3) визначення фактичної економічної ефективності на основі результатів наукових досліджень, початкового виробництва, а також забезпечення відповідного якісного рівня.

Для забезпечення високих результатів наукових досліджень у цьому напрямі визначено тенденції і намічено шляхи досліджень. Результатом таких досліджень є створення експериментального зразка пожежного робота.

Література

1. Методика оценки деятельности аппаратов государственного пожарного надзора. – М. : Изд-во ВНИИПО МВД СССР, 1977. – 61 с.
2. Брушлинский Н.Н. Экономическая оценка эффективности деятельности объектовой пожарной охраны / Н.Н. Брушлинский, Г.М. Калинкин, Н.А. Присяжнюк // Подготовка кадров и противопожарная защита : сб. научн. тр. – Ленинград, 1990. – С. 56-59.
3. Лапин А.П. Оценка эффективности влияния деятельности пожарной охраны на обстановку с пожарами / А.П. Лапин, С.Е. Лукшин. – М. : Изд-во ВНИИПО. – 1997. – № 4. – 182 с.
4. Брушлинский Н.Н. О критериях эффективности и качества функционирования пожарной охраны / Н.Н. Брушлинский, Н.Н. Соболев // Вопросы экономики в пожарной охране : сб. научн. трудов. – М. : Изд-во ВНИИПО МВД СССР. – 1978. – Вып. 7. – С. 3-9.
5. Соболев Н.Н. Возможности использования регрессионных моделей для оценки эффективности деятельности пожарной охраны / Н.Н. Соболев // Вопросы экономики в пожарной охране. – М. : Изд-во ВНИИПО МВД СССР. – 1980. – Вып. 8. – С. 69-75.
6. Sulojeva J. Methods of Evaluation of Fire-Fighting Economic Effectiveness in Latvia / J. Sulojeva // Summary of the doctorate paper. – R. : RTU, 2010. – 40 p.
7. Zinko Roman. Usage of robots for the increasing the effectiveness of the fire protection / Roman Zinko, Jelena Sulojeva // International scientific conference: 52th Riga Technical University Conference SCEE'2011 "Scientific Conference on Economics and Entrepreneurship" October 7th, 2011, Riga, Latvia.
8. Zinko R. Usage of Robots for the Increasing the Effectiveness of the Fire Protection / R. Zinko, V. Jemeļjanovs, J. Sulojeva // Scientific Journal of RTU. 15. series., Tehnogēnās vides drošība. – 2011. – Vol. 1. – Pp. 74-80.
9. Зінько Р.В. Мобільні роботи в системі пожежної охорони / Р.В. Зінько, Є.В. Сулоєва // Науковий вісник НЛТУ України : зб. наук.-техн. праць. – Львів : РВВ НЛТУ України. – 2011. – Вип. 21.17. – С. 132-138.
10. Антонов А.С. Армейские гусеничные машины. – М. : Воениздат. – 1973. – Ч. 2, – 397 с.
11. Львов Е.Д. Теория трактора. – М. : Изд-во "Машгиз", 1960. – 252 с.
12. Никитин А.О., Сергеев Л.В. Теория танка. – М. : Изд. акад. БТВ, 1962. – 578 с.
13. Гусеничные транспортеры-тягачи / под ред. В.Ф. Платонова. – М. : Изд-во "Машиностроение", 1978. – 145 с.
14. Баженов, С.П. Основы теории гусеничных машин : учебн. пособ. / С.П. Баженов. – Липецк : Вид-во ЛГТУ. 2006. – 278 с.
15. Вонг Дж. Теория наземных транспортных средств / Дж. Вонг : пер. с англ. – М. : Изд-во "Машиностроение", 1982. – 284 с.
16. Торба А.В. О применении вибрации для повышения проходимости гусеничных транспортных средств по глубокому снегу / А.В. Торба // Вестник Череповецкого ГУ. – Череповец : Изд-во ЧГУ. – 2011. – № 3.1. – С. 101-105.
17. Кузьо І.В. Моделювання руху розчленованих транспортних засобів / І.В. Кузьо, Р.В. Зінько // Вібрації в техніці і технологіях. – 2012. – № 2(66). – С. 42-49.
18. Патент 2371345 РФ, МКИ B62D55/24. Трак гусеничной цепи / В.А. Коваленко, М.А. Давлетова, № 2007119344/11; Заявл. 24.05.2007; Опубл. 27.10.2009. – 6 с.
19. Шаров Б.В. Прототип мобільного охоронного робота з системою технічного зору / Б.В. Шаров, О.Н. Маковейчук, Р.В. Зінько // Машинознавство. – 2007. – № 11(125). – С. 45-47.

