***Abstract.*** *Pollution of the water environment with heavy metals is a serious environmental problem, which requires the search for effective, affordable and cheap methods of its purification, in particular, using hydrobionts.*

*The purpose of this work was to study the ability of green filamentous algae Cladophora glomerata (L.) Kütz. and Oedogonium cardiacum (Hass.) Wittr. to accumulate of heavy metals from water environment and also to assess the possibility of their using for water purification. Determination of the metals content in algae was carried out by the method of atomic-adsorption spectrophotometry.*

*The obtained results indicate to high accumulation capacity of Cladophora glomerata and Oedogonium cardiacum for copper and manganese ions. With an increasing of the concentration of $Cu^{2+}$ and $Mn^{2+}$ in the aquatic environment, there is an almost proportional increase of the content of these metals in the investigated algae. Along with the ability to accumulate a significant amount of metals, filamentous algae Cladophora glomerata and Oedogonium cardiacum are sufficiently resistant to their action. In this regard, these species of algae can be recommended for removal of metals from water with a high level of pollution, in particular, for the treatment of wastewater.*

***Keywords: heavy metals, copper, manganese, filamentous algae, accumulation, water purification***

УДК 330.4+519.22

# СТАТИСТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ ДЛЯ ИДЕНТИФИКАЦИИ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ В ПРИКЛАДНЫХ ЗАДАЧАХ С ЦЕЛЬЮ ЭКОНОМИИ ЗАТРАТ

**И. В. СТЕПАХНО**, кандидат физико-математических наук, доцент
**Ю. Б. ГНУЧИЙ**, доктор физико-математических наук, профессор
**О. Ю. ДЮЖЕНКОВА**, кандидат физико-математических наук, доцент
***Национальный университет биоресурсов и природопользования Украины***
*E-mail:* stir@ukr.net, oduzen@ukr.net

***Аннотация.*** *Представлен метод многомерного статистического анализа, рассмотрено понятие идентификации математико-статистической модели и рассчитаны коэффициенты влияния параметров модели на определяемые значения маневренных и экономических характеристик сложной технической системы. Основным инструментом обработки входной информации предложен аппарат теории случайных матриц. Проблемы построения математических моделей в современных условиях при использовании очень большого количества параметров требуют разработки таких подходов, в которых* *представляется возможным учесть все необходимые ситуации жизненных циклов, не искажая реального функционирования многоуровневых систем и не теряя при этом важной входной информации.*

*Мировая и отечественная практика судовождения насчитывает значительное число аварий и аварийных ситуаций, возникающих в результате ошибок, допущенных судоводителями при маневрировании, особенно в сложных путевых условиях плавания или швартовки. Это связано прежде всего с тем, что выбор тактики маневрирования базируется в основном на опыте и интуиции судоводителя и глазомерной оценке ситуации движения.*

*Принятие решения о корректировке маневра реализуется методом проб и ошибок, цена которых может оказаться весьма высокой. Субъективная оценка ситуации до начала маневра и после его инициации является основным источником ошибок, приводящих к авариям. Альтернативой этой субъективности может быть только хорошее знание параметров математической модели судна и компьютерное проигрывание предполагаемого маневра на основе такого знания.*

*Существует два пути получения такого знания. Первый путь состоит в построении математической модели судна один раз по результатам ходовых испытаний и в дальнейшем пользовании такой моделью с коррекцией на условия плавания. Другой путь заключается в получении параметров модели постоянно в процессе эксплуатации судна и использовании этой обновляемой модели для прогнозирования планируемых маневров. В статье используются методы доказательства теорем для случайных матриц, детально изученные в приведенной литературе.*

***Ключевые слова: многомерный статистический анализ, вероятность, математическая модель, случайная матрица***

**Актуальность**. Разработка статистических методов очень часто требует получения объективной информации для выбора способа прогнозирования ситуации. Ставится задача: показать преимущества использования некоторых вероятностных подходов на практическом примере сложной технической системы (судовождения при реализации маневра).

**Анализ последних исследований и публикаций.** Теоретико-вероятностный подход к решению прикладных задач, в которых количество параметров велико, рассматривался в работах В. Л. Гирко [1]–[4]. Созданный аппарат в теории случайных матриц достаточно доказателен на безразмерных входных данных и для подтверждения и апробации проводились исследования на примерах сложных математических моделей.

**Цель исследования.** Существует масса прикладных задач в жизни общества, в которых без использования построения моделей практически невозможно безошибочно просчитать множество показателей. Обслуживание речных и морских судов, а также портов является актуальной задачей, для решения которой необходимо применять научный метод математической статистики. Рассматривая данные статистики по аварийности, становится понятным, что жизненный цикл оборудования имеет определенные временные и пространственные ограничения. Многомерность экономических и технических показателей каждой эксплуатируемой единицы усложняет интуитивное оценивание ситуации в каждом конкретном случае. Проводить множество испытаний невыгодно, и параметры характеристик поступают с искажениями.

