

## **МІНІМІЗАЦІЯ ДИНАМІЧНИХ НАВАНТАЖЕНЬ В МЕХАНІЗМІ ПІДЙОМУ ВАНТАЖОПІДЙОМНИХ МАШИН II**

**В. С. Ловейкін, доктор технічних наук**  
**Ю. В. Човнюк, кандидат технічних наук**  
**І. О. Кадикало, аспірант\***  
**Національний університет біоресурсів і**  
**природокористування України**  
**e-mail: lovvs@ukr.net**

**Анотація.** В межах двомасової моделі розглянутий підйом вантажу «з підхватом» і вплив такого варіанту підйому на величину динамічних навантажень у пружних елементах (канатах) вантажопідйомних машин/кранів. Задля зменшення вказаних навантажень (зокрема, коефіцієнту динамічності) запропонований вибір необхідних режимів руху приводних механізмів на ділянках перехідних процесів. На прикладі механізму підйому вантажу (двомасова модель) проведена динамічна оптимізація (мінімізація) навантажень, які виникають у вантажних канатах вантажопідйомних машин.

Детально розглянуті всі три етапи підйому вантажу «з підхватом»: а) вибирання слабину каната; б) зусилля у канаті зростає від нуля до сили ваги вантажу; в) підйом вантажу «з ваги» за повного натягу каната. Встановлені закони зміни зусилля натягу канату на другому етапі підйому вантажу, за яких мінімізуються можливі, виникаючі при цьому, коливання. Разом з тим, особливістю динаміки розглядуваної системи на першому етапі підйому вантажу є виникнення у ній власних коливань за двома різними формами. Встановлені власні частоти та амплітуди вказаних форм коливань.

На третьому етапі підйому вантажу враховані чотири можливих режими руху приводного механізму на ділянці його пуску, які мінімізують певні характеристики цього приводу. Для кожного з вказаних режимів руху привода знайдені оптимальні режими руху вантажу, які мінімізують виникаючі динамічні навантаження у пружних зв'язках (канатах) вантажопідйомного механізму крана. При цьому використані методи, підходи та математичний апарат класичного варіаційного числення.

Отримані результати можуть бути у подальшому використані для уточнення й вдосконалення існуючих інженерних

\*Науковий керівник – доктор технічних наук В. С. Ловейкін

© В. С. Ловейкін, Ю. В. Човнюк, І. О. Кадикало, 2017

методів розрахунку подібних систем як на стадіях їх проектування/конструювання, так і у режимах реальної експлуатації.

**Ключові слова:** динамічна оптимізація, мінімізація, навантаження, пружні елементи, вантажопідйомні машини, умови підйому, жорсткість канату, підйом «з підхватом»

**Постановка проблеми.** Відомо, що продуктивність і надійність вантажопідйомних машин, а також точність виконання ними, зокрема, розвантажувальних, навантажувальних, транспортних і монтажних операцій суттєвим чином залежать від динамічних навантажень у пружних елементах гнучких робочих органів, приводу й металоконструкцій. Перш за все, величини цих навантажень залежать від ділянки руху вантажопідйомної машини або її механізму. Найбільші динамічні навантаження виникають на ділянках перехідних процесів (пуск, гальмування, реверсування руху).

**Аналіз останніх досліджень.** Проблемам динамічної оптимізації (мінімізації) навантажень в пружних елементах (канатах) вантажопідйомних машин/кранів для різних умов підйому вантажу («з ваги», «з підхватом») і для різних жорсткостей канату (абсолютно жорсткий, пружний) в межах одно – та двомасових моделей присвячені чисельні публікації [1–17]. Зокрема, у вказаних публікаціях встановлено, що під час гальмування у процесі спуску вантажу коефіцієнт динамічності ( $K_d$ ) в пружних елементах кранових механізмів досягає величини 2,5 й більше.

Як показують дослідження різних авторів [13–17], динамічні навантаження, визначені в пружному елементі за допомогою двомасової моделі, всього на 5–10% відрізняються від дійсних динамічних навантажень. Оскільки у цих роботах виявляється вплив різних режимів руху на величину динамічних навантажень, а не визначаються самі навантаження, то використання двомасової моделі є виправданим. Якщо ж виникне потреба визначення більш точного впливу режиму руху на динамічні навантаження в пружному елементі кранового механізму або конструкції, то можуть бути використані моделі з більшою кількістю мас. Так, наприклад, тримасова динамічна модель дає точність визначення динамічних навантажень у межах 2...3% [13]. Однак моделі з меншою кількістю мас дають можливість значно спростити математичні викладки і отримати розв'язки в аналітичній формі.

У роботах [15, 16] зазначено, що одним із шляхів зменшення динамічних навантажень у пружних елементах вантажопідйомних машин є вибір необхідних режимів руху приводних механізмів на

ділянках перехідних процесів. Вплив різних режимів руху у вказаних вище роботах на динамічні навантаження у пружних елементах вантажопідйомних машин/кранів зазвичай розглядається на прикладі механізму підйому вантажу у межах двомасової моделі без врахування затухання коливань, оскільки в кранових механізмах і конструкціях воно здійснюється протягом значного проміжку часу [13].

Автори [12, 17] розглядають кілька еквівалентних схем для розрахунку параметрів руху й натягу у канатах підйомного механізму при підйомі вантажу «з підхватом» (використовується модель пружного канату). Проте, автори вказаних робіт не мінімізують динамічні навантаження у канатах вантажопідйомного механізму, а лише визначають власне вказані навантаження.

На думку авторів даного дослідження, динамічна оптимізація (мінімізація) навантажень в пружних елементах вантажопідйомних машин повинна проводитись для певних режимів руху приводних механізмів на ділянках перехідних процесів, як це зроблено в [15, 16], й водночас враховувати конкретні схеми канатного механізму підйому вантажу «з підхватом» і його жорсткість (модель пружного канату) разом із жорсткістю крану за методами, розвиненими у [12, 17]. Саме такий підхід й реалізований у даній роботі.

**Мета досліджень** полягає в обґрунтуванні оптимального режиму руху механізму підйому вантажу краном (на всіх етапах цього підйому), за якою враховані режими руху приводних механізмів на ділянках перехідних процесів, особливості схеми функціонування канатного механізму підйому вантажу «з підхватом» та власне пружності самого канату й металоконструкцій крану, який (режим руху) мінімізує вказані динамічні навантаження. Для досягнення мети роботи використані підходи робіт [11, 12, 15–17], методи математичного моделювання та класичного варіаційного числення.

