УДК 681.5.07

ОЦІНКА ОБЛАСТІ СТІЙКОСТІ ПАРАМЕТРИЧНИХ СИСТЕМ ЗА НАЯВНОСТІ КРАЙОВИХ УМОВ ІНТЕГРАЛЬНОЇ ФОРМИ

Л. А. ПАНТАЛІЄНКО, кандидат фізико-математичних наук, доцент
Національний університет біоресурсів і природокористування України
E-mail: nubip.ea@gmail.com

Анотація. *Розглянуто загальні постановки задач практичної стійкості нелінійних параметричних систем звичайних диференціальних рівнянь за наявності крайових умов, що стосуються задач проектування лінійних резонансних прискорювачів. У рамках сформульованих задач досліджено лінійну неоднорідну систему зі збуреннями та крайовими умовами інтегральної форми. Одержано необхідні й достатні умови перевірки відповідних якостей стійкості з областю початкових умов еліпсоїдального вигляду шляхом подання загального розв'язку системи у формі Коші та розв'язання екстремальної задачі. Розроблено алгоритми чисельної побудови областей стійкості за наявності відомих та обмежених за нормою збурень, лінійних і нелінійних динамічних обмежень на фазові координати. При цьому у випадку нелінійних обмежень на вектор станів здійснено попередню апроксимацію замкненої опуклої множини, що містить нульову точку, дотичними гіперплощинами. Як окремий випадок наведені оцінки застосованих для розрахунку областей стійкості однорідних систем диференціальних рівнянь, залежних від параметрів, за наявності крайових умов інтегрального вигляду.*

Ключові слова: ***параметрична система, крайові умови, стійкість, збурення, норма, оператор, фундаментальна матриця***

Актуальність. Для аналізу стійкості та пов'язаних з цим прикладних задач істотно з'ясувати питання про можливі межі змінювання початкових і подальших відхилень для реальної динамічної системи та встановити величину допустимого інтервалу її функціонування. Крім того, важливо визначити й можливі екстремальні збурення динамічної системи на реальних режимах. У зв'язку з постановками такого роду задач динаміку системи розглядають на скінченному проміжку часу, а початкові умови та фазові обмеження задають у конкретному вигляді [1–3]. Зазначені особливості стосуються задач практичної (технічної) стійкості та їх прикладань, зв'язаних з проектуванням складних систем, з їх керуванням, адаптацією та чутливістю [1,2].

На відміну від класичних методів [4], аналіз параметричних систем з позицій практичної стійкості дозволяє значно розширити коло досліджуваних задач та розв'язувати їх чисельно. Зокрема, поширені за проектування реальних систем задачі чутливості (розрахунку допусків на параметри, обмеженої та гарантованої чутливості) [4] охоплюються постановками практичної стійкості параметричних систем у відповідному просторі функцій [2,3].

У роботі, на підставі методів практичної стійкості [2,3], досліджуються параметричні системи звичайних диференціальних рівнянь за наявності крайових умов [1]. У рамках сформульованих задач одержано оптимальні оцінки області початкових умов у заданих структурах для лінійних неоднорідних систем зі збуреннями та крайовими умовами інтегрального вигляду. Окремо розглядаються випадки лінійних і нелінійних обмежень на вектор станів у динаміці за наявності відомих або обмежених за нормою постійно діючих збурень.

Аналіз останніх досліджень та публікацій. Необхідність розгляду задач, пов'язаних з аналізом стійкості визначається підвищеними вимогами щодо проектування систем і безпосередньо стосується її працездатності в реальних умовах експлуатації [1,4]. З точки зору прикладань, зокрема, у крайових задачах, задачах оптимізації лінійних резонансних прискорювачів основна увага приділяється методам практичної стійкості, що мають алгоритмічну спрямованість [1,2]. Так, у багатьох задачах прикладного характеру необхідно забезпечити стійкість системи за наявності крайових умов різного типу. Часто потрібно дослідити на стійкість систему за фіксованих координат у деякі моменти часу на інтервалах функціонування об'єкту. Наприклад, така ситуація виникає за чисельного розрахунку областей захоплення частинок у процес прискорення за радіальними координатами у несиметричних випадках. Тоді в початковий момент проекції швидкостей на осі OX, OY вважають нульовими. Крайові умови інтегральної форми фігурують у задачах оптимізації поздовжнього руху, за якими задають різницю потенціалів у зазорі як інтеграл від амплітуди напруги прискорювального поля.

