*mathematical modeling is important to establish interdisciplinary connections and the formation of scientific and holistic perception of the world.*

*In the article we consider the examples of the use of mathematical models in the study of the derivative function, definite integral, differential equations. It emphasized the advisability of combined tasks, which connect different sections of higher mathematics. In particular, we consider the problems, which solving needs the material from linear algebra, analytical geometry and mathematical analysis.*

**Keywords:** ***mathematical model, professional orientation, applied problems***

УДК 535.3

# АНАЛІТИЧНИЙ ПІДХІД ДОСЛІДЖЕННЯ ДІЕЛЕКТРИЧНОЇ СИСТЕМИ СФЕРИЧНИХ ЧАСТИНОК

**С. В. СТЕЦЕНКО,** старший викладач
***Національний університет біоресурсів і природокористування України***
*E-mail*: sstetsenko@i.ua

**Анотація.** *Розглядається аналітичний підхід дослідження системи сферичних частинок, оточених певним діелектричним середовищем з різною діелектричною проникністю. Система знаходиться між двома паралельними пластинами – електродами, рознесеними на певну відстань, і на які подається змінна напруга низької частоти. Отримано крайову задачу для рівнянь Максвелла, яку розв'язано методом функцій Гріна. Ці функції є основою для точних мультипольних частинок і точного електричного поля, які виражаються через прикладене поле і матрицю, що залежить від конфігурації системи. Точне електричне поле має вклади від прикладеного поля, поля частинок і поля зображення частинок. Зовнішнє поле, яке є суперпозицією прикладеного поля за відсутності частинок та поля зображення частинок в загальному випадку, є неоднорідним та залежить від властивостей і конфігурації системи. Визначено середню діелектричну проникність шляхом прямого усереднення її величини по всьому образу. Ефективна діелектрична проникність залежить лише від індукованих дипольних моментів, які, в свою чергу, залежать від всіх мультипольних моментів частинок та їх зображень.*

**Ключові слова:** ***сферична частинка, діелектрична система, мультипольний момент***

**Актуальність** теоретичного дослідження діелектричних характеристик гетеросистем з дисперсними включеннями обумовлена їх використанням в сучасних технологіях для вирішення задач діелектричної спектроскопії поверхні.

**Аналіз останніх досліджень та публікацій** щодо вивчення електричного відгуку гетерогенних середовищ має довгу історію, починаючи із робіт Пуассона, Моссотті, Клаузіуса, Лоренца, Максвелла, Гарнетта, Вагнера. У статті [2] О. Ю. Грищука, Н. Г. Шкоди, С. В. Стеценко, наведено результати досліджень відгуку двошарових малих частинок на дію електромагнітного поля з точки зору їх можливого практичного використання. Частотні залежності діелектричної проникності дали можливість отримати практично повну інформацію про відгук частинок на дію електромагнітного випромінювання. У статті [3] О. Ю. Грищука, С. В. Стеценко розглянуто сучасний стан досліджень взаємодії електромагнітного випромінювання з металевими наночастинками та дисперсними системами на їх основі. Наведено результати досліджень впливу адсорбційного шару металевої частинки сферичної форми на її поляризовність та посилення комбінаційного розсіяння світла молекулами в зовнішньому електричному полі.

**Мета дослідження** полягала у розробці теоретичної методики розрахунку процесів поглинання електромагнітного випромінювання дисперсними системами на основі двошарових частинок сферичної форми, оточених певним середовищем з різною діелектричною проникністю.

**Матеріали та методи дослідження.** Розглянуто гетерогенну систему, яка складається із сферичних частинок, розміщених у деякому середовищі, яке описується залежною від частоти комплексною діелектричною проникністю $\epsilon_m$. $i$-та частинка центрована в $\vec{r}_i$, має радіус $a_i$ та частотно-залежну комплексну діелектричну проникність $\epsilon_i$. Вся система розміщена між двома плоскими електродами $z=\pm\frac{d}{2}$. До електродів прикладено синусоїдальну напругу з амплітудою $V_0$. Електричний потенціал має вигляд:

$$u(\vec{r},t)=u(\vec{r})e^{-jwt}. \tag{1}$$

$u(\vec{r})$ задовольняє рівнянню Лапласа:

$$\Delta u(\vec{r})=0 \tag{2}$$

з крайовими умовами:

$$u(\vec{r})|_{z=-d/2}=V_0, \ ; u(\vec{r})|_{z=+d/2}=0, \tag{3}$$

$$u_{зовн}(\vec{r})|_{s_i} = u_{внут}(\vec{r})|_{s_i}, \tag{4}$$

$$\epsilon_m \left.\frac{\partial u_{зовн}(\vec{r})}{\partial n_i}\right|_{s_i} = \epsilon_i \left.\frac{\partial u_{внут}(\vec{r})}{\partial n_i}\right|_{s_i}, \tag{5}$$

де $s_i$ – поверхня $i$-ї частинки;

$n_i$ – напрямок її нормалі;

$u_{зовн}$, $u_{внут}$ – потенціали зовні та всередині частинки відповідно.

