УДК 51-72

МАТЕМАТИЧНА МОДЕЛЬ ДЕФОРМУВАННЯ ТОНКОЇ В'ЯЗКОПРУЖНОЇ ПЛАТІВКИ

О. М. НЕЩАДИМ, кандидат фізико-математичних наук, доцент
Національний університет біоресурсів і природокористування України
О. П. ЗІНЬКЕВИЧ, кандидат фізико-математичних наук, доцент
В. М. САФОНОВ, кандидат фізико-математичних наук, доцент
Національний університет харчових технологій
E-mail: oleksandr_neshchadym@mail.ru

Анотація. *Розглядається методика розв'язування плоскої квазістатичної задачі для тонкої в'язкопружної платівки. В'язкопружне середовище підпадає під математичну модель Максвелла. Суть методики полягає у зведенні крайової задачі для квазістатичного рівняння руху в'язкопружної платівки до системи гранично-часових інтегральних рівнянь відносно деяких довільних функцій – щільностей потенціалів. Такі інтегральні рівняння містять інтеграли як за межею області, яку займає платівка так і за часовою змінною [1].*

Для реалізації цієї методики використано фундаментальний розв'язок інтегро-диференціального рівняння плоскої рівноваги і виписано інтегральне представлення шуканого розв'язку крайової задачі через в'язкопружні потенціали. Такі інтеграли містять добутки фундаменттального розв'язку (функцій, залежних від змінних інтегрування і параметрів – часу і координат в заданій області) на щільності потенціалів. Важливо, що зазначена інтегральна залежність зв'язує інтеграли за досліджуваною областю з потенціалами за межею цієї області. Підстановка такого інтегрального представлення шуканого розв'язку в граничну умову з урахуванням властивостей в'язкопружних потенціалів приводить до гранично-часових інтегральних рівнянь другого роду.

На практиці невідомі щільності потенціалів визначаються із системи лінійних алгебраїчних рівнянь, якою наближено замінюють одержані інтегральні рівняння. Запропоновано алгоритм розв'язування такої системи і знаходження координат точок рухомої межі області.

Ключові слова*: в'язкопружність, ядро релаксації, ядро повзучості, модель Максвелла, в'язкопружний потенціал, фундаментальний розв'язок, щільність потенціалу, граничне інтегральне рівняння, ядро інтегрального рівняння*

Актуальність. Необхідність розробки ефективних методів розв'язування крайових задач в'язкопружності продиктована багатьма практичними застосуваннями таких задач в техніці і фізиці. Інженери і дослідники

© О. М. Нещадим, О. П. Зінькевич, В. М. Сафонов, 2017

зацікавлені в зручних математичних методах, які дозволяють шляхом числових розрахунків моделювати прості закономірності. Серед таких методів вигідно виділяється метод потенціалів (граничних інтегральних рівнянь).

Математичні моделі багатьох прикладних задач математичної фізики зводяться до граничних інтегральних рівнянь [2-3]. При цьому межа області вважається незмінною або такою, що змінюється мало. В даній роботі розвивається метод граничних інтегральних рівнянь для розв'язування плоскої крайової задачі лінійної в'язкопружності з рухомою межею.

Аналіз останніх досліджень та публікацій. В роботі [4] були отримані граничні інтегральні рівняння для початково-крайової задачі про плоскі деформації в'язкопружного циліндричного тіла максвелівського типу. Там розглядалось квазістатичне рівняння руху в'язкопружного середовища, відмінне від так званого узагальненого плоского напруженого стану.

Мета дослідження – отримати граничні інтегральні рівняння для крайової задачі про в'язкопружні деформації тонкої платівки з рухомою межею.

Матеріали та методи дослідження. Використовувались теоретичні положення математичної фізики і методи теорії потенціалів. Розглядались в'язкопружні матеріали із ядрами релаксації експонентціального виду.