Мета досліджень — розробка чисельних методів розв'язання задач практичної стійкості для параметричних систем диференціальних рівнянь за наявності крайових умов.

Матеріали і методи досліджень. У роботі застосовуються методи теорії стійкості, диференціальних рівнянь та алгоритми оптимізації.

Дослідимо на стійкість незбурений розв'язок $x(t,0)\equiv 0$ системи

$$\frac{dx}{dt} = f(x,t,\alpha), \quad f(0,t,0)\equiv 0, \quad t\in [t_0,T] \tag{1}$$

за додаткових умов:

$$Qx(t,\alpha) = q, \tag{2}$$

де $x = x(t,\alpha)$, α – вектори фазових координат і параметрів вимірності n, m відповідно;

$f(x,t,\alpha) - n$ − вимірна вектор-функція, яка відповідає умовам існування та єдиності розв'язку для будь-яких $\alpha \in G_\alpha$;

Q − деякий оператор, що визначає початкові умови для системи (1);

q − n − вимірний сталий вектор.

Розглянемо випадок, коли співвідношення (2) інтегрального вигляду:

$$\int_{t_0}^{T} Q(t)\, x(t)\, dt = q \ , \tag{3}$$

а система (1) з додатковими умовами (3) має єдиний розв'язок для будь-яких $\alpha \in G_\alpha$.

Означення. Розв'язок $x(t,0) \equiv 0$ системи (1) назвемо $(c; B, G_0^\alpha, \Phi_t, t_0, T)$ – стійким за правою частиною додаткових умов (2), якщо $x(t,\alpha) \in \Phi_t$, $t \in [t_0,T]$ для усіх векторів, що задовольняють співвідношенню $q \in \{q : q * Bq < c^2\}$, та довільних $\alpha \in G_0^\alpha \subset G_\alpha$.

У рамках сформульованих задач розглянемо лінійну неоднорідну систему

диференціальних рівнянь зі збуреннями вигляду:

$$\frac{dx}{dt} = A(t)x + G(t)\alpha + f(t),\ t \in [t_0, T]. \tag{4}$$

Для чисельного оцінювання множини додаткових умов $G_q = \{q : q * Bq < c^2\}$, якщо $G_0^\alpha = \{\alpha : \alpha^* B_\alpha \alpha \le c_\alpha^2\}$, конкретизуємо фазові обмеження Φ_t, $t \in [t_0,T]$:

$$\Phi_t = \Gamma_t = \{x : |l_s^*(t)\, x| \le 1, s = 1,2,...N\},\ t \in [t_0,T], \tag{5}$$

$$\Phi_t = \Psi_t = \{x : \psi(x,t) \le 1\},\ t \in [t_0,T], \tag{6}$$

де $l_s(t)$, $s = 1,2,...,N$ — задані неперервні вектор-функції вимірності n;

$\psi(x,t)$ — скалярна функція, неперервна за t разом зі своїми частинними похідними за компонентами вектора x;

Ψ_t, − замкнена опукла множина для будь-якого t, що містить нульову точку.

З урахуванням (5), (6) і структуризації множин G_q, G_0^α, розв'язок $x(t,0) = 0$ системи (4) у розумінні означення стійкості будемо називати $(c; B, c_\alpha, B_\alpha, \Gamma_t, t_0, T)$ — і $(c; B, c_\alpha, B_\alpha, \Psi_t, t_0, T)$ — стійким відповідно.

Критерій 1. Для того, щоб система (4) була $(c; B, c_\alpha, B_\alpha, \Gamma_t, t_0, T)$ − стійкими за наявності (3) та відомих збурень, необхідно та достатньо, щоб виконувалась нерівність:

$$c^2 \le \min_{t \in [t_0,T]} \min_{s=1,2,...N} \min_{\alpha \in \{\alpha : \alpha^* B_\alpha \alpha < c_\alpha^2\}} \frac{\left(1 - |l_s^*(t)\, \tilde{a}(t)|\right)^2}{l_s^*(t)\, X(t,t_0)\, R^{-1} B^{-1} R^{-1^*} X^*(t,t_0)\, l_s(t)},$$

$$|l_s^*(t)\, \tilde{a}(t)| < 1\ ,\ t \in [t_0,T],\ s = 1,2,...N,\ \alpha \in \{\alpha : \alpha^* B_\alpha \alpha \le c_\alpha^2\}. \tag{7}$$