***Зинько Р.В., Сулоева Е.В.* Экономическая эффективность пожарной охраны при использовании мобильных роботов**

Определены основные составные методики расчета эффективности пожарной охраны с учетом новых тенденций, которые используются в тактике гашения пожаров, такие как гусеничные мобильные роботы. Предложенные пути совершенствования мобильных роботов повысят эффективность их использования, что повысит эффективность пожарной охраны.

Ключевые слова: экономическая эффективность, пожары, мобильные работы, пожарная охрана.

***Zinko R.V., Sulojeva Ye.V.* Economic efficiency of fire guard at the use of mobile robots**

Certainly basic component methods of calculation of efficiency of fire prevention taking into account the new tendencies of extinguishing of fires. To such tendencies the use behaves caterpillar mobile works. The ways of perfection of mobile robots are offered will promote their efficiency of the use. It positively will be marked on efficiency of fire prevention.

Keywords: economic efficiency, mobile robots, fires, fire prevention.

УДК 517.945

Доц. В.П. Карашецький, канд. техн. наук – НЛТУ України, м. Львів

ОСОБЛИВОСТІ РОЗРАХУНКУ ДВОВИМІРНИХ ВИХРОВИХ МАГНІТНИХ ПОЛІВ МЕТОДОМ КІНЦЕВИХ ЕЛЕМЕНТІВ

Виведено основні формули методу кінцевих елементів для розрахунку двовимірних статичних вихрових магнітних полів в областях, заповнених нелінійними безгістерезисними анізотропними середовищами з використанням лагранжевих трикутників, кубатурних формул чисельного інтегрування та врахуванням граничних умов Неймана і Дирихле.

Ключові слова: вихрове магнітне поле, магнітна характеристика, лагранжевий трикутник, метод кінцевих елементів, кубатурна формула, граничні умови.

Рішення тривимірних краєвих задач розрахунку магнітного поля [1] із достатньо задовільною точністю можна отримати шляхом зведення тривимірного магнітного поля до двовимірного, тобто без урахування зміни поля в одному напрямку.

Для краєвої задачі розрахунку вихрового магнітного поля, що описується рівняннями

$$rot\overline{H} = \overline{J}\,, \tag{1}$$

$$\overline{B} = rot\overline{A}\,, \tag{2}$$

в плоскій області D функціонал F представлено у вигляді

$$F = \int\limits_S (W - C)dS\,, \tag{3}$$

де:

$$W = \int\limits_0^{\overline{B}} \overline{H}d\overline{B}\,; \tag{4}$$

$$C = AJ\,; \tag{5}$$

A, J – нормальні до площини D проекції векторного магнітного потенціалу $\overline{A}$ і густини струму $\overline{J}$; $\overline{H}$, $\overline{B}$ – розміщені в площині D вектори напруженості магнітного поля і магнітної індукції; S – площа області D.

Умова мінімуму функціоналу (1) набуде вигляду

$$dF / dA = 0. \tag{6}$$

Для побудови кінцево-елементної моделі заповнимо область розрахунку D сукупністю лагранженвих трикутників n-го порядку [2].

Нехай внаслідок тріангуляції двовимірної області розрахунку D отримуємо M лагранжевих кінцевих елементів (КЕ). Кожному з них присвоїмо порядковий номер m ($m=\overline{1,M}$) і локальну нумерацію вузлів, згідно з якою i-му вузлу m-го КЕ відповідає номер mi. Для всієї області розрахунку встановимо сіткову (наскрізну) нумерацію R внутрішніх вузлів і G граничних вузлів. Поточні значення порядкових номерів внутрішніх вузлів позначимо r.

Для кінцево-елементної області функціонал F з урахуванням (3)-(5) набуде вигляду

$$F = \sum_{m=1}^{M} F_m = \sum_{m=1}^{M} (W_m - C_m), \tag{7}$$

де:
$$W_m = \int_{S_m} W dS; \tag{8}$$

$$C_m = \int_{S_m} C dS; \tag{9}$$

S_m – площа m-го КЕ.