Становится понятным, что применение многомерного статистического анализа в данных условиях позволяет учесть все приведенные выше трудности. Предлагается провести статистическую обработку большого количества наблюдений с учетом вероятностных ошибок в рамках допущенных ограничений. Для более точной идентификации предлагаемой математико-статистической модели необходимо собрать всю информацию, поступающую в разные моменты жизненных циклов судов, и записать ее в соответствующую матрицу. Эта информация должна учитываться постоянно в процессе эксплуатации судна и использоваться в обновляемой модели для прогнозирования планируемых маневров.

При создании математических (или имитационных) моделей сложных технических, информационных и других систем очень часто конструируется возможность управления (прогнозирования) поведением системы путем влияния на ее основные, «узловые» показатели. Поскольку на практике входные данные подаются с искажениями, имеющими вероятностный характер, то приходится заниматься исследованием оценивания поведения некоторых функций от таких «узловых» характеристик, но уже в следующем построении.

**Материалы и методы исследования.** Пусть $X_i, i=\overline{1,s}$ – независимые наблюдения над случайной матрицей $\mathrm{A}+\Xi$, где $\mathrm{A}=(a_{ij})$ – вещественная матрица, $i=\overline{1,n},\ j=\overline{1,m},\ \Xi=(\xi_{ij})$ – случайная матрица той же размерности.

Обозначим через $\lambda_k$ сингулярные собственные числа матрицы $\mathrm{A}$, а через $\hat{\lambda}_k$ – сингулярные собственные числа матрицы $\hat{\mathrm{A}}=s^{-1}\cdot\sum_{i=1}^{s}X_i$. Очевидно, что если элементы матрицы $\Xi$ независимы, имеют нулевые средние и дисперсии $s^{-1}\sigma^2$, то элементы матрицы $\hat{\mathrm{A}}$ также независимы и имеют дисперсии $s^{-2}\sigma^2$.

Будем считать, что числа $m, n, \sigma^2, s$ зависимы и удовлетворяют следующим условиям:

$$\overline{\lim_{m\to\infty}}\,\sigma^2 s^{-1} n<\infty,\quad \overline{\lim_{m\to\infty}}\,\sigma^2 s^{-1} m<\infty,\quad \overline{\lim_{m\to\infty}}\,mn^{-1}<1,\quad \underline{\lim_{m\to\infty}}\,mn^{-1}>0. \qquad (1)$$

Пусть $$\hat{\lambda}_{\mathrm{k}}(\mathrm{A})\le C<\infty,\ C=\mathrm{const},\ k=1,2,...,\quad \lambda_1\ge\lambda_2\ge...\ge\lambda_{\mathrm{m}}. \qquad (2)$$

Рассмотрим сингулярные спектральные функции

$$\hat{\mu}_{\mathrm{m}}(x) = m^{-1}\sum_{k=1}^{m}\chi(\hat{\lambda}_k < x),$$

где $\begin{cases} 1, \text{если } \hat{\lambda}_{\mathrm{k}} < x, \\ 0, \text{если } \hat{\lambda}_{\mathrm{k}} \geq x \end{cases}$, то есть индикатор события $\{\hat{\lambda}_{\mathrm{k}} < x\}$, $\hat{\lambda}_k$ – корни характеристического уравнения $\det\left(\mathrm{I}\cdot\lambda - \sqrt{\hat{A}'\hat{A}}\right) = 0$.

Таким образом, $\hat{\mu}_{\mathrm{m}}(x)$ – ступенчатая функция, имеющая положительные скачки величиной $m^{-1}$ в точках $x = \hat{\lambda}_{\mathrm{k}}$, т.е. это эмпирическая функция распределения. Функция $\hat{\mu}_{\mathrm{m}}(x)$ сложно выражается через элементы матрицы $\widehat{A}$, точные формулы до сих пор неизвестны, так как в силу теоремы Абеля для корней полиномов степени 5 и выше нет точных формул, выражающихся в виде рациональных функций через коэффициенты полинома. Поэтому непосредственно находить асимптотическое выражение для $\hat{\mu}_{\mathrm{m}}(x)$ не представляется возможным. Удобным инструментом для изучения асимптотического поведения $\hat{\mu}_{\mathrm{m}}(x)$ является преобразование Стилтьеса. Для такой функции интеграл Стилтьеса вычисляется в явном виде:

$$\hat{b}_{\mathrm{m}}(z) = \int_{-\infty}^{+\infty}(x-z)^{-1}\,\mathrm{d}\,\hat{\mu}_{\mathrm{m}}(x) = \mathrm{m}^{-1}\sum_{k=1}^{m}\frac{1}{\hat{\lambda}_k - z}, \tag{3}$$

где $z = e_1 + ie_2,\ e_2 \neq 0.$

Поскольку в последнем равенстве выражение справа есть не что иное, как $\mathrm{m}^{-1}\,\mathrm{sP}\left(-\mathrm{I}z + \hat{A}'\hat{A}\right)^{-1}$, то задача свелась к исследованию асимптотического поведения следов обратных случайных матриц.