Тут $\tilde{a}(t) = G_1(t)\alpha + a(t) - X(t,t_0)R^{-1}a_1$; $G_1(t) = \int_{t_0}^{t} X(t,\tau)G(\tau)d\tau$; $a(t) = \int_{t_0}^{t} X(t,\tau)f(\tau)d\tau$;

$R = \int_{t_0}^{T} Q(t)X(t,t_0)dt$; $a_1 = \int_{t_0}^{T} Q(t)(G_1(t)\alpha + a(t))dt$; $X(t,t_0)$ – нормована фундаментальна матриця розв'язків однорідної системи (4) за $\alpha = 0$:

$$\frac{dX(t,t_0)}{dt} = A(t)X(t,t_0),\ X(t_0,t_0) = E.$$

Для доведення співвідношення (7) запишемо загальний розв'язок системи (4) у формі Коші:

$$x(t,\alpha) = X(t,t_0)x(t_0,\alpha) + G_1(t)\alpha + a(t) = X(t,t_0)R^{-1}(q - a_1) + G_1(t)\alpha + a(t). \tag{8}$$

З урахуванням обмежень (5) параметр c еліпса додаткових умов G_q потрібно вибирати за умовою виконання нерівностей:

$$-1 - l_s^*(t)\tilde{a}(t) \le l_s^*(t)X(t,t_0)R^{-1}q \le 1 - l_s^*(t)\tilde{a}(t), s = 1,2,...,N .$$

Позначивши через $p_s^*(t) = l_s^*(t)X(t,t_0)R^{-1}$ та визначаючи екстремуми лінійної форми $p_s^*(t)q,\quad s = 1,2,...,N$ на заданій структурі еліпсоїда, приходимо до критерію стійкості (7).

Критерій 2. Для того, щоб системи (4) були $c;B,c_\alpha,B_\alpha,\Psi_t,t_0,T$ − стійкими за наявності (3) за відомих збурень, необхідно та достатньо, щоб справджувалось співвідношення:

$$c^2 \le \min_{t\in[t_0,T]} \min_{\bar{x}\in\Psi_t'} \min_{\alpha\in G_0^\alpha} \frac{[g^*(\bar{x},t)(\bar{x} - \tilde{a}(t))]^2}{g^*(\bar{x},t)X(t,t_0)R^{-1}B^{-1}R^{-1*}X^*(t,t_0)g(\bar{x},t)},$$

$$g^*(\bar{x},t)(\bar{x} - \tilde{a}(t)) > 0,\ \bar{x} \in \Psi_t',\quad t \in [t_0,T]. \tag{9}$$

Тут $g^*(x,t) = grad_x^*\psi(\bar{x},t)$, Ψ_t' − межа замкненої опуклої множини Ψ_t, $t \in [t_0,T]$.

Доведення (9) здійснюється шляхом подання загального розв'язку у формі Коші (8) за умовою виконання нерівності:

$$g^*(\bar{x},t)X(t,t_0)R^{-1}q \le g^*(\bar{x},t)(\bar{x} - \tilde{a}(t)).$$

Позначаючи через $p_s^*(t) = g^*(\bar{x},t)X(t,t_0)R^{-1}$, дістанемо оцінку (9), що є розв'язком аналогічної до (7) екстремальної задачі.

Припустимо тепер, що збурення $f(t)$ невідомі, але обмежені за нормою:

$$\|f(\cdot)\| \le \left(\int_{t_0}^{T} \left(\sum_{i=1}^{n} |f_i(\tau)|^q \right)^{\frac{q_1}{q}} d\tau \right)^{\frac{1}{q_1}} \le \bar{R},\ 1 \le q \le \infty,\ 1 \le q_1 < \infty. \tag{10}$$

Критерій 3. Для того, щоб системи (4) були $c;B,c_\alpha,B_\alpha,\Gamma_t,t_0,T$ − або $c;B,c_\alpha,B_\alpha,\Psi_t,t_0,T$ − стійкими за додатковими умовами (3) та наявності збурень (10), необхідно та достатньо, щоб виконувалась відповідно нерівність:

$$c^2 \le \min_{t\in[t_0,T]} \min_{s=1,2,\ldots N} \min_{\alpha\in\{\alpha:\alpha^* B_\alpha \alpha < c_\alpha^2\}} \frac{\left(1-\left|l_s^*(t)\left(G_1(t)\alpha - X(t,t_0)R^{-1}Q_T G_1(T)\alpha\right)\right| - a_s(t)\right)^2}{l_s^*(t)X(t,t_0)R^{-1}B^{-1}R^{-1^*}X^*(t,t_0)l_s(t)},$$

$$a_s(t) < 1 - \left|l_s^*(t)\left(G_1(t)\alpha - X(t,t_0)R^{-1}Q_T G_1(T)\alpha\right)\right|, \quad t\in[t_0,T],$$

$$s=1,2,\ldots N, \ \alpha \in \{\alpha:\alpha^* B_\alpha \alpha \le c_\alpha^2\}; \qquad (11)$$