Результати дослідження та їх обговорення. Розглянемо тонку в'язкопружну платівку, яка займає область $D(0)$ в площині Oy_1y_2. Вважаємо, що матеріал платівки є однорідним, ізотропним. Довільна точка M плоскої області $D(0)$ в момент часу $\tau > 0$ визначається радіус-вектором $\vec{y}(\tau) = \vec{e}^k y_k(\tau)$, де $\{\vec{e}^1, \vec{e}^2\}$ – декартів базис. За проміжок часу $d\tau$ дана матеріальна частинка набуде деформації, що спричинить появу тензора напружень:

$$d\overset{\tau}{\Pi} = [2\lambda \mathcal{E} div\ \vec{v}(\vec{y}(\tau),\tau) + 2\left(k + \frac{4}{3}\mu\right) Def\ \vec{v}(\vec{y}(\tau),\tau)]d\tau, \qquad (1)$$

де μ – миттєво-пружний модуль зсуву;

$\lambda = k - \frac{2}{3}\mu$ – миттєво-пружна стала Ламе;

k – миттєвий модуль об'ємної деформації;

$\mathcal{E}$ – одиничний тензор;

$Def\ \vec{v}(\vec{y}(\tau),\tau) = \frac{1}{2}\left(\overset{\tau}{\nabla}\vec{v} + (\overset{\tau}{\nabla}\vec{v})^T\right)$ – тензор швидкості деформації;

$\vec{v} \equiv \vec{v}(\vec{y}(\tau),\tau)$ – вектор швидкості частинки M в момент часу τ;

$\overset{\tau}{\nabla} = \vec{e}^k \frac{\partial}{\partial y_k}$ – оператор Гамільтона.

Внаслідок релаксації напружень в момент спостереження $t > \tau + d\tau$ тензор напружень (1) набуває вигляду:

$$d\overset{\tau}{\Pi}(t-\tau) = [2\text{Є}\left(kh(t-\tau) - \frac{2}{3}\mu q(t-\tau) \right) div\ \vec{v}(\vec{y}(\tau),\tau) +$$
$$+2\left(kh(t-\tau) + \frac{4}{3}\mu q(t-\tau) \right) Def\ \vec{v}(\vec{y}(\tau),\tau)]d\tau. \qquad (2)$$

Тут функції $q(t)$ і $h(t)$ характеризують реологічні властивості матеріалу і називаються ядрами релаксації; вони визначені за $t \geq 0$, є невід'ємними і монотонно спадними. В'язкопружним матеріалам, зазвичай, не притаманна суттєва об'ємна релаксація; тому приймається $h(t) = 0$. Вважаємо, що в'язкопружні властивості платівки узгоджуються з моделлю Максвелла:

$$q(t) = \frac{c}{\kappa}\exp(-\frac{t}{\kappa}), \qquad (3)$$

де к – час релаксації у разі зсуву, параметр $c \in [0;\ 1]$.

Загальне напруження в матеріальній точці M за час $0 < \tau < t$ виражається тензором:

$$\Pi(\vec{y}(t),t) = 2\int_0^t \{\text{Є}[k - \frac{2}{3}\mu q(t-\tau)]div\ \vec{v}(\vec{y}(\tau),\tau) +$$
$$+[k + \frac{4}{3}\mu q(t-\tau)]Def\ \vec{v}(\vec{y}(\tau),\tau)\}d\tau. \qquad (5)$$

Швидкості і зміщення частинок, що відбуваються в матеріальному тілі за період релаксації, а також похідні за координатами від зміщень до другого порядку включно вважаємо малими величинами (це можливо або у випадку малих швидкостей, або за швидких коливан із малою амплітудою). В початковий момент часу $t = 0$ тіло вважаємо вільним від напружень. Тому можемо прийняти:

$$\vec{v}(M,\tau) \approx \vec{v}(\vec{y},\tau) \approx \frac{\partial u(\vec{y},\tau)}{\partial \tau}, \quad \overset{\tau}{\nabla} \approx \nabla,$$

де $\vec{y} \equiv \vec{y}(t),\ \ \vec{u}(\vec{y},\tau) = \vec{e}^{\,k} u_k$ – вектор зміщення;

$(y_1, y_2; t)$ – основні незалежні змінні (змінні Ейлера).

