

L. A. Pantalienko

Abstract. *The general formulation of the problems of practical stability of nonlinear parametric systems of ordinary differential equations with boundary conditions relating to the problems of designing of linear resonance accelerators. Within the framework of formulated tasks investigated the inhomogeneous linear system by perturbations and boundary conditions of the integral form. We obtain necessary and sufficient conditions for checking of appropriate quality of stability with the area of the initial conditions of the ellipsoidal type by submitting of general solution of system in the form of the Cauchy and solutions of extreme tasks. The algorithms of numerical construction of the regions of stability under known and limited by the perturbations normal, linear and nonlinear dynamical constraints on the phase coordinates. In the case of nonlinear constraints on the state vector it carried out a preliminary approximation of the closed convex set that contains the zero point, the tangent hyperplanes. As a special case the above estimates are applied to calculate the areas of stability of homogeneous systems of differential equations depending on a parameter, with the boundary conditions of an integral type.*

Keywords: *parametric system, boundary conditions, stability, perturbations, norm, operator, fundamental Matrix*

УДК 51-72

МАТЕМАТИЧНЕ МОДЕЛЮВАННЯ ДЕФОРМАЦІЇ ГРАНИЦІ В'ЯЗКОГО ТІЛА МЕТОДОМ ГІДРОДИНАМІЧНИХ ПОТЕНЦІАЛІВ

О. П. ЗІНЬКЕВИЧ, кандидат фізико-математичних наук, доцент
Національний університет харчових технологій

О. М. НЕЩАДИМ, кандидат фізико-математичних наук, доцент
*Національний університет біоресурсів
і природокористування України*

В. М. САФОНОВ, кандидат фізико-математичних наук, доцент
Національний університет харчових технологій
E-mail: oleksandr_neshchadym@mail.ru

Анотація. *У теорії потенціалу будуються інтегральні представлення розв'язку через довільні функції точок контуру області шляхом підстановки цих функцій у формули Гріна замість контурних значень рішень та їх частинних похідних. Умови на границі області призводять до, так званих, граничних інтегральних рівнянь 4 .*

У задачах руху в'язкої рідини виокремлюється практично важливий клас задач наперед невідомою (вільною границею), яка визначається в

процесі самого розв'язання. Одним із можливих підходів до розв'язання даного класу задач гідродинаміки є метод гідродинамічних потенціалів, який переключає основні складності досліджень і числових розрахунків на деякі граничні інтегральні рівняння, які відносяться лише до границі області і враховують граничні умови безпосередньо. Дане перетворення надає можливість відразу визначити невідомі величини на границі, не обчислюючи їх у всій області. Це вигідно відрізняє метод граничних інтегральних рівнянь від інших методів (метод встановлення, кінцево-різницеві методи тощо).

У статті поставлена і розв'язана задача деформації в'язкого тіла під дією сил поверхневого натягу. Будуються граничні інтегральні рівняння, які розглядаються в сукупності з кінематичною контурною умовою. Запропоновано метод кроків за часом для чисельного аналізу деформації рідкого в'язкого тіла під дією сил поверхневого натягу.

Ключові слова: *гідродинамічні потенціали, кінематична контурна умова, сили поверхневого натягу, інтегральне представлення, інтегральне рівняння*

Актуальність. Рівняння Нав'є-Стокса мають ряд специфічних особливостей, які проявляються в чисельній реалізації незалежно про форми їх запису. В першу чергу, це просторово-еліптичний характер рівнянь, обумовлений впливом в'язкості у всьому полі течії. Звідси – пояснення парадоксу, який полягає в тому, що знаходження розв'язку стаціонарної задачі часто виявляється складнішим нестаціонарної. Більш того, за чисельного аналізу стаціонарного руху рідини часто використовується метод встановлення, за якого стаціонарний рух є границею нестаціонарних течій за $t \rightarrow \infty$. Правда, при цьому необхідна впевненість в тому (не завжди очевидний факт), що нестаціонарне рух дійсно переходить в шукане стаціонарне 2 .

