Abstract. *The general problems of the practical stability of systems of ordinary differential equations, depending on parameters, with continuous perturbations are considered. In the framework of the formulated problems, a linear system was studied in the presence of known or perturbation-bound perturbations. The algorithms of numerical construction of the regions of external and internal stability in the structurally determined form for linear and nonlinear dynamic constraints on phase coordinates are developed. Separately, the case of compatible restrictions on the state vectors and system parameters are considered.*
Keywords: practical stability, perturbation, norm, parametric system, dynamic constraints

УДК 515.164

ТОПОЛОГІЧНА ЕКВІВАЛЕНТНІСТЬ ФУНКЦІЙ ДВОХ ЗМІННИХ

Т. Г. КРИВОРОТ, кандидат педагогічних наук, старший викладач
Національний університет біоресурсів і природокористування України
E-mail: tania.krivorot@gmail.com

Анотація. *Багато процесів, які виникають у природничих науках описуються гладкими та неперервними функціями. При створенні класифікації неперервних функцій виникає багато труднощів, оскільки поведінка функції в околі критичної точки може бути складною і не є аналогічною до гладкого випадку. Питання класифікації та дослідження умов топологічної еквівалентності функцій двох змінних на многовидах є важливим напрямом дослідження в топології.*

У статті розглянуто питання топологічної еквівалентності неперервних функцій двох змінних. Їх топологічна класифікація повністю проведена у випадку гладких функцій на многовидах. Доведено, що в околі ізольованої критичної точки функція топологічно еквівалентна Rezn, а в околі локального мінімуму (максимуму) еквівалентна x2 + y2. Проілюстровано один із класів неперервних функцій, що мають лише особливість типу сідло, а також розглянуто випадок функцій з ізольованим локальним мінімумом (максимумом). Охарактеризовано випадок неперервних функцій з точкою ізольованого локального мінімуму (максимуму) у внутрішності області, побудовані приклади, які окреслюють особливості, що можуть виникнути і стати перешкодою при топологічній класифікації функцій двох змінних.
Ключові слова: топологічна еквівалентність, функція, многовид, ізольований локальний екстремум

Актуальність. Серед гладких та неперервних функцій важливе місце займають гармонічні функції, які є основним апаратом при розв'язанні задач з фізики та механіки. Так, наприклад, потенціал сили тяжіння в області, яка не містить мас, що притягуються, потенціал постійного електричного поля в області, що не містить електричних зарядів, потенціал швидкості безвихрового руху рідини, температура тіла за умови стабільного розподілу тепла, величина деформації мембрани, натягнутої на довільний контур – усі ці процеси описуються гармонічними функціями. Тому дуже важливо дослідити топологічну поведінку таких функцій.

Аналіз останніх досліджень та публікацій. Питанню класифікації та дослідження умов топологічної еквівалентності функцій присвячено роботи О. В. Болсінова [1], С. І. Максименка [3], А. А. Ошемкова [4], В. В. Шарка [5]. У вирішенні проблеми окресленого напряму першою стала робота О. П. Андріюк [2], де було встановлено критерій топологічної еквівалентності функцій з класу F(D2), що збігається з класом псевдогармонічних функцій, які приймають не більш ніж одне критичне значення. Кожній такій функції автор ставить у відповідність її комбінаторний інваріант. Топологічну класифікацію гладких функцій проведено у роботах В. І. Арнольда, а саме: класифіковано відображення R1→R1. Проте, задача класифікації для багатовимірного випадку залишається до кінця не розв'язаною.

Мета дослідження – дослідити питання існування критерію топологічної еквівалентності функцій двох змінних з ізольованим локальним екстремумом.