Потенціал $u(\vec{r})$ можна записати у вигляді суперпозиції:

$$u(\vec{r}) = u^0(\vec{r}) + u^1(\vec{r}), \tag{6}$$

де $u^1(\vec{r})$ – потенціал, що створюється всіма частинками, а також наведеними ними зарядами на електродах;

$u^0(\vec{r})$ – прикладений потенціал:

$$u^0(\vec{r}) = V_0/2 - \vec{E_0}\vec{r} = V_0/2 - \vec{E_0}\vec{r_i} - \vec{E_0}(\vec{r} - \vec{r_i}), \tag{7}$$

де $\vec{E_0} = \vec{e_z}\,\dfrac{V_0}{d}$ – прикладене електричне поле,

Потенціал $u^1$ задовольняє:

$$\Delta u^1(\vec{r}) = 0;$$

$$u^1(\vec{r})|_{z=+d/2} = 0. \tag{8}$$

Формула Гріна для крайових умов Діріхле на електродах:

$$G(\vec{r}, \vec{r'}) = \sum_k \frac{(-1)^k}{\left|\vec{r} - \vec{r'_k}\right|}, \tag{9}$$

де $\vec{r'_k} = \{x', \ y', \ kd + (-1)^k z'\}, \quad k = 0, \pm 1, \ \pm 2.$ (10)

Оскільки заряди зосереджуються лише на границях, маємо:

$$u^1(\vec{r}) = \sum_{ik} (-1)^k \int_{s_i} \frac{\delta_i(\vec{r'})}{\left|\vec{r} - \vec{r'_k}\right|} ds', \tag{11}$$

де $\delta_i(\vec{r'})$ – поверхнева щільність повного заряду $i$-ї частинки, оскільки інтеграл по поверхні електродів зникає в силу крайових умов (6).

Отримано загальний потенціал:

$$u_{внут}(\vec{r}) = (V_0/2 - E_0\vec{r_i}) - E_0(\vec{r} - \vec{r_i}) + 4\pi \sum_{lm} \frac{q_{ilm}}{(2l+1)a_i^{2l+1}} \left|\vec{r} - \vec{r_i}\right|^l Y_{l,m}(\vec{r} - \vec{r_i}) +$$

$$+ 4\pi \sum_{i'l'm'k} (-1)^{(l'+m'+1)k} (1 - \delta_i^{i'}\delta_k^0) \frac{q_{i'l'm'}}{(2l'+1)} \frac{Y_{l',m'}(\vec{r} - \vec{r_{i'k}})}{\left|\vec{r} - \vec{r_{i'k}}\right|^{l'+1}}, \qquad \left|\vec{r} - \vec{r_i}\right| \le a_i \tag{12}$$

$$u_{зовн}(\vec{r}) = (V_0/2 - E_0\vec{r_i}) - E_0(\vec{r} - \vec{r_i}) + 4\pi \sum_{lm} \frac{q_{ilm}}{(2l+1)} \frac{Y_{l,m}(\vec{r} - \vec{r_i})}{\left|\vec{r} - \vec{r_{i'k}}\right|^{l+1}} +$$

$$+ 4\pi \sum_{i'l'm'k} (-1)^{(l'+m'+1)k} (1 - \delta_i^{i'}\delta_k^0) \frac{q_{i'l'm'}}{(2l'+1)} \frac{Y_{l',m'}(\vec{r} - \vec{r_{i'k}})}{\left|\vec{r} - \vec{r_{i'k}}\right|^{l'+1}}, \quad a_i \le \left|\vec{r} - \vec{r_i}\right| \le \left|\vec{r_{i'}} - \vec{r_i}\right| - a_{i'}, \ i' \ne i, \tag{13}$$

де $q_{ilm}$ – мультипольні моменти $i$-ї частинки відносно її центра;

$(1 - \delta_i^{i'}\delta_k^0)$ - множник, введений для виключення подвоєного підрахунку $i$-ї частинки.