**Результати досліджень.** Використовуючи підходи робіт [11, 12, 16], розглянемо наступну схему динамічного навантаження вантажного пристрою при підйомі вантажу «з підхватом» (рис. 1).

При цьому система розглядається як двомасова з двома пружними зв'язками і, відповідно, як така, що має два степені вільності руху із відповідним накладанням коливань по кожній з частот. На рис. 1. введені наступні позначення:  $m_k$  – маса металоконструкції крану,  $m_{np}$  – маса приводу (маса ротора двигуна й приведених до нього мас елементів підйому),  $m_g$  – маса вантажу,  $C_k$  – жорсткість металоконструкції крану,  $C_g$  – жорсткість підйомних канатів й приведена до них жорсткість елементів приводу.

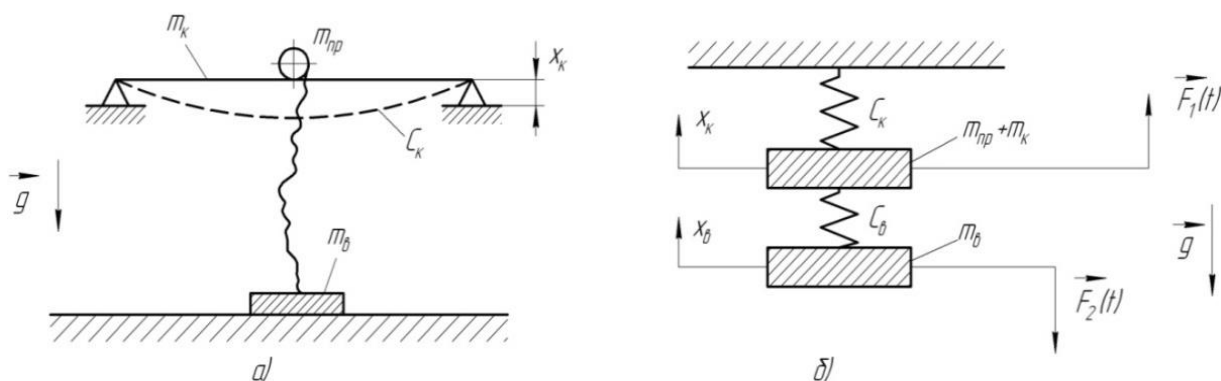


Рис. 1. Схема динамічного навантаження вантажного пристрою при підйомі вантажу «з підхватом»: а – на мостовому крані; б – розрахункова схема двомасової системи.

Рівняння, які описують рух вказаної на рис. 1 системи, мають наступний вид:

$$\begin{cases} (m_k + m_{np}) \cdot \ddot{x}_k + (C_k + C_b) \cdot x_k - C_b \cdot x_b = F_1(t); \\ m_b \cdot \ddot{x}_b - C_b \cdot x_k + C_b \cdot x_b = -F_2(t). \end{cases} \quad (1)$$

Введемо позначення:  $(m_k + m_{np}) = m_1$ ;  $m_b = m_2$ ;  $C_k = C_1$ ;  $C_b = C_2$ ;  $x_k = x_1$ ;  $x_b = x_2$ ; тоді (1) можна подати наступним чином:

$$\begin{cases} m_1 \cdot \ddot{x}_1 + (C_1 + C_2) \cdot x_1 - C_2 \cdot x_2 = F_1(t); \\ m_2 \cdot \ddot{x}_2 - C_2 \cdot x_1 + C_2 \cdot x_2 = -F_2(t). \end{cases} \quad (2)$$

На першому етапі, після вмикання двигуна, відбувається вибирання слабину каната. При цьому  $F_1(t) = F_2(t) = 0$ . На другому етапі – пружна деформація всіх елементів конструкції. Другий етап триває до тих пір, поки зусилля на вантажозахоплюючі пристрої, зростаючи від нуля, не стає рівним  $Q_b = m_b \cdot g$ . Лише після цього, на третьому етапі, починається власне підйом вантажу.

Розглянемо всі три етапи підйому вантажу з «з підхватом» більш детально.

I етап. Вибирання слабину каната.

Система рівнянь (2) набуває вигляду:

$$\begin{cases} m_1 \cdot \ddot{x}_1 + (C_1 + C_2) \cdot x_1 - C_2 \cdot x_2 = 0; \\ m_2 \cdot \ddot{x}_2 - C_2 \cdot x_1 + C_2 \cdot x_2 = 0. \end{cases} \quad (3)$$

По суті, на цьому етапі слід розглянути вільні коливання, які виникають у системі. Для цього скористаємось підходом роботи [11].

Розв'язки (3) знайдемо у наступному вигляді:

$$x_1 = A_1 \cdot \sin(kt + \delta); \quad x_2 = A_2 \cdot \sin(kt + \delta), \quad (4)$$

де:  $k$  – частота,  $\delta$  – початкова фаза власних коливань системи, що розглядається,  $A_{1,2}$  – амплітуди відповідних коливань  $x_1(t)$  й  $x_2(t)$ .

Власні коливання даної системи можна знайти з рівняння:

$$(C_1 + C_2 - m_1 \cdot k^2) \cdot (C_2 - m_2 \cdot k^2) - C_2^2 = 0. \quad (5)$$

Після простих перетворень з (5) можна отримати бікватратне рівняння для  $k$ :

$$m_1 \cdot m_2 \cdot k^4 - (m_1 \cdot C_2 + m_2 \cdot [C_1 - C_2]) \cdot k^2 + C_1 \cdot C_2 = 0. \quad (6)$$

Якщо ввести, як у [11], позначення:  $\frac{C_1 + C_2}{m_1} = n_1^2$ ;  $\frac{C_2}{m_2} = n_2^2$  тоді рівняння (6) можна записати у виді:

$$k^4 - (n_1^2 + n_2^2) \cdot k^2 + \frac{C_1}{C_1 + C_2} \cdot n_1^2 \cdot n_2^2 = 0. \quad (7)$$

Подано величину  $C_1/(C_1 + C_2)$  у вигляді  $v^2$ , тоді корені (7), що є власними частотами системи, знайдемо за формулами:

$$\begin{cases} k_1^2 = \frac{n_1^2 + n_2^2}{2} - \frac{1}{2} \cdot \sqrt{(n_1^2 + n_2^2)^2 - 4v^2 \cdot n_1^2 \cdot n_2^2}; \\ k_2^2 = \frac{n_1^2 + n_2^2}{2} + \frac{1}{2} \cdot \sqrt{(n_1^2 + n_2^2)^2 - 4v^2 \cdot n_1^2 \cdot n_2^2}. \end{cases} \quad (8)$$

Отже, у системі виникає дві різні форми коливань з різними частотами, відповідно,  $k_1$  й  $k_2$ , причому  $k_2 > k_1$ .