Квазістатичне рівняння руху такого в'язкопружного середовища

$$div\Pi(\vec{y},t) + \rho(\vec{y},t)\vec{F}(\vec{y},t) = \vec{0}$$

набуває наступного вигляду:

$$\left(k + \frac{4}{3}\mu \right)\Delta\vec{u}(\vec{y},t) + 3k \cdot graddiv\vec{u}(\vec{y},t) - \frac{4}{3}\int_0^t \mu q(t-\tau)\Delta\vec{u}(\vec{y},\tau)d\tau + \vec{f}^{\,0}(\vec{y},t;\vec{u}) = \vec{0}, \quad (6)$$

Тут

$$\vec{f}^{\,0}(\vec{y},t;\vec{u}) = \left(k + \frac{4}{3}\mu\right)\rho_0 \vec{F}(\vec{y},t)[1 - div\vec{u}(\vec{y},t)] +$$
$$+ k\rho_0 \int_0^t q^*(t-\tau)\vec{F}(\vec{y},\tau)[1 - div\vec{u}(\vec{y},\tau)]d\tau, \tag{7}$$

де $\vec{F}(\vec{y},t)$ – інтенсивність масових сил;

$\rho_0 = \rho(\vec{y},0)$ – густина речовини;

$q^*(t) = \dfrac{c}{\kappa}\exp(\dfrac{c-1}{\kappa}t)$ – ядро зсувної повзучості.

В точках контуру $L(t)$ задано вектор напружень $\vec{p}_n(\vec{x},t)$:

$$\vec{n}\cdot \Pi(\vec{x},t) = \vec{p}_n(\vec{x},t),\ \ \vec{x}\in L(t),\ \ t \ge 0\,,$$

де $\vec{n}$ – нормаль до контуру $L(t)$ в його точці $\vec{x}$.

Дану граничну умову, яка доповнює рівняння (6), запишемо в іншій формі:

$$2(k + \frac{4}{3}\mu)Def\ \ \vec{u}(\vec{x},t) + 2\lambda\vec{n}div\ \vec{u}(\vec{x},t) -$$
$$-\frac{4}{3}\mu\int_0^t q(t-\tau)\{2Def\ \ \vec{u}(\vec{x},\tau) - \vec{n}\ div\ \vec{u}(\vec{x},\tau)\}d\tau = \vec{p}_n^{\,*}(\vec{x},t), \tag{8}$$

де $\vec{p}_n^{\,*}(\vec{x},t) = (k + \frac{4}{3}\mu)\vec{p}_n(\vec{x},t) + k\int_0^t q^*(t-\tau)\vec{p}_n(\vec{x},\tau)d\tau$.

Із зростанням часу $t > 0$ межа $L(t)$ області $D(t)$, яку займає платівка, зміщується. Закон зміни контура $L(t)$ будемо описувати векторним рівнянням

$$\vec{x} = \vec{x}(l,t)\,, \tag{9}$$

причому $\vec{x}(l,0) = \mathring{\vec{x}}(l)$,

де $\mathring{\vec{x}}(l)$ – задана неперервна функція;

l – довжина контуру $L(t)$ в початковий момент часу $t = 0$ ($0 < l \le a = const$).

При цьому довжина дуги $s(l,t)$ кривої $L(t)$ обчислюється за формулою:

$$s(l,t) = \int_0^l \left|\frac{\partial\vec{x}(l,t)}{\partial l}\right| dl\,.$$

Нехай $\vec{v}(l,t)$ – довільна неперервна векторна функція довжини дуги l і часу t. Розв’язок задачі (6), (8) будемо шукати у вигляді в’язкопружних потенціалів:

$$\vec{u}(\vec{y},t)=\vec{u}[\vec{f}^{\,0}]+\sum_{k=1}^{2}\vec{e}^{\,k}\int_0^t d\tau\int_{L(\tau)}\vec{v}(l,\tau)\cdot\vec{v}^{(k)}(\vec{y}-\vec{x};t-\tau)dl\,, \tag{10}$$

тут

$$\vec{u}[\vec{f}^{\,0}]=\sum_{k=1}^{2}\vec{e}^{\,k}\int_0^t d\tau\iint_{D(\tau)}\vec{v}^{(k)}(\vec{y}-\vec{x};t-\tau)\cdot\vec{f}^{\,0}(\vec{x},\tau;u)ds\,. \tag{11}$$