Утворимо R-мірний вектор-рядок і вектор-стовпець значень потенціалу A у внутрішніх вузлах

$$\vec{A} = (A_1, A_2, ..., A_R); \ \vec{A}_* = (A_1, A_2, ..., A_R)_* \tag{10}$$

Умова мінімуму функціоналу F з урахуванням (6) рівносильна нелінійній системі алгебраїчних рівнянь

$$\vec{\varphi}_*[\vec{A}_*] = \frac{dF}{d\vec{A}} = 0. \tag{11}$$

Застосуємо для (8), (9) кубатурні формули чисельного інтегрування за площею лагранжевого трикутника [2]. Наприклад, у випадку використання лагранжевих трикутників другого порядку (n=2), кількість вузлів у яких p=6, одержимо

$$F_m = \frac{1}{3} S_m \sum_{i=4}^{6} (W_{mi} - C_{mi}), \tag{12}$$

де:
$$W_{mi} = \int_0^{\bar{B}_{mi}} \bar{H} d\bar{B}; \tag{13}$$

$$C_{mi} = A_{mi} J_{mi}. \tag{14}$$

Представимо залежність потенціалу A в межах m-го КЕ повним поліномом другого степеня

$$A = \vec{A}_m k_m^{-1} \vec{k}_* = \vec{k} k_{m*}^{-1} \vec{A}_{m*}, \tag{15}$$

де:
$$\vec{A}_m = (A_{m1}, ..., A_{m6}) \tag{16}$$

– вектор-рядок значень потенціалу A у вузлах m-го КЕ;

$$\vec{k} = (1, x, y, xy, x^2, y^2) \tag{17}$$

– координатний вектор-рядок поточної точки з координатами x, y;

$$k_{m*} = \begin{Vmatrix} 1 & x_{m_1} & y_{m_1} & x_{m_1} y_{m_1} & x_{m_1}^2 & y_{m_1}^2 \\ 1 & x_{m2} & y_{m2} & x_{m2} y_{m2} & x_{m2}^2 & y_{m2}^2 \\ 1 & x_{m3} & y_{m3} & x_{m3} y_{m3} & x_{m3}^2 & y_{m3}^2 \\ 1 & x_{m4} & y_{m4} & x_{m4} y_{m4} & x_{m4}^2 & x_{m4}^2 \\ 1 & x_{m5} & y_{m5} & x_{m5} y_{m5} & x_{m5}^2 & y_{m5}^2 \\ 1 & x_{m6} & y_{m6} & x_{m6} y_{m6} & x_{m6}^2 & y_{m6}^2 \end{Vmatrix} \tag{18}$$

– координатна матриця, рядки якої є координатними векторами виг-ляду (17) у вузлах m-го КЕ; $\vec{A}_{m*}$, $\vec{k}_*$, k_m – відповідно вектори-стовпці та матриця, транспоновані відносно $\vec{A}_m$, $\vec{k}$, k_{m*}.

Проекції B_x, B_y вектора $\bar{B}$ у m_i-му вузлі з урахуванням (2) і (15) набудуть вигляду

$$B_{xmi} = \frac{\partial A}{\partial y}\Big|_{x_{mi}, y_{mi}} = \vec{A}_m \vec{K}_{mi*}^{(y)} = \vec{K}_{mi}^{(y)} \vec{A}_{m*}; \tag{19}$$

$$B_{ymi} = -\frac{\partial A}{\partial x}\Big|_{x_{mi}, y_{mi}} = -\vec{A}_m \vec{K}_{mi*}^{(x)} = -\vec{K}_{mi}^{(x)} \vec{A}_{m*}, \tag{20}$$