Матеріали і методи дослідження. Розглянемо питання топологічної класифікації функцій у випадку, коли область містить ізольований мінімум (максимум). За теоремою Жордана, якщо γ замкнена, жорданова крива в R2, то R2 \ γ складається з двох множин, для кожної з яких γ є межею. В точності одна із цих областей обмежена. Плоска, замкнена, жорданова крива γ обмежує зіркоподібну область, якщо у замиканні області існує точка така, що кожен прямолінійний відрізок, який сполучає її з довільною точкою кривої повністю належить замиканню області. Таку точку назвемо центром зіркоподібності.

Теорема 1. Якщо *γ* обмежує зіркоподібну область, то сукупність центрів зіркоподібності є замкненою та зв'язною множиною.

Доведення. Нехай γ крива, що задовольняє умову теореми, *S* – множина її центрів зіркоподібності, а Г – область, що обмежена кривою γ. Проведемо доведення теореми методом від супротивного.

Припустимо, що *S* є відкритою, тоді існує послідовність точок S_1, S_2, …, S_n така, що $S_i \in S$ і збігається до деякої точки $O \in \bar{S}$, яка не має властивості зіркоподібності. Це означає, що в цій точці існує промінь *l*, який перетинає γ принаймні в трьох точках. Розглянемо на *l* відрізок, що не належить $\bar{\Gamma}$, і позначимо його через AB так, що $\overline{AO}$ повністю належить

$\bar{\Gamma}$. Далі, на γ обираємо точки A_1 та A_2 такі, що $\rho(A, A_i) = \rho(A, A_2) = \varepsilon$, де $\varepsilon > 0$, і проведемо промені l_1 та l_2 такі, що виходять з точки B і проходять через точки A_1 та A_2, відповідно. Нехай кут α_1 рівний куту A_1BA, кут α_2 рівний куту A_2BA, де $0 < \alpha_1 < 90^o$, $0 < \alpha_2 < 90^o$, і $\delta_1 = |OB|\ tg\ \alpha_1$, $\delta_2 = |OB|\ tg\ \alpha_2$. Покладемо $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$ і розглянемо окіл точки O, зрозуміло, в ньому немає жодної точки, що має властивість зіркоподібності, а це суперечить умові.

Нехай

$$S = S_1 \cup S_2,\ S_1 \cap S_2 = \emptyset \qquad (1),$$

де S_1, S_2 – замкнені множини, кожна точка яких має властивість зіркоподібності. Візьмемо довільні точки $A \in S_1$ і $B \in S_2$, та побудуємо відрізок AB. Він не перетинає γ (в протилежному випадку A і B не мали б властивості зіркоподібності). В силу (1), існує точка O така, що $O \in$ AB та існує l для якого $l \cap \gamma = \emptyset$. Позначимо через C_1, C_2, …, C_n точки перетину так, що відрізки C_1C_2, C_3C_4, …, $C_{n-2}C_{n-1}$ не належать $\bar{\Gamma}$. Оскільки $\bar{\Gamma}$ однозв'язна, то по одній зі сторін від прямої, що містить промінь l лежить скінченне число компонент зв'язності області обмеженої γ. А це означає, що лише один з відрізків або C_nA або C_nB повністю належить $\bar{\Gamma}$, що суперечить припущенню.

Зауважимо, що можна легко побудувати криву, центром зіркоподібності якої є одна точка. Проведемо скінченне число прямих, що перетинаються в одній точці. На кожному з променів зафіксуємо точку і нехай фіксовані точки будуть точками перегину, а промені дотичними до кривої в даних точках. Почергово між двома променями побудуємо опуклі вгору та вниз дуги, які проходять через точки.

Нехай на площині $R^2 \subset R^3$ задано замкнену, жорданову криву γ. Зафіксуємо в $R^2 \setminus R^3$ точку A. Конусом над кривою γ називається фігура, що утворена променями, які сполучають A з кожною точкою кривої γ. Точку A назвемо вершиною конуса. Нехай $\gamma \in \pi_1 \subset R^3$ і π_2 довільна площина така, що $\pi_1 \parallel \pi_2$. Розглянемо криву γ', яка є ортогональною проекцією γ на π_2, зрозуміло, що γ′ є замкненою, жордановою кривою. Тоді позначимо через O(γ) ту множину з $\pi_2 \setminus \gamma'$, що є обмеженою. Надалі, під конусом ми будемо розуміти лише конус, вершина якого належить O(γ).