Контур $L(\tau)$ визначається поки що невідомою функцією (9). Символами $\vec{v}^{(k)}(\vec{y}-\vec{x};t-\tau)$ позначено фундаментальний розв'язок рівняння (6), який визначається за умови $\vec{f}^{\,0}(\vec{y},t;u)=\vec{e}^{\,k}\delta(t-\tau)\delta(\vec{y}-\vec{x})$. Скориставшись результатами [5], фундаментальний розв'язок у випадку ядра релаксації (3) можна виразити через дві скалярні функції $\omega(\vec{x},t)$ і $\varphi(\vec{x},t)$:

$$4\pi\vec{v}^{(1)}(\vec{x}-\vec{y},t-\tau)=rot\ \vec{e}^{\,3}\,\frac{\partial\omega^*(\vec{x}-\vec{y},t-\tau)}{\partial x_2}+grad\,\frac{\partial\varphi^*(\vec{x}-\vec{y},t-\tau)}{\partial x_1},$$

$$4\pi\vec{v}^{(2)}(\vec{x}-\vec{y},t-\tau)=-rot\ \vec{e}^{\,3}\,\frac{\partial\omega^*(\vec{x}-\vec{y},t-\tau)}{\partial x_1}+grad\,\frac{\partial\varphi^*(\vec{x}-\vec{y},t-\tau)}{\partial x_2}.$$

Ці функції мають такий вигляд:

$$4\pi\varphi^*(\vec{x},t)=\frac{r^2(1-\ln r)}{8\mu}\left[(1+3m)\delta(t)+\frac{c}{\kappa}\exp(\frac{c-1}{\kappa}t)+\frac{3cm^2}{\kappa}\exp(\frac{mc-1}{\kappa}t)\right]-\psi_0(\vec{x},t);$$

$$4\pi\omega^*(\vec{x},t)=\frac{r^2(1-\ln r)}{2\mu}\left[\delta(t)+\frac{c}{\kappa}\exp(\frac{c-1}{\kappa}t)\right]-\psi_0(\vec{x},t),$$

де

$$\psi_0(\vec{x},t)=\frac{3r^2}{32\mu}\left[(1-m)\delta(t)+\frac{c}{\kappa}\exp(\frac{c-1}{\kappa}t)-\frac{cm^2}{\kappa}\exp(\frac{mc-1}{\kappa}t)\right];$$

$$r=|\vec{x}|,\ \ m=\mu/(3k+\mu).$$

Окрім основної нерухомої декартової системи $\{\vec{e}^{\,1},\ \vec{e}^{\,2}\}$ приймемо ще дві місцеві координатні системи $\{\vec{n},\ \vec{s}\}$ і $\{\vec{n}_0,\ \vec{s}_0\}$, пов'язані відповідно із змінною $\vec{x}$ і фіксованою $\vec{x}^{\,0}$ точками гладкого контуру $L(t)$ (рис.1). Покладемо $\vec{v}(l,t)=\vec{n}\nu_1(l,t)+\vec{s}\nu_2(l,t)$ і підставимо вираз (10) в граничну умову (8); приходимо до системи інтегральних рівнянь відносно компонент шуканої векторної щільності $\vec{v}(l,t)$ потенціалу:

$$\pi\nu_1(l_0,t)+\int_{L(t)}\sum_{i=1}^{2}\nu_i(l,t)K_{1i}^*(l,l_0)\left|\frac{\partial\vec{x}(l,t)}{\partial l}\right|dl+$$

$$+\int_0^t k^*(t-\tau)d\tau \int_{L(\tau)} \sum_{i=1}^{2} \nu_i(l,\tau) k_{1i}^*(l,l_0) \left| \frac{\partial \vec{x}(l,\tau)}{\partial l} \right| dl = \psi_1^*(l_0,t), \qquad (12)$$

$$\pi \nu_2(l_0,t) + \int_{L(t)} \sum_{i=1}^{2} \nu_i(l,t) K_{2i}^*(l,l_0) \left| \frac{\partial \vec{x}(l,t)}{\partial l} \right| dl +$$

$$+\int_0^t k^*(t-\tau)d\tau \int_{L(\tau)} \sum_{i=1}^{2} \nu_i(l,\tau) k_{2i}^*(l,l_0) \left| \frac{\partial \vec{x}(l,\tau)}{\partial l} \right| dl = \psi_2^*(l_0,t).$$