Выражение $\left(-\mathrm{I}z + \hat{A}'\hat{A}\right)^{-1}$ называется резольвентой матрицы $\hat{A}'\hat{A}$, которая является матрицей Грама. Очевидно, что матрица $\hat{A}$ распределена так же, как и матрица $\mathrm{A} + \Xi$, где $\Xi$ – случайная матрица с независимыми элементами.

Таким образом, вектор-столбцы матрицы $\hat{A}'$ стохастически независимы. Для матрицы $\hat{A}'\hat{A}$ доказана следующая теорема.

*Теорема*. Пусть выполняются условия (1), (2), причем случайные элементы $\xi_{ij}$ матрицы $\Xi$ для каждого $n$ независимы, $\mathrm{M}\,\xi_{ij} = 0$, $\mathrm{D}\,\xi_{ij} = s^{-1}\sigma^2$. Тогда

$$\operatorname*{plim}_{m\to\infty}\mathrm{m}^{-1}\mathrm{sP}\left[\left(-\mathrm{I}z + \hat{A}'\hat{A}\right)^{-1} - \mathrm{M}\left(-\mathrm{I}z + \hat{A}'\hat{A}\right)^{-1}\right] = 0\,.$$

Доказательство этой теоремы основывается на стандартных формулах возмущений для резольвент матриц [1].

**Результаты исследования и их обсуждение.** Используя аппарат многомерного статистического анализа, в том числе и метод главных компонент, можно установить, какие коэффициенты в большей степени влияют на определенную характеристику и каким образом – в сторону увеличения или уменьшения. При этом коэффициенты влияния позволяют упростить и ускорить процесс идентификации. Действительно для точной идентификации параметров математической модели судна приходится затрачивать значительные временные и материальные ресурсы. К ним относится постановка самих испытаний и последующая обработка их результатов.

Возможно, такая обработка покажет необходимость новых испытаний с повторением всего технологического процесса. Если же мы будем знать, что конкретный параметр модели слабо влияет на данную маневренную характеристику, то не будем уточнять его многократно, сократив тем самым процесс “подгонки”. Все коэффициенты влияния собирают в таблицу – матрицу $\mathrm{A}$ размерности $m \times n$. Однако вследствие того, что в большинстве случаев элементы матрицы $\mathrm{A}$ известны с некоторыми случайными ошибками, часто вместо матрицы $\mathrm{A}$ мы рассматриваем наблюдения $X_i$, над матрицей $\mathrm{A} + \Xi$, то есть реализации независимых случайных матриц. В исследованиях оценки параметров определялись, исходя из собственных значений и собственных векторов корреляционной матрицы, рассчитанной по исходным данным.

**Выводы и перспективы.** Если проводить наблюдения $X_1, X_2, ..., X_s$ над определенным классом суден, то они отражают большое количество измерений характеристик каждого судна. В частности, упор винта к силе сопротивления движению, силу продольного сопротивления, угол дрейфа, разгонные, тормозные характеристики судна, скорость ветра, направление ветрового сноса судна, параметры движения и т.д. Проведя расчеты устанавливают, какие коэффициенты в большей степени влияют на определенную характеристику судна и каким образом. Полученные коэффициенты влияния позволяют обеспечить процесс идентификации построенной модели. А это, в свою очередь, позволяет не только уменьшить материальные затраты, но и оптимизировать качественный прогноз исследуемых процессов.

**Список литературы**

1. Гирко В. Л. G–оценка сингулярных собственных чисел матриц / В. Л. Гирко, И. В. Степахно // Докл. АН УССР. – 1990. – № 8, серия А. – С. 14–17.

2. Girko V. L. Theory of Linear Algebraic Equations with Random Coefficients / V. L. Girko. – New York, 1996. – 302 p.

3. Girko V. L. An Introduction to Statistical Analysis of Random Arrays / V. L. Girko. – VSP, 1998. – P. 5–11.

4. Girko V. L. Theory of stochastic canonical equations. / V. L. Girko. – Kluwer Publishers (Netherlands), 2001. – 316 p.

**References**

1. Girko, V. L., Stepahno, I. V. (1990). G–otsenka singulyarnyh sobstvennyh chisel matrits. [G-estimate of matrices singular eigenvalues]. Doklady AN USSR, 8(A), 14 – 17.