Поряд з методом встановлення поширені також кінцево-різницеві методи. Але заміна похідних кінцевими різницями, без аналізу та врахування властивостей аналітичності рішення конкретного класу задач, не завжди дозволяє на основі чисельних розрахунків зробити якісний аналіз отриманих гідродинамічних величин 1 .

Аналіз останніх досліджень та публікацій. Розв'язання крайових задач для рівнянь Нав'є-Стокса за допомогою гідродинамічних потенціалів вивчалися різними авторами 5,6 . Подальший розвиток метода гідродинамічних потенціалів отримано в роботах 3,4 , при цьому істотно (на відміну від інших робіт) є те, що сингулярності в граничних інтегральних рівняннях взаємно компенсуються. Це центральне місце теорії гідродинамічних потенціалів, побудованих на основі формул Гріна, залишило поза увагою інших авторів.

Мета дослідження. Методи розв'язання задач математичної фізики повинні бути різноманітними; необхідно виділяти раціональні класи задач

і для кожного класу розробляти спеціальні методи, що поєднують кількісні оцінки з можливостями якісного аналізу.

Розробка методів розв'язання задач про рух в'язкої рідини становить проблему, яка цікавить як інженерів, так і математиків.

Матеріали і методика досліджень. У роботі 4 встановлено загальне інтегральне представлення розв'язку лінійованих рівнянь Нав'є-Стокса у випадку рухомих границь і в плоскому випадку представлення для вектора швидкості є комбінацією гідродинамічних потенціалів подвійного і простого шару. Ядра потенціалів виражаються через елементарні функції, що дає можливість застосовувати теорію потенціалів до розв'язання прикладних задач.

Результати дослідження та їх обговорення. 1. Постановка задачі деформації рідкого в'язкого тіла під дією сил поверхневого натягу.

Розглянемо в'язку рідину (тіло)?, яка не піддається стисненню (рідке тіло), що заповнює в момент часу $t \leq 0$ область $D \subset E_2$, обмеженої контуром $L \subset E_2$ з координатами $x_1 = x_1(\sigma, 0)$, $x_2 = x_2(\sigma, 0)$, $0 \leq \sigma < a$. Кожному значенню параметра σ відповідає певна елементарна (нескінченно мала) частинка рідини, що знаходиться в момент часу $t = 0$ на кривій $L \subset E_2$ в площині x_1, x_2 . Швидкості \vec{v} частинок рідини за $t \leq 0$ вважаємо нульовими:

$$\vec{v}(\vec{y}, 0) = v_1 \vec{e}_1 + v_2 \vec{e}_2 \equiv 0, \quad \vec{y} \in D \subset E_2.$$

Нехай, починаючи з моменту часу, $t = 0$ до границі рідини $L \subset E_2$ прикладені нормальні сили напруги:

$$\vec{p}_n(\vec{x}, t) = -\alpha \kappa(\sigma, t) \vec{n}(\sigma, t), \quad (1)$$

де α – коефіцієнт поверхневого натягу;

$\kappa(\sigma, t)$ – кривизна кривої $L \subset E_2$;

$\vec{x} = (x_1; x_2)$ – радіус-вектор точок контуру рідини;

$\vec{n}(\sigma, t)$ – зовнішня нормаль до $L \subset E_2$.

Масові сили в області D і дотичні напруги на контурі L вважаємо рівними нулю.

Під дією сил поверхневого натягу частинки рідини приходять в рух, утворюючи рухливий контур $L \subset E_2$, який описується рівняннями $x_k = x_k(\sigma, t)$, $k = 1, 2$.