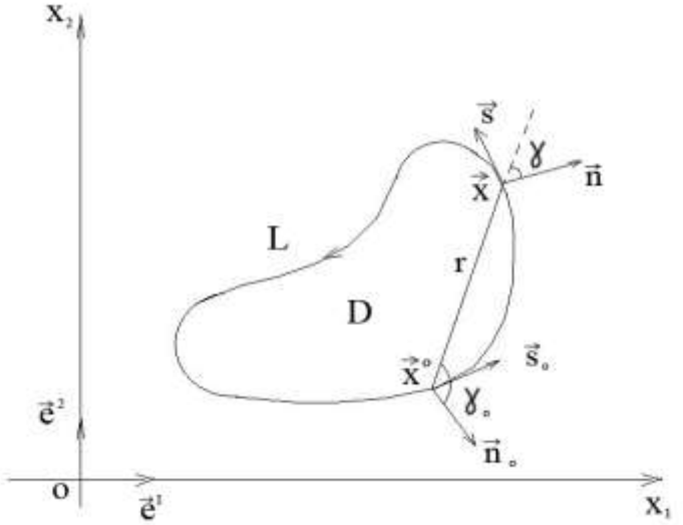

Рис. 1. Місцеві координатні системи

Ядра $K_{ij}^*(l,l_0)$ і $k_{ij}^*(l,l_0)$ в цих рівняннях та функція $k^*(t)$ мають вигляд:

$$K_{11}^*(l,l_0) = \frac{1}{r(t)}\left[\frac{3}{4}(1-\mu^*)\cos\gamma + \cos\gamma\cos 2\gamma_0 + \frac{1}{4}(1+3\mu^*)\sin\gamma\sin 2\gamma_0\right],$$

$$K_{12}^*(l,l_0) = \frac{1}{r(t)}\left[\frac{3}{4}(1-\mu^*)\sin\gamma + \sin\gamma\cos 2\gamma_0 - \frac{1}{4}(1+3\mu^*)\cos\gamma\sin 2\gamma_0\right],$$

$$K_{21}^*(l,l_0) = \frac{1}{r(t)}\left[\cos\gamma\sin 2\gamma_0 - \frac{1}{4}(1+3\mu^*)\sin\gamma\cos 2\gamma_0\right],$$

$$K_{22}^*(l,l_0) = \frac{1}{r(t)}\left[\sin\gamma\sin 2\gamma_0 + \frac{1}{4}(1+3\mu^*)\cos\gamma\cos 2\gamma_0\right];$$

$$k_{11}^*(l,l_0) = \frac{3\mu^*}{4r(\tau)}\ \cos\gamma - \sin\gamma\sin 2\gamma_0\ ,$$

$$k_{12}^*(l,l_0) = \frac{3\mu^*}{4r(\tau)}\ \sin\gamma + \cos\gamma\sin 2\gamma_0\ ,$$

$$k_{21}^*(l,l_0) = \frac{3\mu^*}{4r(\tau)}\sin\gamma\cos 2\gamma_0,$$

$$k_{22}^*(l,l_0) = -\frac{3\mu^*}{4r(\tau)}\cos\gamma\cos 2\gamma_0;$$

$$k^*(t) = \frac{3kc}{\kappa(3k+\mu)}\exp(-\beta t).$$

Тут $\mu^* = \dfrac{\mu}{3k+\mu}$, $\beta = \dfrac{3k+\mu(1-c)}{\kappa(3k+\mu)}$, $r = r(t) = \left|\vec{x}(l,t) - \vec{x}(l_0,t)\right|$, $\gamma = (\vec{r}, \widehat{\ } \vec{n})$, $\gamma_0 = (\vec{r}, \widehat{\ } \vec{n}_0)$.