або

$$c^2 \le \min_{t\in[t_0,T]} \min_{\bar{x}\in\Psi_t'} \min_{\alpha\in G_0^\alpha} \frac{[g^*(\bar{x},t)(\bar{x}-G_1(t)\alpha + X(t,t_0)R^{-1}Q_T G_1(T)\alpha) - a_{\bar{x}}(t)]^2}{g^*(\bar{x},t)X(t,t_0)R^{-1}B^{-1}R^{-1*}X^*(t,t_0)g(\bar{x},t)},$$

$$g^*(\bar{x},t)(\bar{x} - G_1(t)\alpha + X(t,t_0)R^{-1}Q_T G_1(T)\alpha) > a_{\bar{x}}(t), \ \bar{x}\in\Psi_t', \quad t\in[t_0,T], \qquad (12)$$

де $a_s(t) = \max\limits_{\|f(t)\|\le \bar{R}} \left| l_s^*(t)\left(\int_{t_0}^{t} X(t,\tau)f(\tau)d\tau - X(t,t_0)R^{-1}Q_T\int_{t_0}^{T} X(T,\tau)f(\tau)d\tau\right)\right|,$

$$a_{\bar{x}}(t) = \max_{\|f(t)\|\le \bar{R}} \left| g^*(\bar{x},t)\left(\int_{t_0}^{t} X(t,\tau)f(\tau)d\tau - X(t,t_0)R^{-1}Q_T\int_{t_0}^{T} X(T,\tau)f(\tau)d\tau\right)\right|.$$

Оцінки (7), (9), (11), (12) можна застосовувати для окремого типу лінійної параметричної системи без збурень:

$$\frac{dx}{dt} = A(t)x + G(t)\alpha, \ t\in[t_0,T],$$

поклавши у відповідних формулах $f(t)=0$.

У випадку нелінійної параметричної системи (1) необхідно провести попередньо її лінеаризацію в околі розрахункового руху.

Результати дослідження та їх обговорення. Для лінійних параметричних систем диференціальних рівнянь за наявності збурень і крайових умов інтегральної форми здійснено чисельний розрахунок області стійкості у заданих структурах.

Висновки і перспективи подальших досліджень. Сформульовано постановки задач практичної стійкості параметричних систем звичайних диференціальних рівнянь за наявності крайових умов. Для лінійних неоднорідних систем зі збуреннями та крайовими умовами інтегральної форми одержано оптимальні оцінки областей початкових умов у заданих структурах.

Список використаних джерел

1. Бублик, Б. Н. Структурно-параметрическая оптимизация и устойчивость динамики пучков / Б. Н. Бублик, Ф. Г. Гаращенко, Н. Ф. Кириченко. – К.: Наук. думка, 1985. – 304 с.

2. Гаращенко, Ф. Г. Аналіз та оцінка параметричних систем: навч. посібник / Ф. Г. Гаращенко, Л. А. Панталієнко. – К.:ІСДО, 1995. – 140 с.

3. Панталієнко, Л. А. Розрахунок областей параметричної стійкості за наявності постійно діючих збурень / Л. А. Панталієнко // Науковий вісник НУБіП України. Серія «Техніка та енергетика АПК». – 2010. – Вип. 150. – С. 126−131.

4. Розенвассер, Е. Н. Чувствительность систем управления / Е. Н. Розенвассер, Р.М. Юсупов.– М.: Наука , 1981. – 464 с.

References

1. Bublyk, B. N., Harashchenko, F. H., Kyrychenko, N. F. (1985). Strukturno-parametrycheskaia optymyzatsyia y ustoichyvost dynamyky puchkov [Structural-parametric optimization and stability of beam dynamics]. Kyiv, Ukraine: Scientific thought, 304.

2. Harashchenko, F. H., Pantalienko, L. A. (1995). Analiz ta otsinka parametrychnykh system: Navch. posibnyk [Analysis and evaluation of parametric systems: Teach. Manual]. Kyiv, Ukraine: , 140. / F.H. Harashchenko, L.A. Pantalienko. – K.:ISSE, 1995. – 140 s.