Необхідно визначити границю $L \subset E_2$ рідкого тіла, а також швидкість $\vec{v}(\vec{y}, t)$ частинок рідкого тіла і гідродинамічний тиск $p(\vec{y}, t)$, що задовольняють в $D \subset E_2$ системі Нав'є-Стокса:

$$\begin{cases} \mu \Delta \vec{v} \vec{y},t - \gamma \frac{\partial \vec{v} \vec{y},t}{\partial t} - \text{grad } p \vec{y},t = 0, \\ \text{div} \vec{v} \vec{y},t = 0. \end{cases} \quad (2)$$

Тут $\mu = \text{const} > 0$ і $\gamma = \text{const} > 0$ – відповідно в'язкість і густина рідини.

Функції $x_1 = x_1 \sigma, t$, $x_2 = x_2 \sigma, t$ зв'язані з розв'язком системи (2) кінематичним співвідношенням:

$$\vec{v} \vec{x} \sigma, t, t = \frac{\partial \vec{x} \sigma, t}{\partial t} \equiv \vec{v}_0 \sigma, t, \quad (3)$$

де $\vec{v} \vec{x}, t$ – вектор швидкості частинок рідини контуру $L t$;

$\vec{v}_0 \sigma, t$ – вектор швидкості точок контуру $L t$;

$L t$ – вільний контур, і на ньому діють сили поверхневого натягу, які утримують на контурі одні і ті ж самі частинки рідини.

2. Побудова граничних інтегральних рівнянь.

Уведемо позначення: $\vec{n} \sigma, t$ і $\vec{s} \sigma, t$ – зовнішня нормаль і дотичний вектор до контуру $L t$ в точці $\vec{x} \sigma, t$;

$\theta_1 \sigma, t = \vec{v}_0 \sigma, t \cdot \vec{n} \sigma, t$ і $\theta_2 \sigma, t = \vec{v}_0 \sigma, t \cdot \vec{s} \sigma, t$ – нормальна і дотична складові вектора швидкості точок контуру;

$\vec{x} \sigma, \tau$ і $\vec{x} \sigma_0, t$ – радіус-вектор змінної і фіксованої точок інтегрування відповідно, $r \tau = |\vec{x} \sigma, \tau - \vec{x} \sigma_0, t|$.

Спрямуємо в інтегральному представленні $\vec{y} \rightarrow \vec{x} \sigma_0, t$, $\vec{x} \sigma_0, t \in L$, $\vec{y} \in D$ і користуючись властивостями гідродинамічних потенціалів 4 (з врахуванням (3)), зводимо задачу до розв'язання системи нелінійних інтегро-диференціальних рівнянь:

$$-\frac{1}{2} \theta_1 \sigma_0, t + \int_{L t} \theta_1 \sigma, t \frac{\cos \omega_0 t}{2\pi r t} ds + F_1 \sigma_0, t = 0,$$

$$-\frac{1}{2} \theta_2 \sigma_0, t + \int_{L t} \theta_2 \sigma, t \frac{\sin \omega_0 t}{2\pi r t} ds + F_2 \sigma_0, t = 0,$$

$$\frac{\partial x_1 \sigma, t}{\partial t} = \theta_1 \sigma, t n_1 \sigma, t + \theta_2 \sigma, t n_2 \sigma, t ; \quad \frac{\partial x_2}{\partial t} = -\theta_1 n_2 + \theta_2 n_1,$$

за початкових умов: $\theta_1 \sigma, 0 = \theta_2 \sigma, 0 = 0$, $\vec{x} \sigma, 0 = \vec{x}_0 \sigma$.