Праві частини $\psi_1^*(l_0,t)$ та $\psi_2^*(l_0,t)$ системи рівнянь (12) є відповідно нормальною та дотичною компонентами функції:

$$\vec{\psi}^*(l_0,t) \equiv \vec{n}_0\psi_1^*(l_0,t) + \vec{s}_0\psi_1^*(l_0,t) = 2\pi\vec{p}_n^*(l_0,t) + \vec{g}[\vec{f}\,],$$

де вираз $\vec{g}[\vec{f}\,]$ одержується із лівої частини співвідношення (8), якщо туди підставити замість $\vec{u}$ функцію (11).

Алгоритм чисельного розв'язування одержаної системи інтегральних рівнянь другого роду (12) ґрунтується на методі "кроків за часом" . Згідно з цим методом, в кожен момент часу послідовно розв'язуються два рівняння Фредгольма другого роду відносно компонент векторної щільності $\vec{v}(l,t)$. За знайденими щільностями в момент часу $t = t_k$ обчислюються переміщення $\vec{u}(\vec{x},t_k)$ точок межі області $D(t)$. Знаючи ці переміщення, за наближеною формулою

$$\vec{x}(l,t_{k+1}) \approx \vec{u}(\vec{x},t_k) + \vec{x}^0(l), \quad k = 0,1,2,\ldots$$

визначаються координати точок рухомої межі $L(t)$ платівки в наступний момент часу $t = t_{k+1}$. На кожному наступному кроці обчислень замість функції $\vec{u}(\vec{x},t)$, яка міститься у виразі (7) функції $\vec{f}(\vec{x},t;\vec{u})$, потрібно підставляти значення, обчислені в попередній момент часу.

Висновки і перспективи подальших досліджень. Побудовано систему гранично-часових інтегральних рівнянь другого роду для задачі про деформування тонкої в'язкопружної платівки. Наведено вигляд ядер цих рівнянь у випадку реологічної моделі з експоненціальним ядром релаксації. Одержана система допускає покрокове (за часом) чисельне розв'язування з використанням ПК для моделювання руху межі області, яку займає платівка.

Список використаних джерел

1. Белоносов, С. М. Применение интегральных представлений к решениям задач теплопроводности и динамики в'язком жидкости / С. М. Белоносов, В. Г. Овсиенко, В. Я. Карачун. – К.: Выща шк., 1989. – 163 с.

2. Бенерджи, П. Методы граничних элементов в прикладних науках / П. Бенерджи, Р. Баттерфилд. – М.: Мир,1984. – 494 с.

3. Теллес, Д. Применение метода граничних элементов для решения неупругих задач / Д. Теллес. – М.: Стройиздат, 1987. -159 с.

4. Нещадим О. М. Граничні інтегральні рівняння для задач про плоскі деформації в’язкопружного циліндричного тіла. / О. М. Нещадим, Ю. Б. Гнучій // Науковий вісник НУБіП України. Серія “Техніка та енергетика АПК”. – 2011. – Вип.166, ч. 3. – С.235–242.

5. Белоносов, С. М. Фундаментальное решение системы дифференциальных уравнений динамики вязкоупругой среды, характеризуемой моделью Максвелла. – В кн: Нелинейные дифференциальные уравнения в прикладных задачах / С. М. Белоносов, А. М. Нещадим, Ю. Н. Редкобородый. – К.: Ин-т математики АН УССР, 1984. – С.48–52.

References

1. Belonosov, S.M., Ovsiyenko, V. G., Karachun, V.Y. (1989). Primeneniye integral’nykh predstavleniy k resheniyam zadach teploprovodnosti i dinamiki v’yazkom zhidkosti [Application of integral representations to solutions of heat conduction problems and the dynamics of a viscous fluid]. Kyiv,: Vyshcha shkola, 163.

2. Benerdzhi, P., Batterfild R. (1984). Metody granichnikh elementov v prikladnikh naukakh [Methods of boundary elements in applied sciences]. Moskow, Mir, 494.

3. Telles, D. (1987). Primeneniye metoda granichnikh elementov dlya resheniya neuprugikh zadach [Application of the method of boundary elements to solve inelastic problems]. Moskow, Stroyizdat, 159.