Теорема 2. Для того, щоб конус над кривою γ був графіком неперервної функції, необхідно і достатньо, щоб γ обмежувала зіркоподібна область.

Доведення. Необхідність. Нехай спеціальний конус над γ є графіком деякої неперервної функції. Тоді, існує прямокутна декартова система координат, в якій конус гомеоморфно проектується на площину Х0У. Зрозуміло, що, перетнувши конус довільною площиною, яка проходить через вісь 0Z, ми отримаємо криву, що гомеоморфна відрізку, кінці якого належать площині в якій лежить γ. Кожній такій площині, яка проходить через вісь 0Z, в площині кривої відповідає прямолінійний відрізок, кінці якого належать γ. Звідки випливає, що точка перетину осі 0Z і площини кривої γ має властивість зіркоподібності.

Достатність. Нехай γ крива, що обмежує зіркоподібну область, тоді побудуємо над нею спеціальний конус. Далі, виберемо систему координат так, щоб вершина конуса співпала з початком координат, а площина Х0У була паралельна площині, якій належить крива. Унаслідок зіркоподібності, довільна площина, яка проходить через вісь 0Z, перетне γ у двох точках, для кожної з яких існує твірна, яка проходить через вершину конуса. Отже, ми отримаємо в перерізі криву, що гомеоморфна відрізку.

Точка x_0 є ізольованим локальним мінімумом (максимумом) функції f, якщо існує її окіл $U(x_0)$ такий, що для всіх точок $y \in U(x_0)$ справедлива нерівність $f(y) > f(x_0)$ $(f(y) < f(x_0))$.

Сім'я F кривих {C} заповнює область R, якщо кожна крива C належить R і через кожну точку з R проходить лише одна крива C.

Нехай сім'я R кривих {C} заповнює область R і P точка області R. Сім'я F називається регулярною в точці P, якщо існує окіл U(P) такий, що гомеоморфно відображується на відкритий прямокутник $|x| < a$, $|y| < b$ і сім'я Fu(P) переходить в множину прямих y = const. Сім'я F називається регулярною в R, якщо вона регулярна в кожній її точці.

Сім'я кривих F називається регулярною в R, якщо для кожної дуги PQ кривої C і для довільного ε > 0 існує δ > 0 таке, що, якщо $P' \in C' \subset F$ і $\rho(P, P') < \delta$, то $\sigma(P'Q', PQ) < \varepsilon$. Сім'я F називається регулярною в точці $P \in R$, якщо існує окіл $U(P) \subset R$ такий, що Fu(P) є регулярною в U(P).

Таким чином, якщо F регулярна сім'я кривих, що заповнюють площину. Тоді існує функція f(x, y) з наступними властивостями:

1. f(x, y) є визначена і неперервна в довільній точці (x,y);
2. для довільного дійсного числа c існує множина точок (x,y) таких, що f(x, y) = c, яка складається зі зліченної множини кривих F;
3. у кожному околі довільної точки (x0,y0) існують точки (x,y) для яких f(x, y) > f(x0,y0) і точки (x,y) для яких f(x, y) < f(x0,y0).

