a horizontal forming]. Mechanization of agricultural production. 12. 58-69.
7. Vojtyuk D. G. Pilipaka S. F. (2003). Znahodzhennja traektorii ruhu materialnoi tochki po gravitacijnij rozgortnij poverhni na prikladi rozgortnogo gelikoida [Finding the trajectory of motion of material particles on a gravitational surface on the example of the helix]. MOTROL. 6. 113-126.
8. Vojtyuk D. G. Pilipaka S. F. (2003). Osoblivosti ruhu materialnoi chastinki po gravitacijnih linijchaih poverhnjah [Features of the motion of material particle in gravitational ruled surfaces]. The mechanization of agriculture. Kharkiv State Technical University of Agriculture. 21. 75-88.
9. Klendij M. B., Pilipaka S. F. (2016). Anality`chna model` ustanovky` ґрунтообробny`x sfery`chny`x dy`skiv dlya vy`znachennya geometry`chny`x ta texnologichny`x xaraktery`sty`k [The analytical model settings tillage spherical disks to determine the geometrical and technological characteristics]. Naukovy`j visny`k Nacional`nogo univerty`tetu bioresursiv i pry`rodokory`stuvannya Ukrayiny. Kiev. 241. 140-150.

## ДВИЖЕНИЕ ЧАСТИЦЫ ПО ПОВЕРХНОСТИ СФЕРИЧЕСКОГО ПОЧВООБРАБАТЫВАЮЩЕГО ДИСКА

*С. Ф. Пилипака, Н. Б. Клендий*

**Аннотация.** *Рассмотрено относительное движение частицы по внутренней шероховатой поверхности сферического почвообрабатывающего диска, совершающего вращательное движение вокруг оси под действием сил реакции почвы. Лезвие диска расположено у вертикальной плоскости, которая образует с направлением движения агрегата угол атаки. Этот угол имеет*

допустимую границу, превышение которой может повлечь волочение диска. В работе принято допущение, что волочение отсутствует, угловая скорость вращения диска является постоянной и зависит от постоянной скорости движения агрегата и угла атаки. При работе агрегата частицы почвы попадают на внутреннюю поверхность диска и совершают по нему относительное движение, которое определяет траекторию скольжения частицы по поверхности диска. Абсолютная траектория движения частицы по отношению к неподвижной системе координат дает представление о высоте подъема частицы после вступления ее на поверхность диска.

Составлено дифференциальные уравнения движения частицы, которые решены численными способами. Частица попадает на диск с заданными начальными условиями, которыми являются направление вступления на диск и ее начальная скорость. Рассмотрено две модели движения частицы по диску. Согласно одной модели принято, что дальнейшее движение частицы после ее вступления на поверхность осуществляется за счет кинетической энергии, которую имеет частица на момент ее вступления на поверхность диска. Согласно другой модели учитывается сила подпора других частиц, которая преодолевает силу трения частицы по поверхности.

Дифференциальные уравнения движения частицы составлены в проекциях на оси неподвижной пространственной системы координат. Таким образом, в систему входят три дифференциальных уравнения с тремя неизвестными функциями. Одной из разыскиваемых функций является сила реакции поверхности и зависимости, которые описывают относительное движение частицы по поверхности диска.

**Ключевые слова:** *почвообрабатывающий диск, вращательное движение, относительное движение частицы, дифференциальные уравнения движения*

## **MOVEMENT OF PARTICLES ON SURFACE TILLAGE SPHERICAL DISK** **S. F. Pilipaka, M. B. Klendiy**

**Abstract.** *Considered relative movement of the particles along the inner spherical surface roughness tilling disc performs rotational movement around the axis under the action of soil reaction. A blade disc arranged in a vertical plane which forms with the direction of movement of the unit angle of attack. This angle is allowable limit, above which drawing the disc may result. The paper made the assumption that there is no drawing, the angular velocity of rotation of the disk is constant, and the constant velocity will overestimate the unit movement and the angle*

of attack. When the unit of soil particles fall on the inner surface of the disc and make it by the relative motion, which defines the trajectory of particle slip on the surface of the disc. The absolute path of motion of a particle with respect to a fixed coordinate system, gives an idea of the height of the particle recovery after its entry onto the disc surface.

Differential equations of motion of the particle, which solved by numerical methods. The particle lands on a disk with the given initial conditions, which are the direction of the entry on the disc and its initial velocity. We consider two models of particle motion on disc. According to one model, it is assumed that the further movement of the particle after its entry to the surface at the expense of kinetic energy, which has a particle at the time of its entry onto the disc surface. According to another model takes into account other particles pressurization force that overcomes the frictional force on the particle surface.

Differential equations of motion of a particle composed in projections on the axis of the fixed spatial coordinate system. Thus, the system is composed of three differential equations with three unknown functions. One of the functions is wanted surface reaction force and depending which describe relative motion particles on the disk surface.

**Key words:** *cultivating drive, rotational movement, relative motion of particle, differential equations of motion*

УДК 621.87

**АНАЛІЗ ТА СИНТЕЗ ОПТИМАЛЬНИХ РЕЖИМІВ РУХУ  
ВАНТАЖОПІДЙОМНИХ МАШИН, ЯКІ МІНІМІЗУЮТЬ ДИНАМІЧНІ  
НАВАНТАЖЕННЯ У ПРУЖНИХ ЕЛЕМЕНТАХ (КАНАТАХ)**

***І. М. Сівак, Ю. В. Човнюк, кандидати технічних наук  
Національний університет біоресурсів і  
природокористування України  
М. Г. Діктерук, кандидат технічних наук  
Київський національний університет  
будівництва і архітектури  
e-mail: sivakim@ukr.net***

**Анотація.** Розглянуто вплив різних режимів руху приводного механізму вантажопідйомних машин (кранів), які мінімізують динамічні навантаження у їх пружних елементах (канатах). Використана двома сова модель. У якості критерію оптимізації

© І. М. Сівак, Ю. В. Човнюк, М. Г. Діктерук, 2017