4. Neshchadym, O.M., Hnuchii Y. B. (2011). Hranychni intehralni rivniannia dlia zadach pro ploski deformatsii v’iazkopruzhnoho tsylindrychnoho tila. [Boundary integral equations for problems of flat viscoelastic deformation of the cylindrical body.]. Naukovyi visnyk NUBiP Ukrainy. Seriia “Tekhnika ta enerhetyka APK”, 166 (3), 235–242.

5. Belonosov, S.M., Neshchadim, A. M., Redkoborodyy, Y. N. (1984). Fundamental’noye resheniye sistemy differentsial’nykh uravneniy dinamiki vyazkouprugoy sredy, kharakterizuyemoy model’yu Maksvella [A fundamental solution of the system of differential equations for the dynamics of a viscoelastic medium characterized by the Maxwell model.]. V kn: Nelineynyye differentsial’nyye uravneniya v prikladnykh zadachakh . Kyiv, In-t matematiki AN USSR, 48–52.

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ ДЕФОРМИРОВАНИЯ ТОНКОЙ ВЯЗКОУПРУГОЙ ПЛАСТИНКИ

А. М. Нещадим, А. П. Зинькевич, В. М. Сафонов

Аннотация. *Рассматривается методика решения плоской квазистатической задачи для тонкой вязкоупругой пластинки. Вязкоупругая среда подпадает под математическую модель Максвелла. Суть методики заключается в приведении краевой задачи для квазистатического уравнения движения вязкоупругой пластинки к системе предельно-часовых интегральных уравнений относительно некоторых произвольных функций – плотностей потенциалов. Такие интегральные уравнения содержат интегралы как по границе области, которую занимает пластинка, так и по переменной времени.*

Для реализации этой методики используется фундаментальное решение интегро-дифференциального уравнения плоского равновесия и выписано интегральное представление искомого решения краевой задачи через вязкоупругие потенциалы. Такие интегралы содержат произведения фундаментального решения (функций, зависящих от переменных интегрирования и параметров – времени и координат в заданной области) на плотности потенциалов. Важно, что упомянутая интегральная зависимость связывает интегралы по исследуемой области с потенциалами по границе этой области. Подстановка такого интегрального представления искомого решения в граничное условие с учетом свойств вязкоупругих потенциалов приводит к предельно-часовым интегральным уравнениям второго рода.

На практике неизвестные плотности потенциалов определяются из системы линейных алгебраических уравнений, которой приближенно заменяют полученные интегральные уравнения. Предложен алгоритм решения такой системы и нахождения координат точек подвижной границы области.

Ключевые слова*: вязкоупругость, ядро релаксации, ядро ползучести, модель Максвелла, вязкоупругий потенциал, фундаментальное решение, плотность потенциала, граничное интегральное уравнение, ядро интегрального уравнения*

MATHEMATICAL MODEL OF DEFORMATION THIN VISCOELASTIC PLATE

A. Neshchadym, A. Zinkevych, V. Safonov

Abstract. *We consider the method of solving the plane problem for quasi-static viscoelastic thin plate. Viscoelastic medium is subject to the mathematical model of Maxwell. The technique consists in the construction of boundary value problem for quasi-static equations of motion of viscoelastic plate system is extremely time-integral equations for some random functions - density potential. Such integral equations containing integrals over the boundary of the domain occupied by the plate, and by the time variable.*

To implement this technique uses fundamental solution of integral-differential equation of equilibrium plane and discharged integral representation of the desired solution of the boundary problem through viscoelastic potentials. Such integrals containing products of fundamental solution (functions dependent variables and integration parameters - time and coordinates in a given area) at the potential density. It is important that the above integral dependence relates the integrals over the study area with the potential on the boundary of this region. The substitution of the integral representation of the desired solution of the boundary conditions based viscoelastic properties of potential leads to extremely time-integral equations of the second kind.

In practice, the unknown potential density determined from a system of linear algebraic equations, which replaces approximately obtained integral equations. The proposed algorithm for solving this system and finding the coordinates of points on the moving boundary.

Keywords: ***viscoelasticity, kernel of relaxation, kernel of creep, model of Maxwell, viscoelastic potential, fundamental solution, density of potential, boundary integral equations, kernel of integral equation***