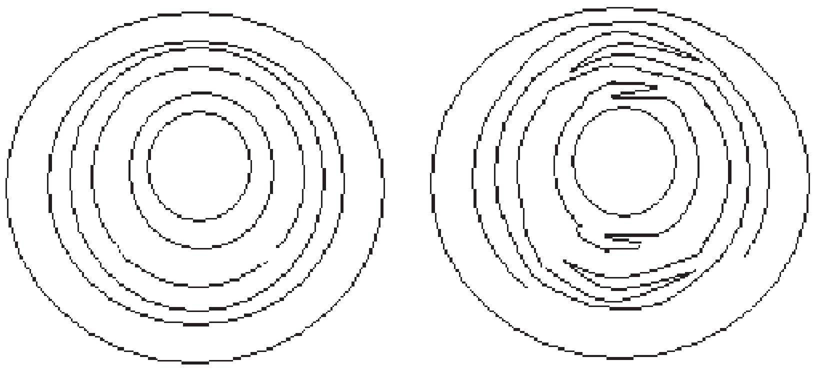

Рис. 1. Регулярна та нерегулярна сім'ї кривих у кільці

Відповідно до зазначеного вище, для сім'ї кривих, що зображена на рис. 1 зліва, існує неперервна функція f(x, y), для якої зображена сім'я кривих є лініями рівня. Проте, можна побудувати неперервну функцію, лініями рівня якої буде нерегулярна сім'я кривих (справа на рис. 1).

Результати дослідження та їх обговорення. Отже, при топологічній еквівалентності функцій, властивість точки бути локальним мінімумом (максимумом) та ізольованим локальним мінімумом (максимумом), є інваріантною. Якщо z = f(x, y) неперервна функція, що задана в околі нуля, (0,0) є її ізольованим локальним мінімумом і f(0, 0) = 0. Функція z = f(x, y) топологічно еквівалентна конусу над жордановою, замкненою кривою γ, що обмежує зіркоподібну область, тоді й тільки тоді, коли для довільного значення c такого, що 0 < c < a0, справедливо: f –1(c) гомеоморфна замкненій жордановій кривій; сукупність множин {f –1(c)} утворює регулярну сім'ю кривих в околі (0,0).

Висновки і перспективи. У статті розглянуто питання топологічної еквівалентності неперервних функцій двох змінних. Зокрема, знайдено умови за яких неперервна функція, що задана в околі нуля і який є її локальним мінімумом (максимумом), буде топологічно еквівалентна конусу. Зрозуміло, що у випадку, коли графіком неперервної функції z = f(x,y) є конус над кривою, що обмежує зіркоподібну область, то z = f(x,y) топологічно еквівалентна гладкій функції $z = x^2 + y^2$.

Список літератури

1. Bolsinov, A. On classification of flows on manifolds / A. Bolsinov, A. Oshemkov, V. Sharko // Methods of Functional Analysis and Topology. – 1996. – Vol. 2, Issue 2. – P. 51–60.
2. Андріюк О. П. Функції на одновимірних многовидах : автореф. дис. на здобуття наук. ступеня канд. фіз.-мат. наук : спец. 01.01.01 / О. П. Андріюк. – К., 2006. – 19 с.
3. Максименко С. И. Классификация m-функций на поверхностях / С. И. Максименко // Укр. мат. журн. – 1999. – № 8. – С. 1129–1135.
4. Ошемков А. А. О классификации потоков Морса-Смейла на двумерных многообразиях / А. А. Ошемков, В. В. Шарко // Матем. сборник. – 1998. – № 7. – С. 93–140.

5. Шарко В. В. Гладкая и топологическая эквивалентность функций на поверхностях / В. В. Шарко // Укр. мат. жур. – 2003. – № 5. – С. 687–700.

References

1. Bolsinov, A., Oshemkov, S., Sharko, V. (1996). On classification of flows on manifolds, 2 (2), 51–60.
2. Andriiuk, O. P. (2006). Funktsiyi na odnovymirnykh mnohovydakh [Functions on one-dimensional manifolds]. K., – 19s.
3. Maksimenko, S. Y. (1999). Klasifikatsiya m-funkciyi na poverhnostyah [Classification of m-functions on surfaces] Ukrainian mathematical journal, 8, 1129–1135.
4. Oshemkov, A. A., Sharko, V. V. (1998). O klassifikatsiyi potokov Morsa-Smejla na dvumernyh mnogoobraziyah [On the classification of Morse-Smale flows on two-dimensional manifolds]. Mathematical collection, 7, 93–140.
5. Sharko, V. V. (2003). Gladkaya i topologicheskaya ehkvivalentnost' funkcij na poverhnostyah [Smooth and topological equivalence of functions on surfaces]. Ukrainian mathematical journal, 5, 687–700.