Автор [11] визначав співвідношення, за яким можна визначити коефіцієнти  $A_{1,2}$  кожної з форм коливань, тобто  $A_{1,2}^{(1)}$  й  $A_{1,2}^{(2)}$ , де верхній індекс у дужках біля коефіцієнтів  $A_{1,2}$  означає номер форми коливань («1» – відповідає  $k_1$ , «2» – відповідає частоті  $k_2$ ):

$$\begin{cases} \frac{A_1^{(1)}}{A_2^{(1)}} = \frac{C_2}{C_1 + C_2 - m_1 \cdot k_1^2} = \frac{C_2 - m_2 \cdot k_1^2}{C_1} = \beta_1; \\ \frac{A_1^{(2)}}{A_2^{(2)}} = \frac{C_2}{C_1 + C_2 - m_1 \cdot k_1^2} = \frac{C_2 - m_2 \cdot k_1^2}{C_2} = \beta_2. \end{cases} \quad (9)$$

Якщо покласти:

$$\beta_1 = \frac{C_2}{C_1 + C_2 - m_1 \cdot k_1^2} = \frac{C_2}{m_1 \cdot \left( \frac{C_1 + C_2}{m_1} - k_1^2 \right)} = \frac{C_2}{m_1 \cdot (n_1^2 - k_1^2)}. \quad (10)$$

Після нескладних перетворень матимемо:

$$\beta_1 = \frac{v_1^2}{1 - k_1^2/n_1^2}; \quad v_1^2 = \frac{C_2}{C_1 + C_2}; \quad \beta_2 = \frac{v_1^2}{1 - k_2^2/n_2^2} \quad (11)$$

Можна показати, що власні частоти  $k_1^2$  й  $k_2^2$  задовольняють умовам:

$$0 < k_1^2 < n_1^2; \quad n_1^2 < n_2^2 < k_2^2, \quad (12)$$

Тому  $\beta_1 > 0$ , а  $\beta_2 < 0$ . Крім того, для взаємозалежностей  $x_1^{(1)}$  й  $x_2^{(1)}$  й  $x_1^{(2)}$  й  $x_2^{(2)}$  характерні такі формули/співвідношення:

$$x_1^{(1)} = \beta_1 \cdot x_2^{(1)}; \quad x_1^{(2)} = \beta_2 \cdot x_2^{(2)}. \quad (13)$$

Зі співвідношень (11) й (13) випливає, що у першому головному коливанні  $x_1^{(1)}$  й  $x_2^{(1)}$  завжди мають однакові знаки, а у другому головному коливанні знаки  $x_1^{(2)}$  й  $x_2^{(2)}$  різні, і вантажі  $m_1$  й  $m_2$  рухаються у різні сторони. На рис. 2 зображені переміщення  $x_1$  й  $x_2$  при першому й другому головному коливаннях.

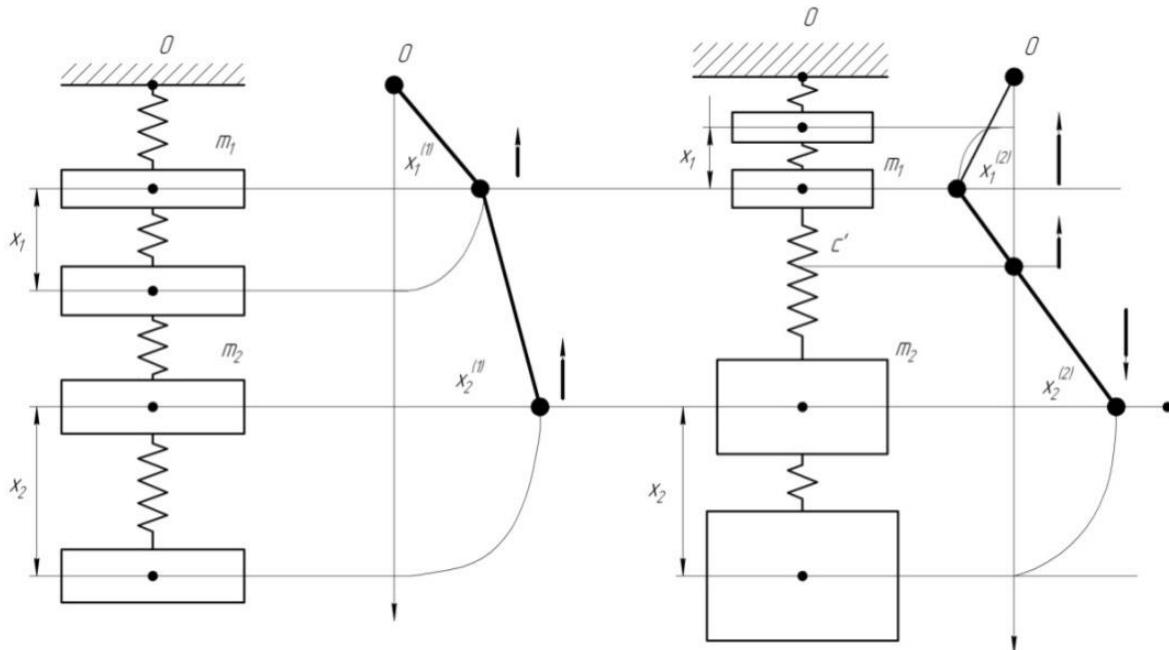


Рис. 2. Переміщення  $x_{1,2}^{(1)}$  й  $x_{1,2}^{(2)}$ :  $C'$  – «нульова точка» – це точка зміни напрямку руху на зворотній (2-е головне коливання).

У другому головному коливанні, поряд з точкою закріплення першої пружини  $O$ , на другій пружині є точка  $C'$ , яка залишається нерухомою при коливаннях вантажів  $m_1$  й  $m_2$ . Саме ця точка  $C'$  є вузлом.