Кожен із трьох доданків в (12) і (13) ідентифікується як прикладений потенціал $i$-ї частинки, потенціал всіх інших частинок ($k=0$) та всіх зображень ($k \ne 0$).

Рівняння (12) і (13) показують, що поле, створене зображеннями, залежить від властивостей системи, тому зовнішнє поле, яке є сумою прикладеного поля та поля зображень, у загальному випадку не є ні однорідним, ні експериментально контрольованим. Вирази (12) і (13) для потенціалів справедливі для частинок будь-якої форми та орієнтації, крім виразу для потенціалу, який створює сама *i*-та частинка. Потенціали (12) і (13) задовольняють рівнянню Лапласа та крайовим умовам (3), (4).

Для сферичних частинок отримуємо:

$$\sum_{lm} \frac{l\epsilon_i + (l+1)\epsilon_m}{(2l+1)a_i^{l+2}} q_{ilm} Y_{l,m}(\vec{r}-\vec{r}_i) =$$

$$= (\epsilon_i - \epsilon_m)\left\{ \frac{E_0}{\sqrt{12\pi}} Y_{1,0}(\vec{r}-\vec{r}_i) - \sum_{lm}\left[ l a_i^{l-1} \sum_{i'l'm'} C_{lm}^{l'm'}(\vec{r}_{i'}-\vec{r}_i)\, q_{i'l'm'}\right] Y_{l,m}(\vec{r}-\vec{r}_i)\right\}. \quad (14)$$

Порівнюючи коефіцієнти за відповідних сферичних гармонік, отримуємо:

$$q_{ilm} = \sqrt{\frac{3}{4\pi}} \beta_{i1} E_0 \delta_l^1 \delta_m^0 - (2l+1)\beta_{il} \sum_{i'l'm'} C_{lm}^{l'm'}(\vec{r}_{i'}-\vec{r}_i)\, q_{i'l'm'} \quad , \quad (15)$$

де $\beta_{il} = \dfrac{(\epsilon_i - \epsilon_m) l a_i^{2l+1}}{l\epsilon_i + (l+1)\epsilon_m}$ . (16)

Оскільки, $\beta_{i0} = 0$, $q_{i00} = 0$, то будемо вважати $l, l' \geq 1$. Збираючи всі $q_{ilm}$ у лівій частині (18), можемо записати в матричній формі:

$$Gq = \sqrt{\frac{3}{4\pi}} hE_0 \, , \quad (17)$$

де $q$ – матриця-стовпчик, що складається із всіх $q_{ilm}$;

$G_{ilm}^{i'l'm'}$ – матриця конфігурації системи:

$$G_{ilm}^{i'l'm'} = \delta_i^{i'} \delta_l^{l'} \delta_m^{m'} + (2l+1)\beta_{il} C_{lm}^{l'm'}(\vec{r}_{i'} - \vec{r}_i) \, ; \quad (18)$$

$$h_{ilm} = \beta_{i1} \delta_l^1 \delta_m^0 \, . \quad (19)$$

Після перетворення матриць маємо:

$$q = \sqrt{\frac{3}{4\pi}} G^{-1} h E_0 \quad (20)$$

або в явному вигляді:

$$q_{ilm} = \sqrt{\frac{3}{4\pi}} \sum_{i'} (G^{-1})_{ilm}^{i'10} \beta_{i'1} E_0 \quad . \quad (21)$$

Таким чином, всі мультипольні моменти виражаються в явному вигляді через прикладене поле і конфігураційну матрицю системи.

**Результати досліджень** для ефективної діелектричної проникності є точними без жодного припущення про конфігурацію системи. Результат є справедливим і для випадків, коли зовнішнє поле неоднорідне. У таких випадках система нееквівалентна нескінченній системі: зображення відіграють вирішальну роль і повинні враховуватись точно. Зовнішнє поле неоднорідне і невизначене та залежить від самої системи через її зображення. Тому не можна розглядати зовнішнє поле як збурення, в яке поміщена система: його необхідно трактувати як частину відгуку системи. В таких випадках суттєвим для розв'язку фізичної крайової задачі є розгляд лише прикладеного поля як збурення.

**Висновки та перспективи.** Отримано точні вирази для полів і всіх мультипольних моментів у термінах поля, прикладеного до плоских електродів, і конфігурації системи. Ефективна діелектрична проникність залежить лише від індукованих дипольних моментів, які, в свою чергу, залежать від усіх мультипольних моментів частинок та їх зображень. Знання точних полів в системі є дуже цінним за вивчення складних систем і розподілів.