ТОПОЛОГИЧЕСКАЯ ЭКВИВАЛЕНТНОСТЬ ФУНКЦИЙ ДВУХ ПЕРЕМЕННЫХ

Т. Г. Криворот

Аннотация. *Многие процессы, которые возникают в естественных науках, описываются гладкими и непрерывными функциями. При создании классификации непрерывных функций возникает много трудностей, поскольку поведение функции в окрестности критической точки может быть сложной и не аналогичной гладкому случаю. Вопросы классификации и исследования условий топологической эквивалентности функций двух переменных на многообразиях являются важным направлением исследования в топологии.*

В статье рассмотрены вопросы топологической эквивалентности непрерывных функций двух переменных. Их топологическая классификация проведена в случае гладких функций на многообразиях. Доказано, что в окрестности изолированной критической точки функция топологически эквивалентна Rezn, а в окрестности локального минимума (максимума) эквивалентна x^2+y^2. *Проиллюстрировано класс непрерывных функций, имеющих лишь особенность типа седло, рассмотрен случай функций с изолированным локальным минимумом (максимумом). Охарактеризован случай непрерывных функций с точкой изолированного локального минимума (максимума) внутри области, определены особенности, которые могут возникнуть и стать препятствием при топологической классификации функций двух переменных.*

Ключевые слова: топологическая эквивалентность, функция, многообразие, изолированный локальный экстремум

TOPOLOGICAL EQUIVALENCE OF FUNCTIONS TWO VARIABLES

T. G. Krivorot

Abstract. *Many processes that arise in the natural sciences are described by smooth and continuous functions. When creating a classification of continuous functions, many difficulties arise, since the behavior of the function in the neighborhood of the critical point can be complex and not analogous to the smooth case. The classification and investigation of the conditions for the topological equivalence of functions of two variables on manifolds is an important direction of research in topology.*

The questions of topological equivalence of continuous functions of two variables are considered in the article. Their topological classification was carried out in the case of smooth functions on manifolds. It is proved that in a neighborhood of an isolated critical point the function is topologically equivalent to Rezn, and in the neighborhood of a local minimum (maximum) it is equivalent to x2+y2. We illustrate the class of continuous functions having only a singularity of saddle type, we consider the case of functions with an isolated local minimum (maximum). The case of continuous functions with a point of an isolated local minimum (maximum) inside the domain is characterized, features that can arise and become an obstacle in the topological classification of functions of two variables are determined.

Keywords: topological equivalence, function, manifold, isolated local extremum

УДК 517.927.2

РОЗВ'ЯЗКИ СЛАБОЗБУРЕНИХ КРАЙОВИХ ЗАДАЧ ТА УМОВИ ЇХ ВИНИКНЕННЯ (ВИПАДОК $k = -1$)

Р. Ф. ОВЧАР, кандидат фізико-математичних наук, доцент
Національний університет біоресурсів і природокористування України
E-mail: rfovchar@gmail.com

Анотація. *Запропоновано схему знаходження коефіцієнтних умові існування розв'язків слабозбурених крайових задач для систем з імпульсною дією у фіксовані моменти часу. На основі методу типу Вішика-Люстерніка отримано коефіцієнтні умови існування розв'язків крайової задачі при довільних неоднорідностях* $f(t) \in C([a,b]/\{\tau_i\}_I)$, $a_i \in \mathbb{R}^n$, $\alpha \in \mathbb{R}^m$. *Для отримання цих умов будується* $(d \times r)$ *–вимірна матриця.*