Тут

$$F_i \sigma_{0,t} = \int_0^t d\tau \int_{L\tau} \left[\theta_2 \sigma, \tau H_{i2} + \left(\theta_1 \sigma, \tau - \frac{\alpha}{2\mu} \right) H_{i1} + \gamma \sum_{k=1}^2 \theta_k \sigma, \tau G_{ik} \right] ds$$

$$H_{11} = A \tau \left[q_1 z \tau \cos 2\omega \tau + \omega_0 \tau + q_2 z \tau \sin 2\omega \tau \sin \omega_0 \tau \right],$$

$$H_{21} = A \tau \left[q_1 z \tau \sin 2\omega \tau + \omega_0 \tau - q_2 z \tau \sin 2\omega \tau \cos \omega_0 \tau \right],$$

$$H_{22} = -H_{11} + A \tau q_2 z \tau \cos 2\omega \tau + \omega_0 \tau ,$$

$$H_{12} = H_{21} + A \tau q_2 z \tau \sin 2\omega \tau - \omega_0 \tau ;$$

$$G_{11} = B \tau \left[e^{-z\tau} \cos \omega \tau - \omega_0 \tau + q_2 z \tau \cos \omega \tau + \omega_0 \tau \right],$$

$$G_{21} = B \tau \left[q_1 z \tau \sin \omega \tau + \omega_0 \tau - e^{-z\tau} \sin \omega \tau - \omega_0 \tau \right],$$

$$G_{22} = -G_{11} + 2B \tau e^{-z\tau} \cos \omega \tau - \omega_0 \tau ,$$

$$G_{12} = G_{21} + 2B \tau e^{-z\tau} \sin \omega \tau - \omega_0 \tau ;$$

$$A \tau = \frac{1}{2\pi r \tau t - \tau}, B \tau = \frac{1}{8\pi\mu t - \tau}, z \tau = \frac{\gamma r^2 \tau}{2\pi\mu t - \tau};$$

$$q_1 = z^{-1} - e^{-z} (1 + z^{-1}), q_2 = z e^{-z}, r \tau = |\vec{r} \tau|, \vec{r} \tau = \vec{x} \sigma, \tau - \vec{x} \sigma_{0,t} ,$$

$$\omega_0 \tau = \left(\vec{r} \tau, \hat{n} \sigma_{0,t} \right), \omega \tau = \left(\vec{r} \tau, \hat{n} \sigma, \tau \right),$$

$$\vec{s} = s_1; s_2, s_i = \frac{\partial x_i}{\partial s} = \frac{\partial x_i}{\partial \sigma} \frac{d\sigma}{ds} \quad (i=1,2), \quad \vec{n} = n_1; n_2 = s_2; -s_1 .$$

Позначимо $\frac{\partial x_i}{\partial \sigma} = x'_i \quad (i=1,2)$, тоді $ds = \sqrt{x'_1 \sigma, \tau^2 + x'_2 \sigma, \tau^2} d\sigma$,

$$s_1 \sigma, t = \frac{x'_1 \sigma, t}{\sqrt{x'_1 \sigma, t^2 + x'_2 \sigma, t^2}}, s_2 \sigma, t = \frac{x'_2 \sigma, t}{\sqrt{x'_1 \sigma, t^2 + x'_2 \sigma, t^2}} .$$

(4)

Якщо вектор нормалі і вектор дотичної розглядаються в фіксованій точці інтегрування, то необхідно в формулах (4) σ замінити на σ_0 .

Використовуючи (4), а також

$$\vec{r} = x_1 \sigma, t - x_1 \sigma_{0,t}; x_2 \sigma, t - x_2 \sigma_{0,t} = r_1; r_2 ,$$

$$\text{Маємо} \quad \sin \omega_0 t = \frac{\vec{r} t \cdot \vec{s} \sigma_{0,t}}{|\vec{r} t|} = \frac{r_1 x'_1 \sigma_{0,t} - r_2 x'_2 \sigma_{0,t}}{x'_1 \sigma_{0,t}^2 + x'_2 \sigma_{0,t}^2},$$

$$\cos \omega_0 t = \frac{\vec{r} t \cdot \vec{n} \sigma_{0,t}}{|\vec{r} t|} = \frac{r_1 x'_2 \sigma_{0,t} - r_2 x'_1 \sigma_{0,t}}{x'_1 \sigma_{0,t}^2 + x'_2 \sigma_{0,t}^2} .$$

Формули обчислення $\sin \omega t$ і $\cos \omega t$ мають аналогічний вигляд, тільки необхідно аргумент в x'_i замінити: σ_0 на σ .