## Список використаних джерел

1. Ефективна діелектрична проникність матричних дисперсних систем з багатошаровими включеннями: пряма та обернена задачі / Л. Г. Гречко, Л. Б. Лерман, Н. Г. Шкода // Вісник Київ. ун-ту. Серія: фіз.-мат. науки. – 2004. – №2. – С. 181–186.
2. Електродинамічний відгук малих частинок на електромагнітне випромінювання / О. Ю. Грищук, Н. Г Шкода, С. В. Стеценко // Наук. вісник НУБіП України. Серія: техніка та енергетика в АПК. – 2014. – №194. – Ч2.–С. 235–243.
3. Вплив адсорбційного шару металевих частинок на їх поляризованість та розсіяння світла / О. Ю. Грищук, С. В. Стеценко // Металофізика: новітні технології. – 2014. – Т. 36, № 3. –С. 391–397.

## References

1. Hrechko, L H., Lerman, L. B., Shkoda, N. H. (2004). Efektyvna dielektrychna pronyknist matrychnykh dyspersnykh system z bahatosharovymy vkliuchenniamy: priama ta obernena zadachi [The effective permittivity matrix dispersed systems with multilayered inclusions: direct and inverse problems]. Visnyk Kyiv. un-tu. Seriia: fiz.-mat. Nauky, 2, 181–186.
2. Hryshchuk, O. u., Shkoda, N. H., Stetsenko, S. V. (2014). Elektrodynamichnyi vidhuk malykh chastynok na elektromahnitne vyprominiuvannia [The effective permittivity matrix dispersed systems with multilayered inclusions: direct and inverse problems]. Nauk. visnyk NUBiP Ukrainy. Seriia: tekhnika ta enerhetyka v APK, 194 (2), 235–243.
3. Hryshchuk, O. Iu., Stetsenko, S. V. (2014). Vplyv adsorbtsiinoho sharu metalevykh chastynok na yikh poliaryzovanist ta rozsiiannia svitla [Influence of the adsorptive layer of metal particles on their polarizability and light scattering ]. Metalofizyka: novitni tekhnolohii, 36 (3), 391–397.


# АНАЛИТИЧЕСКИЙ ПОДХОД ИССЛЕДОВАНИЯ ДИЭЛЕКТРИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ СФЕРИЧЕСКИХ ЧАСТИЦ


**С. В. Стеценко**



**Аннотация.** *Рассматривается аналитический подход исследования системы сферических частиц, окруженных определенной диэлектрической средой с разной диэлектрической проницаемостью. Система находится между двумя параллельными пластинами - электродами, разнесенными на определенное расстояние, и на которые подается переменное напряжение низкой частоты. Получена краевая задача для уравнений Максвелла, которая решена методом функций Грина. Эти функции являются основой для точных мульти-*

*польных частиц и точного электрического поля, которые выражаются через прилагаемое поле и матрицу, которая зависит от конфигурации системы. Точное электрическое поле имеет вклады от приложенного поля, поля частиц и поля изображения частиц. Внешнее поле, которое является суперпозицией приложенного поля при отсутствии частиц и поля изображения частиц в общем случае, является неоднородным и зависит от свойств и конфигурации системы.*

*Определена средняя диэлектрическая проницаемость путем прямого усреднения ее величины по всему образу. Эффективная диэлектрическая проницаемость зависит только от индуцированных дипольных моментов, которые, в свою очередь, зависят от всех мультипольных моментов частиц и их изображений.*

**Ключевые слова:** ***сферическая частица, диэлектрическая система, мультипольный момент***

## ANALYTICAL APPROACH OF RESEARCH DIELECTRIC SYSTEM OF SPHERICAL PARTICLES

**S. V. Stetsenko**

**Abstract.** *An analytical approach to the study of a system of spherical particles surrounded by a certain dielectric medium with different permittivity is considered. The system is located between two parallel plates - electrodes spaced by a certain distance, and to which an alternating low-frequency voltage is applied. A boundary-value problem is obtained for the Maxwell equations, which is solved by the Green's function method. These functions are the basis for exact multipole particles and an exact electric field, which are expressed through the applied field and the matrix, which depends on the configuration of the system. The exact electric field has contributions from the applied field, the particle field and the image field of the particles. The external field, which is the superposition of the applied field in the absence of particles and the image field of the particles in the general case, is inhomogeneous and depends on the properties and configuration of the system. The average permittivity is determined by direct averaging over the entire image. The effective dielectric constant depends only on the induced dipole moments, which in turn depend on all the multipole moments of the particles and their images.*

**Keywords:** ***spherical particle, dielectric system, multipole moment***