II етап. Пружна деформація всіх елементів конструкції, яка триває до тих пір, поки зусилля  $F_1(t)$  не досягне, зростаючи від нуля, значення  $Q_g = m_g \cdot g$  (те ж стосується й сили  $F_2(t)$ , яка стає істинною вагою вантажу тільки після відриву  $m_g$  від опори). Тривалість другого етапу процесу підйому вантажу «з підхватом» складає [12]  $\tau_o$ , яке можна знайти з наступного трансцендентного рівняння:

$$\tau_o + \left[ \frac{C_2}{C_1} \cdot \sqrt{\frac{m_1}{C_1 + C_2}} \right] \cdot \sin \left\{ \sqrt{\frac{(C_1 + C_2)}{m_1}} \cdot \tau_o \right\} = g \cdot m_1 \cdot m_2 \cdot \left\{ \frac{(C_1 + C_2)}{m_1} \right\} / (V \cdot C_1 C_2), \quad (14)$$

де:  $V$  – швидкість усталеного руху (підйому) вантажу, після закінчення перехідних процесів. Після зрозумілих перетворень (14)

можна для  $\tau_o$  визначення знайти наступне рівняння трансцендентного типу:

$$\tau_o + \frac{C_2}{C_1} \cdot \sqrt{\frac{m_1}{(C_1 + C_2)}} \cdot \sin \left\{ \sqrt{\frac{(C_1 + C_2)}{m_1}} \cdot \tau_o \right\} = \frac{gm_2}{V \cdot C_1 \cdot C_2} \cdot (C_1 + C_2), \quad (15)$$

або з урахуванням (11):

$$\tau_o + \frac{C_2}{C_1} \cdot \sqrt{\frac{m_1}{(C_1 + C_2)}} \cdot \sin \left\{ \sqrt{\frac{(C_1 + C_2)}{m_1}} \cdot \tau_o \right\} = \frac{gm_2}{V \cdot C_1 \cdot v_1^2}. \quad (16)$$

Враховуючи введене позначення  $n_1^2$ , можна (16) подати наступним чином:

$$\tau_o + \frac{C_2}{C_1 \cdot n_1} \cdot \sin \{n_1 \cdot \tau_o\} = \frac{gm_2}{V \cdot C_1 \cdot v_1^2}. \quad (17)$$

При  $n_1 \tau_o \ll 1$ , з (17) можна отримати наближене значення  $\tau_o$ , яке аналогічне до значення тривалості відриву вантажу (для одномасової моделі), а саме:

$$\tau_o \approx \frac{gm_2}{V \cdot C_2}. \quad (18)$$

Отже, другий етап триває протягом інтервалу часу:  $t \in [0; \tau_o]$

У найбільш загальному випадку сила  $F_1(t)$  згідно [16] приймає наступний вид:

$$F_1(t) = F_2(t) + (m_e + m_{np}) \cdot a(t) = F_2(t) + (m_1 - m_k + m_2) \cdot a(t), \quad (19)$$

де  $a(t)$  – функція прискорення того чи іншого режиму руху приводного механізму, яка залежить від часу  $t$ . Функція  $F_2(t)$  повинна задовольняти певним умовам гладкості, які реалізуються за допомогою спеціального мехатронного пристрою, і у момент часу  $t = \tau_o$ :  $F_2(\tau_o) = m_e g = m_2 g$ . Ці умови мають наступний вигляд:

$$F_2|_{t=0} = \dot{F}_2|_{t=0} = \ddot{F}_2|_{t=0} = 0; \quad F_2|_{t=\tau_o} = F_o = m_2 g; \quad \dot{F}_2|_{t=\tau_o} = \ddot{F}_2|_{t=\tau_o} = 0. \quad (20)$$

На рис. 3 зображена залежність  $F_2(t)$ , яка у аналітичному вигляді має наступний вид:

$$F_2(t) = F_o \cdot \left\{ 10 \cdot \left( \frac{t}{\tau_o} \right)^3 - 15 \cdot \left( \frac{t}{\tau_o} \right)^4 + 6 \cdot \left( \frac{t}{\tau_o} \right)^5 \right\}. \quad (21)$$

Саме так залежність  $F_2(t)$  мінімізує можливі коливання на другому етапі підйому вантажу «з підхватом».

Система (1) може бути зведена на другому етапі підйому вантажу «з підхватом» до одного рівняння:

$$x_2^{(IV)} + \left[ \left( 1 + \frac{m_2}{m_1} \right) \cdot \Omega_2^2 + \Omega_1^2 \right] \cdot \ddot{x}_2 + \Omega_1^2 \cdot \Omega_2^2 \cdot x_2 = \left( 1 + \frac{m_2}{m_1} - \frac{m_k}{m_1} \right) \cdot \Omega_2^2 \cdot a(t) - \frac{\ddot{F}_2(t)}{m_2} - \Omega_1^2 \cdot \frac{F_2(t)}{m_2}, \quad (22)$$

де:  $\Omega_1^2 = \frac{C_1}{m_1}$ ,  $\Omega_2^2 = \frac{C_2}{m_2}$ .

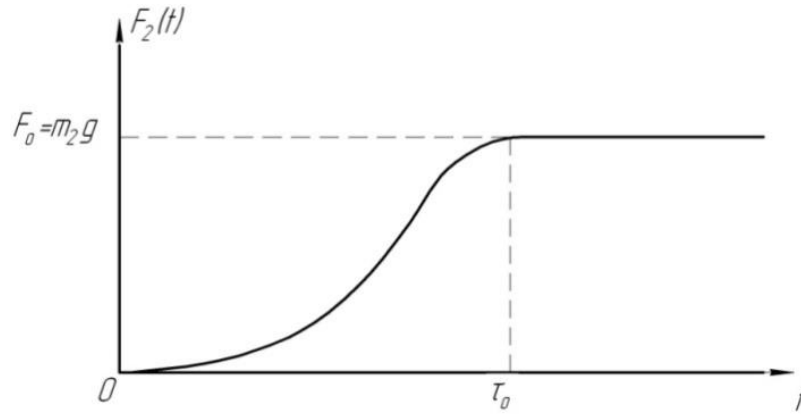


Рис. 3. Залежність  $F_2(t)$ .