2. Girko, V. L. (1996). Theory of Linear Algebraic Equations with Random Coefficients. New York, 302.

3. Girko, V. L. (1996). An Introduction to Statistical Analysis of Random Arrays. VSP, 5–11.

4. Girko, V. L. (2001). Theory of stochastic canonical equations. Kluwer Publishers (Netherlands), 316.

## СТАТИСТИЧНИЙ АНАЛІЗ ДЛЯ ІДЕНТИФІКАЦІЇ МАТЕМАТИЧНОЇ МОДЕЛІ У ПРИКЛАДНИХ ЗАДАЧАХ З МЕТОЮ ЕКОНОМІЇ ВИТРАТ

**І. В. Степахно,**
**Ю. Б. Гнучий,**
**О. Ю. Дюженкова**

***Анотація.*** *Представлено метод багатовимірного статистичного аналізу, розглянуто поняття ідентифікації математико-статистичної моделі та розраховано коефіцієнти впливу параметрів моделі на обумовлені значення маневрених і економічних характеристик складної технічної системи. Основним інструментом обробки вхідної інформації запропоновано апарат теорії випадкових матриць. Проблеми побудови математичних моделей в сучасних умовах при використанні значної кількості параметрів потребують розробки таких підходів, в яких уявляється можливим врахування всіх необхідних ситуацій життєвих циклів, не спотворюючи реального функціонування багаторівневих систем і не втрачаючи при цьому важливої вхідної інформації.*

*Світова й вітчизняна практика судноводіння налічує значну кількість аварій і аварійних ситуацій, що виникають в результаті помилок, допущених судноводіями при маневруванні, особливо в складних дорожніх умовах плавання або швартування. Це пов'язано, перш за все, з тим, що вибір тактики маневрування базується, в основному, на досвіді та інтуїції судноводія та окомірної оцінки ситуації руху.*

*Ухвалення рішення про коригування маневру реалізується методом проб і помилок, ціна яких може виявитися доволі високою. Суб'єктивна оцінка ситуації до початку маневру і після його ініціації є основним джерелом помилок, що призводять до аварій. Альтернативою цій суб'єктивності може бути тільки добре знання параметрів математичної моделі судна і комп'ютерне програвання передбачуваного маневру на основі такого знання.*

*Існує два шляхи отримання такого знання. Перший шлях полягає в побудові математичної моделі судна один раз за результатами ходових випробувань і в подальшому користуванні такою моделлю з корекцією на умови плавання. Інший шлях полягає в отриманні параметрів моделі постійно в процесі експлуатації судна і використанні* *цієї оновлюваної моделі для прогнозування планованих маневрів. У статті використано методи доведення теорем для випадкових матриць, детально вивчені в наведеній літературі.*

***Ключові слова: багатовимірний статистичний аналіз, ймовірність, математична модель, випадкова матриця***

## STATISTICAL ANALYSIS FOR THE IDENTIFICATION OF THE MATHEMATICAL MODEL IN APPLIED PROBLEMS WITH THE PURPOSE OF COST SAVINGS

**I. V. Stepakhno,**
**Yu. B. Gnuchiy,**
**O. Yu. Dyuzhenkova**

***Abstract.*** *In this article the method of multivariate statistical analysis is presented and the concept of identification of the mathematical statistical model is considered. The coefficients of the model parameters influence on the determined values of the maneuverability and economic characteristics of a complex technical system are calculated. The basic tool for processing input information is the apparatus of the theory of random matrices. Problems of constructing mathematical models in modern conditions when using a very large number of parameters require the development of approaches in which it's possible to take into account all the necessary situations of life cycles without distorting the real functioning of multi-level systems and without losing important input information.*

*World and native practice of navigation has a significant number of accidents and emergency situations arising from errors made by boatmasters during maneuvering, especially in difficult navigation conditions of navigation or mooring. This is primarily due to the fact that the choice of maneuver tactics is based mainly on the experience and intuition of the boatmaster and the visual assessment of the traffic situation.*

*The decision to adjust the maneuver is implemented by trial and error, the price of which can be very high. Subjective assessment of the situation before the start of maneuver and after its initiation is the main source of errors leading to accidents. An alternative to this subjectivity can be only a good knowledge of the parameters of the mathematical model of the ship and computer playback of the expected maneuver based on this knowledge.*

*There are two ways of obtaining such knowledge. The first way is to build a mathematical model of the ship once by the results of sea trials and in the future use of such a model with a correction for the conditions of navigation. The other way is to obtain the model parameters continuously during the operation of the vessel and use this updated model to predict the planned maneuvers. In this paper we use methods for proving theorems for random matrices, which have been studied in detail in the literature cited.*

***Keywords: multivariate statistical analysis, probability, mathematical model, stochastic matrix***