3. Алгоритм розв'язання задачі деформації рідкого в'язкого тіла під дією сил поверхневого натягу.

Розглянемо послідовність моментів часу $t_0, t_1 = h, \dots, t_k = k \cdot h, \dots$, де $h > 0$ – крок по часу (задане мале число).

Розіб'ємо процес розв'язання задачі для кожного моменту часу на етапи:

1) припустимо, що функції $\theta_i \sigma, t$ і $x_i \sigma, t$, $i = 1, 2$ відомі для усіх $t \leq t_{k-1}$ і $t \leq t_k$ відповідно.

Функцію $\theta_1 \sigma, t_k$ визначаємо із рівняння:

$$-\frac{1}{2}\theta_1 \sigma_0, t_k + \int_{L t_k} \theta_1 \sigma, t_k \frac{\cos \omega_0 t_k}{2\pi r t_k} ds = F_1 \sigma_0, t_k ; \quad (5)$$

2) використовуючи обчислену функцію $\theta_1 \sigma, t_k$, а також відомі функції $x_i \sigma, t$ (для усіх $t \leq t_k$) і $\theta_2 \sigma, t$ (для усіх $t \leq t_{k-1}$), функцію $\theta_2 \sigma, t_k$ визначаємо за формулою:

$$\frac{1}{2}\theta_2 \sigma_0, t_k = \int_{L t_k} \theta_1 \sigma, t_k \frac{\sin \omega_0 t_k}{2\pi r t_k} ds + F_2 \sigma_0, t_k ; \quad (6)$$

3) знаючи функції $\theta_i \sigma, t_k$ і $x_i \sigma, t_k$ знаходимо для моменту часу $t = t_{k+1}$ функції $x_i \sigma, t_{k+1}$ за наближеними формулами:

$$x_i \sigma, t_{k+1} \approx x_i \sigma, t_k + t_{k+1} - t_k \left(\vec{e}_i \cdot \sum_{j=1}^2 \theta_j \sigma, t_k \vec{a}_0^j \right),$$

де $\vec{a}_0^1 = \vec{n} \sigma, t_k$, $\vec{a}_0^2 = \vec{s} \sigma, t_k$.

Після визначення контуру $x_i \sigma, t_{k+1}$ за умови $|x_i \sigma, t_{k+1} - x_i \sigma, t_k| > \varepsilon$, можна повторити пункти 1) – 3) і обчислити функції $x_i \sigma, t_{k+2}$.

В інтегральне рівняння (5) і в рівність (6) входять $F_1 \sigma_0, t_k$ і $F_2 \sigma_0, t_k$, які обчислюються за формулами:

$$F_1 \sigma_0, t_k = - \int_0^{t_{k-1}} d\tau \int_{L \tau} \left[\theta_2 \sigma, \tau H_{12} \sigma_0, \sigma, t_k, \tau + \left(\theta_1 \sigma, \tau - \frac{\alpha}{2\mu} \right) H_{11} \sigma_0, \sigma, t_k, \tau + \right. \\ \left. + \gamma \sum_{j=1}^2 \theta_1 \sigma, \tau \theta_j \sigma, \tau G_{1j} \sigma_0, \sigma, t_k, \tau \right] ds - \int_{L t_k} \left[\theta_2 \sigma, t_{k-1} H_{12}^k \sigma_0, \sigma + \right. \\ \left. + \left(\theta_1 \sigma, t_{k-1} - \frac{\alpha}{2\mu} \right) H_{11}^k \sigma_0, \sigma + \gamma \sum_{j=1}^2 \theta_1 \sigma, t_{k-1} \theta_j \sigma, t_{k-1} G_{1j}^k \sigma_0, \sigma \right] ds;$$