Для встановлення умови Ейлера-Пуассона, яка є необхідною для реалізації критерію якості руху:

$$\int_0^{\tau_0} x_2^2 dt \rightarrow \min, \quad (23)$$

що відповідає мінімальним значенням можливих амплітуд коливань на цьому етапі підйому вантажу, слід розв'язати рівняння:

$$\begin{aligned} & x_2^{(VIII)} + 2 \cdot \left[ \left( 1 + \frac{m_2}{m_1} \right) \Omega_2^2 + \Omega_1^2 \right] \cdot x_2^{(VI)} + \left[ \left( 1 + \frac{m_2}{m_1} \right) \Omega_2^2 + \Omega_1^2 \right]^2 \cdot x_2^{(IV)} = \\ & = \left[ 1 + \frac{m_2}{m_1} - \frac{m_k}{m_1} \right] \Omega_2^2 \cdot a^{(IV)}(t) + \left[ \left( 1 + \frac{m_2}{m_1} \right) \Omega_2^2 + \Omega_1^2 \right] \cdot \left[ 1 + \frac{m_2}{m_1} - \frac{m_k}{m_1} \right] \Omega_2^2 \cdot \ddot{a}(t) - \\ & = \left[ \left( 1 + \frac{m_2}{m_1} \right) \Omega_2^2 + 2\Omega_1^2 \right] \cdot \frac{F_2^{(IV)}(t)}{m_2} - \left[ \left( 1 + \frac{m_2}{m_1} \right) \Omega_2^2 + \Omega_1^2 \right] \cdot \Omega_1^2 \cdot \frac{\ddot{F}_2(t)}{m_2}. \end{aligned} \quad (24)$$

На цьому етапі підйому вантажу доцільно працювати у режимі:  $a(t) \equiv 0, F_2(t) \neq 0$ .

Враховуючи вираз (21) замість (24) маємо:

$$\begin{aligned} & x_2^{(VIII)} + 2 \cdot \left[ \left( 1 + \frac{m_2}{m_1} \right) \Omega_2^2 + \Omega_1^2 \right] \cdot x_2^{(VI)} + \left[ \left( 1 + \frac{m_2}{m_1} \right) \Omega_2^2 + \Omega_1^2 \right]^2 \cdot x_2^{(IV)} = \\ & = - \left[ \left( 1 + \frac{m_2}{m_1} \right) \Omega_2^2 + 2\Omega_1^2 \right] \cdot \frac{1}{m_2} \cdot F_0 \cdot 360 \cdot \frac{1}{\tau_0^4} \left[ -1 + 2 \cdot \frac{t}{\tau_0} \right] - \\ & - \left[ \left( 1 + \frac{m_2}{m_1} \right) \Omega_2^2 + 2\Omega_1^2 \right] \cdot \Omega_1^2 \cdot \frac{1}{m_2} \cdot F_0 \cdot \left\{ \frac{60}{\tau_0^2} \left[ \frac{t}{\tau_0} - 3 \cdot \left( \frac{t}{\tau_0} \right)^2 + 2 \left( \frac{t}{\tau_0} \right)^3 \right] \right\}. \end{aligned} \quad (25)$$

Після введення позначень:

$$\begin{aligned} & \left[ \left( 1 + \frac{m_2}{m_1} \right) \Omega_2^2 + \Omega_1^2 \right] = \mathcal{G}; \quad \Phi(t) = - \left[ \left( 1 + \frac{m_2}{m_1} \right) \Omega_2^2 + 2\Omega_1^2 \right] \cdot \frac{360 \cdot F_0}{m_2 \cdot \tau_0^4} \cdot \left[ -1 + 2 \cdot \frac{t}{\tau_0} \right] - \\ & - \left[ \left( 1 + \frac{m_2}{m_1} \right) \Omega_2^2 + 2\Omega_1^2 \right] \cdot \Omega_1^2 \cdot \frac{F_0 \cdot 60}{m_2 \cdot \tau_0^2} \cdot \left\{ \frac{t}{\tau_0} - 3 \cdot \left( \frac{t}{\tau_0} \right)^2 + 2 \left( \frac{t}{\tau_0} \right)^3 \right\}, \end{aligned} \quad (26)$$



можна звести (25) до наступного виду:

$$x_2^{(VIII)} + 2 \cdot g \cdot x_2^{(VI)} + g^2 \cdot x_2^{(IV)} = \Phi(t). \quad (27)$$

Розв'язок (27) має наступний вид:

$$\begin{cases} x_2(t) = x_{2одн}(t) + x_{2час}(t), \\ x_{2одн}(t) = C_0 + C_1 t + C_2 t^2 + C_3 t^3 + (C_4 + C_5 t) \cdot \sin(\sqrt{g} \cdot t) + (C_6 + C_7 t) \cdot \cos(\sqrt{g} \cdot t), \\ x_{2час}(t) = A_1 \cdot t^8 + A_2 \cdot t^9 + A_3 \cdot t^{10} + A_4 \cdot t^{11} \end{cases} \quad (28)$$

де константи  $A_{1,2,3,4}$  знаходимо з наступних співвідношень:

$$\begin{cases} (8!)A_1 = \left[ \left( 1 + \frac{m_2}{m_1} \right) \Omega_2^2 + 2\Omega_1^2 \right] \cdot \frac{360 \cdot F_o}{m_2 \cdot \tau_0^4}; \\ (9!)A_2 = - \left[ \left( 1 + \frac{m_2}{m_1} \right) \Omega_2^2 + 2\Omega_1^2 \right] \cdot \frac{360 \cdot F_o}{m_2 \cdot \tau_0^4} \cdot \left[ \frac{2}{\tau_0} \right] - \left[ \left( 1 + \frac{m_2}{m_1} \right) \Omega_2^2 + \Omega_1^2 \right] \cdot \Omega_1^2 \cdot \frac{F_o \cdot 60}{m_2 \cdot \tau_0^3}; \\ \left( \frac{10!}{2!} \right) A_3 + 2 \left( \frac{8!}{2!} \right) A_1 \cdot g = \left[ \left( 1 + \frac{m_2}{m_1} \right) \Omega_2^2 + \Omega_1^2 \right] \cdot \Omega_1^2 \cdot \frac{F_o \cdot 180}{m_2 \cdot \tau_0^4}; \\ \left( \frac{11!}{3!} \right) A_4 + 2 \left( \frac{9!}{3!} \right) A_2 \cdot g = - \left[ \left( 1 + \frac{m_2}{m_1} \right) \Omega_2^2 + \Omega_1^2 \right] \cdot \Omega_1^2 \cdot \frac{F_o \cdot 120}{m_2 \cdot \tau_0^5}. \end{cases} \quad (29)$$