3. Pantaliienko, L. A. (2010). Rozrakhunok oblastei parametrychnoi stiikosti za naiavnosti postiino diiuchykh zburen [The calculation of areas parametric stability at presence permanent perturbations]. Scientific Journal NUBaN Ukraine. A series of «Technology and Energy AIC», 150, 126−131.

4. Rozenvasser, E. N., Yusupov, R. M. (1981). Chuvstvytelnost system upravlenyia [Sensitivity control systems]. Moscow, Russia: Science, 464.

ОЦЕНКА ОБЛАСТИ УСТОЙЧИВОСТИ ПАРАМЕТРИЧЕСКИХ СИСТЕМ ПРИ КРАЕВЫХ УСЛОВИЯХ ИНТЕГРАЛЬНОЙ ФОРМЫ

Л. А. Панталиенко

Аннотация. *Рассмотрены общие постановки задач практической устойчивости нелинейных параметрических систем обыкновенных дифференциальных уравнений при наличии краевых условий, касающих-ся задач проектирования линейных резонансных ускорителей. В рамках сформулированных задач исследована линейная неоднородная система с возмущениями и краевыми условиями интегральной формы. Получены необходимые и достаточные условия проверки соответствующих качеств устойчивости с областью начальных условий эллипсоидаль-ного вида путем представления общего решения системы в форме Коши и решения экстремальной задачи. Разработаны алгоритмы численного построения областей устойчивости при наличии извест-ных и ограниченных по норме возмущений, линейных и нелинейных динамических ограничений на фазовые координаты. При этом в случае нелинейных ограничений на вектор состояний осуществлена предварительная аппроксимация замкнутого выпуклого множества, которое содержит нулевую точку, касательными гиперплоскостями. Как частный случай приведенные оценки применены для расчета областей устойчивости однородных систем дифференциальных уравнений, зависящих от параметров, при наличии краевых условий интегрального вида.*

Ключевые слова: ***параметрическая система, краевые условия, устойчивость, возмущения, норма, оператор, фундаментальная матрица***

ASSESSMENT OF THE STABILITY REGION OF PARAMETRIC SYSTEMS WITH BOUNDARY CONDITIONS OF THE INTEGRAL FORM

L. A. Pantalienko

Abstract. *The general formulation of the problems of practical stability of nonlinear parametric systems of ordinary differential equations with boundary conditions relating to the problems of designing of linear resonance accelerators. Within the framework of formulated tasks investigated the inhomogeneous linear system by perturbations and boundary conditions of the integral form. We obtain necessary and sufficient conditions for checking of appropriate quality of stability with the area of the initial conditions of the ellipsoidal type by submitting of general solution of system in the form of the Cauchy and solutions of extreme tasks. The algorithms of numerical construction of the regions of stability under known and limited by the perturbations normal, linear and nonlinear dynamical constraints on the phase coordinates. In the case of nonlinear constraints on the state vector it carried out a preliminary approximation of the closed convex set that contains the zero point, the tangent hyperplanes. As a special case the above estimates are applied to calculate the areas of stability of homogeneous systems of differential equations depending on a parameter, with the boundary conditions of an integral type.*

Keywords: ***parametric system, boundary conditions, stability, perturbations, norm, operator, fundamental Matrix***

УДК 51-72

МАТЕМАТИЧНЕ МОДЕЛЮВАННЯ ДЕФОРМАЦІЇ ГРАНИЦІ В'ЯЗКОГО ТІЛА МЕТОДОМ ГІДРОДИНАМІЧНИХ ПОТЕНЦІАЛІВ

О. П. ЗІНЬКЕВИЧ, кандидат фізико-математичних наук, доцент
Національний університет харчових технологій
О. М. НЕЩАДИМ, кандидат фізико-математичних наук, доцент
Національний університет біоресурсів і природокористування України
В. М. САФОНОВ, кандидат фізико-математичних наук, доцент
Національний університет харчових технологій
E-mail: oleksandr_neshchadym@mail.ru

Анотація. *У теорії потенціалу будуються інтегральні представлення розв'язку через довільні функції точок контуру області шляхом підстановки цих функцій у формули Гріна замість контурних значень рішень та їх частинних похідних. Умови на границі області призводять до, так званих, граничних інтегральних рівнянь* [4] *.*

У задачах руху в'язкої рідини виокремлюється практично важливий клас задач наперед невідомою (вільною границею), яка визначається в