$$\begin{aligned}
F_2 \sigma_0, t_k &= \int_0^{t_k-1} d\tau \int_{L \tau} \left[\theta_2 \sigma, \tau H_{22} + \left(\theta_1 \sigma, \tau - \frac{\alpha}{2\mu} \right) H_{21} + \right. \\
&+ \gamma \sum_{j=1}^2 \theta_1 \sigma, \tau \theta_j \sigma, \tau G_{2j} \left. \right] ds + \int_{L t_k} \left[\theta_2 \sigma, t_{k-1} H_{22}^k + \right. \\
&+ \left. \left(\theta_1 \sigma, t_k - \frac{\alpha}{2\mu} \right) H_{21}^k + \gamma \sum_{j=1}^2 \theta_1 \sigma, t_k \theta_j \sigma, t_{k-1} G_{2j}^k \right] ds.
\end{aligned}$$

Ядра H_{ij}^k і G_{ij}^k $i, j = 1, 2$ знаходяться в результаті інтегрування H_{ij} і G_{ij} в межах від t_{k-1} до t_k :

$$\begin{aligned}
H_{11}^k &= \tilde{q}_1 \frac{\cos 2\omega + \omega_0}{2\pi r_0} + e^{-z_k} \frac{\sin 2\omega \sin \omega_0}{2\pi r_0}, \\
H_{12}^k &= \tilde{q}_1 \frac{\sin 2\omega + \omega_0}{2\pi r_0} - e^{-z_k} \frac{\cos 2\omega \sin \omega_0}{2\pi r_0}, \\
H_{21}^k &= \tilde{q}_1 \frac{\sin 2\omega + \omega_0}{2\pi r_0} - e^{-z_k} \frac{\sin 2\omega \cos \omega_0}{2\pi r_0}, \\
H_{22}^k &= -\tilde{q}_1 \frac{\cos 2\omega + \omega_0}{2\pi r_0} + e^{-z_k} \frac{\cos 2\omega \cos \omega_0}{2\pi r_0},
\end{aligned}$$

$$G_{11}^k = \frac{e^{-z_k} \cos \omega + \omega_0}{8\pi\mu} - \frac{\cos \omega - \omega_0 \operatorname{li} x}{8\pi\mu},$$

$$G_{21}^k = \frac{\tilde{q}_1 \sin \omega + \omega_0}{8\pi\mu} - \frac{\sin \omega - \omega_0 \operatorname{li} x}{8\pi\mu},$$

$$G_{12}^k = G_{21}^k - \frac{\sin \omega - \omega_0 \operatorname{li} x}{4\pi\mu}, \quad G_{22}^k = G_{11}^k - \frac{\cos \omega - \omega_0 \operatorname{li} x}{4\pi\mu};$$

$$z_k = \frac{\gamma r_0^2}{4\mu h_k}, \quad h_k = t_k - t_{k-1}, \quad \tilde{q}_1 = \frac{1 - e^{-z_k}}{z_k}, \quad r_0 = \left| \vec{x} \sigma, t_k - \vec{x} \sigma_0, t_k \right|.$$

Визначений інтеграл $\int_0^x \frac{dt}{\ln t}$, де $x = e^{-z_k}$, називається інтегральним

логарифмом і позначається $\operatorname{li} x$: $\operatorname{li} x = \int_0^x \frac{dt}{\ln t}$.

Висновки і перспективи. Задача деформації в'язкого тіла звелась до розв'язку інтегрального рівняння, яке відноситься тільки до границі області і враховує краєві умови безпосередньо. Перевага такого перетворення полягає в тому, що представляється можливим відразу визначити невідомі величини на границі, не обчислюючи їх у всій області.

Якщо необхідно знайти рішення в довільній внутрішній точці області, то для цього достатньо виконати інтегрування.