Для визначення констант  $C_{0,1,2,3,4,5,6,7}$  слід використати наступні умови:

$$x_2|_{t=0} = \dot{x}_2|_{t=0} = \ddot{x}_2|_{t=0} = x_2^{(IV)}|_{t=0} = 0; \quad x_2|_{t=\tau_0} = \frac{m_2 g}{C_2}; \quad \dot{x}_2|_{t=\tau_0} = 0; \quad x_2^{(IV)}|_{t=\tau_0} = 0; \quad \ddot{x}_2|_{t=\tau_0} = -\frac{2\Omega_1^2}{g} \cdot g. \quad (30)$$

III етап підйому вантажу характеризують наступні рівняння:

$$\begin{cases} m_1 \cdot \ddot{x}_1 + (C_1 + C_2) \cdot x_1 - C_2 \cdot x_2 = m_2 g + (m_1 - m_k + m_2) a(t), \\ m_2 \cdot \ddot{x}_2 - C_2 \cdot x_1 + C_2 \cdot x_2 = m_2 g. \end{cases} \quad (31)$$

Систему (31) можна звести до одного рівняння для  $x_2$ :

$$x_2^{(IV)} + g \cdot \ddot{x}_2 + \Omega_1^2 \Omega_2^2 \cdot x_2 = \left( 1 + \frac{m_2}{m_1} - \frac{m_k}{m_1} \right) \Omega_2^2 a(t) - \Omega_1^2 g. \quad (32)$$

Щоб задовольнити на цьому етапі підйому вантажу умовам якості руху виду:

$$\int_0^{t_p} x^2 dt \rightarrow \min, \quad (33)$$

де:  $t_p$  – тривалість процесу, за якою швидкість підйому вантажу набуває усталеного значення  $V$ , слід розв'язати рівняння (умова Пуассона-Ейлера):

$$\begin{aligned} x_2^{(VIII)} + 2g \cdot x_2^{(VI)} + g^2 x_2^{(IV)} &= \left[ 1 + \frac{m_2}{m_1} - \frac{m_k}{m_1} \right] \Omega_2^2 a^{(IV)}(t) + \left[ 1 + \frac{m_2}{m_1} \Omega_2^2 + \Omega_1^2 \right] \cdot \\ &\cdot \left[ 1 + \frac{m_2}{m_1} - \frac{m_k}{m_1} \right] \Omega_2^2 \cdot \ddot{a}_2(t) \end{aligned} \quad (34)$$

Згідно з [16] розглянемо наступні чотири режими руху приводного механізму на ділянці пуску:

$$1) \quad a = \frac{V}{t_p} \text{const}; \quad 2) \quad a = \frac{2V}{t_p} \left(1 - \frac{t}{t_p}\right); \quad 3) \quad a = \frac{12V}{t_p} \left(\frac{t}{t_p} - 2 \cdot \frac{t^2}{t_p^2} + \frac{t^3}{t_p^3}\right);$$

$$4) \quad a = \frac{60V}{t_p} \cdot \left[1 - 3\left(\frac{t}{t_p}\right) + \left(\frac{t}{t_p}\right)^2 - \left(\frac{t}{t_p}\right)^3\right] \cdot \left(\frac{t}{t_p}\right)^2 = \frac{60V}{t_p} \left(\frac{t}{t_p}\right)^2 \cdot \left(1 - \frac{t}{t_p}\right)^3. \quad (35)$$

Для першого та другого режимів (35) маємо з (34):

$$x_2^{(VIII)} + 2 \cdot g \cdot x_2^{(VI)} + g^2 \cdot x_2^{(IV)} = 0. \quad (36)$$

Рівняння (36) має розв'язок:

$$x_2(t) = \tilde{C}_0 + \tilde{C}_1 t + \tilde{C}_2 t^2 + \tilde{C}_3 t^3 + (\tilde{C}_4 + \tilde{C}_5 t) \cdot \sin(\sqrt{g} \cdot t) + (\tilde{C}_6 + \tilde{C}_7 t) \cdot \cos(\sqrt{g} \cdot t), \quad (37)$$

де константи  $\tilde{C}_i$ ,  $i = \overline{(0,7)}$ , знаходимо з початкових/кінцевих умов задачі:

$$x_2|_{t=0} = \dot{x}_2|_{t=0} = 0; \quad x_2^{(IV)}|_{t=0} = 0; \quad \ddot{x}_2|_{t=0} = \frac{\left(1 + \frac{m_2}{m_1} - \frac{m_k}{m_1}\right) \Omega_2^2 a(0) - \Omega_1^2 g}{g};$$

$$\dot{x}_2|_{t=t_p} = V; \quad \ddot{x}_2|_{t=t_p} = 0; \quad x_2^{(IV)}|_{t=t_p} = 0; \quad x_2|_{t=t_p} = \frac{\left(1 + \frac{m_2}{m_1} - \frac{m_k}{m_1}\right) \Omega_2^2 a(t_p) - \Omega_1^2 g}{g}. \quad (38)$$

Для третього режиму (35) маємо (34):

$$x_2^{(VIII)} + 2g \cdot x_2^{(VI)} + g^2 x_2^{(IV)} = g \left[1 + \frac{m_2}{m_1} - \frac{m_k}{m_1}\right] \Omega_2^2 \cdot \frac{12V}{t_p} \cdot \left[-\frac{4}{t_p^2} + \frac{6t}{t_p^3}\right]. \quad (39)$$

Розв'язок (39) має вид:

$$\left\{ \begin{array}{l} x_2(t) = \tilde{x}_{2одн}(t) + \tilde{x}_{2неодн}(t), \\ \tilde{x}_{2одн}(t) = \tilde{C}_0 + \tilde{C}_1 t + \tilde{C}_2 t^2 + \tilde{C}_3 t^3 + (\tilde{C}_4 + \tilde{C}_5 t) \cdot \sin(\sqrt{g} \cdot t) + (\tilde{C}_6 + \tilde{C}_7 t) \cdot \cos(\sqrt{g} \cdot t), \\ \tilde{x}_{2неодн}(t) = \tilde{A}_1 \cdot t^8 + \tilde{A}_2 \cdot t^9, \quad 8! \tilde{A}_1 = g \left[1 + \frac{m_2}{m_1} - \frac{m_k}{m_1}\right] \cdot \frac{12V \cdot \Omega_2^2}{t_p} \cdot \left[-\frac{4}{t_p^2}\right]; \\ 9! \tilde{A}_2 = g \left[1 + \frac{m_2}{m_1} - \frac{m_k}{m_1}\right] \cdot \Omega_2^2 \frac{72V}{t_p^4}. \end{array} \right. \quad (40)$$

Константи  $\tilde{C}_j$ ,  $j = \overline{(0,7)}$  знаходимо з умов (38).

Для четвертого режиму (35) маємо з (34):

$$x_2^{(VIII)} + 2g \cdot x_2^{(VI)} + g^2 x_2^{(IV)} = \left[1 + \frac{m_2}{m_1} - \frac{m_k}{m_1}\right] \Omega_2^2 \cdot \frac{60V}{t_p} \cdot \left[\frac{72}{t_p^4} - \frac{120t}{t_p^5}\right] +$$

$$+ g \left[1 + \frac{m_2}{m_1} - \frac{m_k}{m_1}\right] \Omega_2^2 \cdot \frac{60V}{t_p} \cdot \left[\frac{2}{t_p^2} - \frac{18t}{t_p^3} + \frac{36t^2}{t_p^4} - \frac{20t^3}{t_p^5}\right]. \quad (41)$$

Розв'язок (41) має вид:

$$\left\{ \begin{array}{l}
 x_2(t) = x_{2одн}^*(t) + x_{2неодн}^*(t); \\
 x_{2одн}^*(t) = D_0 + D_1 t + D_2 t^2 + D_3 t^3 + (D_4 + D_5 t) \cdot \sin(\sqrt{g} \cdot t) + (D_6 + D_7 t) \cdot \cos(\sqrt{g} \cdot t); \\
 x_{2неодн}^*(t) = B_1 \cdot t^8 + B_2 \cdot t^9 + B_3 \cdot t^{10} + B_4 \cdot t^{11}; \\
 8! B_1 = \left[ 1 + \frac{m_2}{m_1} - \frac{m_k}{m_1} \right] \cdot \Omega_2^2 \frac{60V}{t_p} \cdot \left( \frac{72}{t_p^4} \right) + g \left[ 1 + \frac{m_2}{m_1} - \frac{m_k}{m_1} \right] \cdot \Omega_2^2 \frac{60V}{t_p} \cdot \left[ \frac{2}{t_p^2} \right]; \\
 9! B_2 = \left[ 1 + \frac{m_2}{m_1} - \frac{m_k}{m_1} \right] \cdot \Omega_2^2 \frac{60V}{t_p} \cdot \left( -\frac{120}{t_p^5} \right) - g \left[ 1 + \frac{m_2}{m_1} - \frac{m_k}{m_1} \right] \cdot \Omega_2^2 \frac{60V}{t_p} \cdot \left[ \frac{18}{t_p^3} \right]; \\
 \left( \frac{10!}{2!} \right) B_3 + \left( \frac{8!}{2!} \right) B_1 \cdot g \cdot 2 = g \left[ 1 + \frac{m_2}{m_1} - \frac{m_k}{m_1} \right] \cdot \Omega_2^2 \cdot \frac{60V}{t_p} \left( \frac{36}{t_p^4} \right); \\
 \left( \frac{11!}{3!} \right) B_4 + 2 \left( \frac{9!}{3!} \right) B_2 \cdot g = g \cdot \left[ 1 + \frac{m_2}{m_1} - \frac{m_k}{m_1} \right] \cdot \Omega_2^2 \cdot \frac{60V}{t_p} \left( -\frac{20}{t_p^5} \right).
 \end{array} \right. \quad (42)$$

Константи  $D_i$ ,  $i = \overline{(0,7)}$  у (42) знаходимо з умов (38).

### Висновки

1. У межах двомасової моделі отримані аналітичні залежності для законів руху вантажу при підйомі «з підхватом», які мінімізують можливі коливні процеси у пружних елементах (канатах) вантажопідйомних машин.

2. Отримані у роботі результати можуть бути у подальшому використані для уточнення й вдосконалення існуючих інженерних методів розрахунку подібних систем як на стадіях їх розрахунку, проектування/конструювання, так і у режимах реальної експлуатації.

### Список літератури

1. Голубенцев Н. А. Динамика переходных процессов в машинах со многими массами. Москва. Машгиз. 1959. 147 с.
2. Вейц В. Л. Динамика машинных агрегатов. Москва. Машиностроение. 1969. 370 с.
3. Вульфсон И. И., Коловский М. З. Динамика машинных агрегатов. Ленинград. Машиностроение. 1969. 370 с.
4. Комаров М. С. Нелинейные задачи динамики машин. Москва. Машиностроение. 1968. 284 с.
5. Казак С. А. Динамика мостовых кранов. Москва. Машиностроение. 1968. 331 с.
6. Гохберг М. М. Металлические конструкции подъемно-транспортных машин. Москва. Машиностроение. 1969. 520 с.
7. Лобов Н. А. Динамика грузоподъемных кранов. Москва. Машиностроение. 1987. 160 с.

8. *Гайдамака В. Ф.* Грузоподъемные машины. Киев. Вища школа. 1989. 328 с.
9. *Будиков Л. Я.* Многопараметрический анализ динамики грузоподъемных кранов мостового типа. Луганск. Изд-во ВУТУ. 1997. 210 с.
10. *Ловейкин В. С., Човнюк Ю. В., Діктерук М. Г., Пастушенко С. І.* Моделювання динаміки механізмів вантажопідійомних машин. Миколаїв: РВВ МДАУ. 2004. 286 с.
11. *Гробов В. А.* Теория колебаний механических систем. Киев. Вища школа. 1982. 183 с.
12. *Новак С. М., Логвинец А. С.* Защита от вибрации и шума в строительстве: Справочник. Київ. Будівельник. 1990. 184 с.
13. *Волков Д. П.* Динамические нагрузки в универсальных экскаваторах-кранах. Москва. Машгиз. 1958. 269 с.
14. *Кожевников С. Н.* Динамика нестационарных процессов в машинах. Киев. Наукова думка. 1986. 288 с.
15. *Ловейкин В. С.* Расчеты оптимальных режимов движения механизмов строительных машин. Киев. УМК ВО. 1990. 166 с.
16. *Ловейкин В. С.* Мінімізація динамічних навантажень в пружних елементах вантажопідійомних машин. Гірничі, будівельні, дорожні і меліоративні машини. 1998. Вип. 52. С. 63–68.
17. *Гоберман Л. А., Степанян К. В., Яркін А. А., Зеленский В. С.* Теория, конструкция и расчет строительных и дорожных машин. Москва. Машиностроение. 1979. 407 с.