Це вигідно відрізняє метод граничних інтегральних рівнянь від інших методів.

Список використаних джерел

1. Теоретические основы и конструирование численных алгоритмов задач математической физики / под. ред. К. И. Бабенко. – М.: Наука, 1979. – 295 с.
2. Бабенко, К. И. Основы численного анализа / К. И. Бабенко. – М.: Наука, 1986. – 744 с.
3. Белоносов, С. М. Гидродинамические и тепловые потенциалы в областях с подвижными границами / С. М. Белоносов, К. А. Черноус. // Аналитические, численные и аналоговые методы в задачах теплопроводности. – Киев: Наукова думка, 1977. – С. 126-136.
4. Белоносов, С. М. Краевые задачи для уравнений Навье-Стокса / С. М. Белоносов, К. А. Черноус. – М.: Наука, 1985. – 312 с.
5. Долидзе, Н. Е. Некоторые вопросы нестационарного течения вязкой несжимаемой жидкости / Н. Е. Долидзе. – Тбилиси: Изд-во АН Груз. ССР, 1960. – 332 с.
6. Odqvist, F. K. G. Beitrage zur Theorie der nichtstationaren zehen Flussigkeitsbewegungen/ F. K. G. Odqvist // Archiv fur Mat.Astr.Fysik.-1930/32.- Bd.22 A, N 28. – S. 1–22.

References

1. Babenko, K. I. (1979). Teoreticheskiye osnovy i konstruirovaniye chislennykh algoritmov zadach matematicheskoy fiziki [Theoretical Foundations and Design of Numerical Algorithms for Problems in Mathematical Physics]. Moskow, Nauka, 295.
2. Babenko, K. I. (1986). Osnovy chislennogo analiza [Fundamentals of numerical analysis]. Moskow, Nauka, 744.
3. Belonosov, S. M. , Chernous, K. A. (1977). Gidrodinamicheskiye i teplovyye potentsialy v oblastiakh s podvizhnymi granitsami [Hydrodynamic and thermal potentials in the fields with moving boundaries]. V kn.: Analiticheskiye, chislennyye i analogovyye metody v zadachakh teploprovodnosti. Kyiv, Naukova dumka, 126-136.
4. Belonosov, S. M., Chernous, K. A. (1985). Krayevyye zadachi dlya uravneniy Nav'ye-Stoksa [Boundary value problems for the Navier-Stokes equations]. Moskow, Nauka, 312.
5. Dolidze, N. E. (1960). Nekotoryye voprosy nestatsionarnogo techeniya vyazkoy neszhimayemoy zhidkosti [Some questions of the nonstationary flow of a viscous incompressible fluid]. Tbilisi, Izd-vo AN Gruz. SSR, 332.
6. Odqvist, F. K. G. (1930-32). Beitrage zur Theorie der nichtstationaren zehen Flussigkeitsbewegungen. Archiv fur Mat.Astr.Fysik, 22 (28), 1–22.

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ДЕФОРМАЦИИ ГРАНИЦЫ ВЯЗКОГО ТЕЛА МЕТОДОМ ГИДРОДИНАМИЧЕСКИХ ПОТЕНЦИАЛОВ

А. П. Зинькевич, А. М. Нецадим, В. М. Сафонов

Аннотация. В теории потенциала строятся интегральные представления решения через произвольные функции точек контура области путем подстановки этих функций в формулы Грина вместо контурных значений решений и их частных производных. Условия на границе области приводят к, так называемым, граничным интегральным уравнениям. В задачах вязкой жидкости выделяется практически важный класс задач с заранее неизвестной (свободной границей), которая определяется в процессе самого решения. Одним из возможных подходов к решению данного класса задач гидродинамики является метод гидродинамических потенциалов, переключающий основные трудности исследований и численных расчетов на некоторые граничные интегральные уравнения, которые относятся лишь к границе области и учитывают граничные условия непосредственно. Это преобразование позволяет сразу определить неизвестные величины на границе, не вычисляя их по всей области. Это выгодно отличает метод граничных интегральных уравнений от других методов.