### References

1. *Golubentsev, N. A.* (1959). Dynamics of transients in machines with many masses. Mashgiz. 147.
2. *Veits, V. L.* (1969). Dynamics of machine aggregates. Mashinostroenie. 370.
3. *Vulfson, I. I., Kolovskii, M. Z.* (1969). Dynamics of machine aggregates. Mashinostroenie. 370.
4. *Komarov, M. S.* (1968). Nonlinear problems of machine dynamics. Mashinostroenie. 284.
5. *Kazak, S. A.* (1968). Dynamics of bridge cranes. Mashinostroenie. 331.
6. *Gokhberg, M. M.* (1969). Metal constructions of hoisting and transport machines. Mashinostroenie. 520.
7. *Lobov, N. A.* (1987). Dynamics of cranes. Mashinostroenie, 160.
8. *Gaidamaka, V. F.* (1989). Hoisting machines. Vishcha shkola. 328.
9. *Budikov, L. A.* (1997). Multiparametric analysis of the dynamics of cranes of bridge type. Lugansk. VUTU. 210.
10. *Lovejkin, V. S., Chovnyuk, Yu. V., Dikteruk, M. G., Pastushenko, S. I.* (2004). Modeling of dynamics of mechanisms of load-lifting machines. Mikolaiv. RVV MDAU, 286.
11. *Grobov, V. A.* (1982). Teoriia kolebanii mekhanicheskikh sistem. Vishcha shkola. 183.
12. *Novak, S. M., Logvinets, A. S.* (1990). Protection against vibration and noise in construction: Handbook. Budivelnik. 184.
13. *Volkov, D. P.* (1958). Dynamic loads in universal excavators – cranes. Mashgiz. 269.
14. *Kozhevnikov, S. N.* (1986). Dynamics of non-stationary processes in machines. Naukova dumka. 288.

15. Lovejkin, V. S. (1990). Calculations of optimal modes of motion of machinery in construction machinery. UMK VO. 166
16. Lovejkin, V. S. (1998). Minimization of dynamic loads in elastic elements of load-lifting machines. Mining, construction, road and land reclamation machines. Vol. 52. 63 – 68.
17. Goberman, L. A., Stepanian, K. V., Iarkin, A. A., Zelenskii, V. S. (1979). Theory, design and calculation of construction and road machinery. Mashinostroenie. 407.

## **МИНИМИЗАЦИЯ ДИНАМИЧЕСКИХ НАГРУЗОК В МЕХАНИЗМЕ ПОДЪЕМА ГРУЗОПОДЪЕМНЫХ МАШИН II**

***В. С. Ловейкин, Ю. В. Човнюк, И. А. Кадыкало***

**Аннотация.** *В рамках двухмассовой модели рассмотрен подъем груза «с подхватом» и влияние такого варианта подъема на величину динамических нагрузок в упругих элементах (канатах) грузоподъемных машин/кранов. Для уменьшения указанных нагрузок (в частности, коэффициента динамичности) предложен выбор необходимых режимов движения приводных механизмов на участках переходных процессов. На примере механизма подъема груза (двухмассовая модель) проведена динамическая оптимизация (минимизация) нагрузок, которые возникают в грузовых канатах грузоподъемных машин.*

*Подробно рассмотрены все три этапа подъема груза «с подхватом»: а) выбора слабины каната; б) усилия в канате возрастает от нуля до силы тяжести груза; в) подъем груза «с веса» при полном натяжении каната. Установленные законы изменения усилия натяжения каната на втором этапе подъема груза, при которых минимизируются возможные, возникающие при этом, колебания. Вместе с тем, особенностью динамики рассматриваемой системы на первом этапе подъема груза является возникновение в ней собственных колебаний по двум разным формам. Установлены собственные частоты и амплитуды указанных форм колебаний.*

*На третьем этапе подъема груза учтены четыре возможных режима движения приводного механизма на участке его пуска, которые минимизируют определенные характеристики этому поводу. Для каждого из указанных режимов движения привода найдены оптимальные режимы движения груза, которые минимизируют возникающие динамические нагрузки в упругих связях (канатах) грузоподъемного механизма крана. При этом использованы методы, подходы и математический аппарат классического вариационного исчисления.*

*Полученные результаты могут быть в дальнейшем использованы для уточнения и совершенствования существующих инженерных методов расчета подобных систем*

как на стадиях их проектирования/конструирования, так и в режимах реальной эксплуатации.

**Ключевые слова:** динамическая оптимизация, минимизация, нагрузка, упругие элементы, грузоподъемные машины, условия подъема, жесткость каната, подъем «с подхватом»

## MINIMIZATION OF DYNAMIC STRESSES IN LIFTING MECHANISM OF HOISTING MACHINES II

**V. S. Loveikin, Yu. V. Chovnyuk, I. O. Kadikalo**

**Abstract.** *The two-mass model is used to consider the lifting of the load «picked out» and the influence of such an option of lifting on the value of dynamic loads in elastic elements (ropes) of lifting machines/cranes is discussed ad well. One may reduce these loads (including the dynamic coefficient) with the help of modes motion choice which is required to drive mechanisms during the transient processes. The dynamic optimization (minimization) of stresses in the arising ropes of cargo lifting equipment is improved. One may use for these aims the two – mass model.*

*Three stages of lifting of the load are studies in detail. They are: a) the selecting of rope's slack; b) the effort in the rope increases from zero to the cargo's gravity force; c) the lifting «in the weight» for full tension of the rope. The laws are established which describe the changes of rope's pulling force at the second stage of lifting. These laws gives one the possibility to minimize the vibration potentially arising during the lifting process. However, the characteristic feature of system's dynamics at the first stage of lifting is the emergence of its own oscillations of two different forms. These own frequencies and amplitudes for every form are established.*

*There were considered four possible modes of motion of drive mechanism at the third stage of lifting during its start-up which minimize the certain characteristics of this mechanism. There were found the best modes of optimal motion for every of these modes which minimize the dynamic loads occurring in the elastic connections (ropes) of the crane's lifting mechanism. One may use methods, approaches and mathematical apparatus of the classical variation's calculus.*

*The results obtained can later be used to update and improve existing engineering methods for calculating the motion mode drive for both stages (projection and design) of such systems, and for the modes of their real operation, as well.*

**Key words:** dynamic optimization, minimization, load, elastic elements, lifting machines, lifting conditions, rope's stiffness, lifting «picked out»