В статье поставлена и решена задача деформации вязкого тела под действием сил поверхностного натяжения. Строятся граничные интегральные уравнения, которые рассматриваются в совокупности с кинематическим контурным условием. Предложен метод шагов по времени для численного анализа деформации жидкого вязкого тела под действием сил поверхностного натяжения.

Ключевые слова: гидродинамические потенциалы, кинематическое соотношение, силы поверхностного натяжения, интегральное представление, интегральное уравнение

MATHEMATICAL MODELING OF DEFORMATION BORDER VISCOELASTIC BODY HYDRODYNAMIC POTENTIALS METHOD

A. Zinkevych, A. Neshchadym, V. Safonov

Abstract. In the theory of potential, integral representations of a solution in terms of arbitrary functions of points of the contour of a domain are constructed by substituting these functions into Green's formulas instead of the contour values of the solutions and their partial derivatives. The conditions on the boundary of the region lead to the so-called boundary integral equations. The viscous fluid theory stands practically important class of problems with pre-unknown (free boundary), which is determined in the process of resolving. One approach to solving this class of hydrodynamics problems is the method of hydrodynamic potentials, switch the main challenges of research and numerical calculations of some boundary integral equations, which relate only to the border area and take into account the boundary conditions directly. This conversion allows you to immediately identify unknown quantities at the border, without calculating them throughout the region. This distinguishes the method of boundary integral equations of the other methods.

The article posed and solved the problem of viscous deformation of the body under the action of surface tension forces. We construct boundary integral equations, which are considered in conjunction with the kinematic boundary conditions. The method of time steps for the numerical analysis of liquid viscous deformation of the body under the action of surface tension forces.

Keywords: *hydrodynamic potentials kinematic ratio, surface tension, integral representation, integral equation*

УДК 372.851

ЗАСТОСУВАННЯ МАТЕМАТИЧНОГО МОДЕЛЮВАННЯ ПРИ ВИКЛАДАННІ ВИЩОЇ МАТЕМАТИКИ СТУДЕНТАМ ІНЖЕНЕРНИХ СПЕЦІАЛЬНОСТЕЙ

О. Ю. ДЮЖЕНКОВА, кандидат фізико-математичних наук, доцент
*Національний університет біоресурсів
і природокористування України*
E-mail: *oduzen@yandex.ua*

Анотація. *Важливою складовою якісної підготовки майбутніх інженерів є підвищення їх рівня математичної освіти. Це передбачає розуміння суті основних понять і тверджень, що вивчаються в курсі вищої математики, їх тлумачення в різних науках, уміння будувати математичні моделі та застосовувати математичні методи за розв'язання прикладних задач. У статті розглянуто загальний підхід та особливості використання математичного моделювання у процесі викладання вищої математики студентам інженерних спеціальностей. Підкреслено важливість використання задач, які ілюструють необхідність введення основних математичних понять, що дає мотивацію та стимулює вивчення математики. Для реалізації професійного спрямування курсу вищої математики велику увагу слід приділити прикладним задачам, які сприяють розвитку дослідницьких навичок майбутніх фахівців. Крім того, математичне моделювання є важливим для встановлення міжпредметних зв'язків та формування науково-цілісного сприйняття світу.*

У статті розглянуто приклади використання математичних моделей за вивчення похідної функції, визначеного інтеграла, диференціальних рівнянь. Підкреслено доцільність використання комбінованих задач, які пов'язують між собою різні розділи вищої математики. Зокрема, наведено приклади, у яких використовується матеріал з лінійної алгебри, аналітичної геометрії та математичного аналізу.

Ключові слова: *математична модель, професійна спрямованість, прикладні задачі*