де:
$$\vec{K}_{mi}^{(x)} = \vec{k}_{mi}^{(x)} k_{m*}^{-1}; \ \vec{K}_{mi}^{(y)} = \vec{k}_{mi}^{(y)} k_{m*}^{-1}; \tag{21}$$

$$\vec{K}_{mi*}^{(x)} = k_m^{-1} \vec{k}_{mi*}^{(x)}; \ \vec{K}_{mi*}^{(y)} = k_m^{-1} \vec{k}_{mi*}^{(y)}; \tag{22}$$

$$\vec{k}_{mi}^{(x)} = \frac{\partial \vec{k}}{\partial x}\Big|_{x_{mi}, y_{mi}} = (0, 1, 0, y_{mi}, 2x_{mi}, 0); \tag{23}$$

$$\vec{k}_{mi}^{(y)} = \frac{\partial \vec{k}}{\partial y}\Big|_{x_{mi}, y_{mi}} = (0, 0, 1, x_{mi}, 0, 2y_{mi}); \tag{24}$$

$\vec{k}_{mi*}^{(x)}$, $\vec{k}_{mi*}^{(y)}$ – стовпці, одержані транспонуванням рядків (23), (24).

Диференціюючи вираз (12) по вектору $\vec{A}_m$ і враховуючи (19), (20), одержуємо

$$\vec{\varphi}_{m*} = \frac{dF_m}{d\vec{A}_m} = \frac{1}{3} S_m \sum_{i=4}^{6} \frac{d}{d\vec{A}_m} \left(\int_0^{\bar{B}_{mi}} (d\bar{B}) \bar{H} - A_{mi} J_{mi} \right) = \frac{1}{3} S_m \sum_{i=4}^{6} \left(\frac{d\bar{B}_{mi}}{d\vec{A}_m} \bar{H}_{mi} - J_{mi} \frac{dA_{mi}}{d\vec{A}_m} \right) =$$
$$= \frac{1}{3} S_m \sum_{i=4}^{6} \left(\frac{dB_{xmi}}{d\vec{A}_m} H_{xmi} + \frac{dB_{ymi}}{d\vec{A}_m} H_{ymi} - J_{mi} \frac{dA_{mi}}{d\vec{A}_m} \right) =$$
$$= \frac{1}{3} S_m \sum_{i=4}^{6} \left(\vec{K}_{mi*}^{(y)} H_{xmi} - \vec{K}_{mi*}^{(x)} H_{ymi} \right) - \frac{1}{3} S_m \vec{J}_{m*}, \tag{25}$$

де
$$\vec{J}_{m*} = (J_{m1}, ..., J_{m3})_* \tag{26}$$

– вектор-стовпець заданих значень J у вузлах m-го КЕ.

Диференціюючи вираз (25) по вектору $\vec{A}_{m*}$, отримуємо матрицю розмірності 6×6:

$$\phi_m = \frac{d\vec{\varphi}_{m*}}{d\vec{A}_{m*}} = \frac{1}{3} S_m \sum_{i=4}^{6} (\vec{K}_{mi*}^{(y)} \frac{dH_{xmi}}{d\vec{A}_{m*}} - \vec{K}_{mi*}^{(x)} \frac{dH_{ymi}}{d\vec{A}_{m*}}) . \tag{27}$$

З урахуванням (19), (20) і магнітної характеристики середовища

$$\bar{H} = \bar{H}[\bar{B}], \tag{28}$$

яка рівноцінна двом скалярним залежностям

$$H_x = H_x[B_x, B_y]; \; H_y = H_y[B_x, B_y], \tag{29}$$

маємо

$$\phi_m = \frac{1}{3} S_m \sum_{i=4}^{6} (\vec{K}_{mi*}^{(y)}(\nu_{xxmi} \frac{dB_{xmi}}{d\vec{A}_{m*}} + \nu_{xymi} \frac{dB_{ymi}}{d\vec{A}_{m*}}) - \vec{K}_{mi*}^{(x)}(\nu_{yxmi} \frac{dB_{xmi}}{d\vec{A}_{m*}} + \nu_{yymi} \frac{dB_{ymi}}{d\vec{A}_{m*}} =$$

$$= \frac{1}{3} S_m \sum_{i=4}^{6} (\vec{K}_{mi*}^{(y)}(\nu_{xxmi}\vec{K}_{mi}^{(y)} - \nu_{xymi}\vec{K}_{mi}^{(x)}) - \vec{K}_{mi*}^{(x)}(\nu_{yxmi}\vec{K}_{mi}^{(y)} - \nu_{yymi}\vec{K}_{mi}^{(x)})) , \tag{30}$$

де ν_{xxmi}, ν_{xymi}, ν_{yxmi}, ν_{yymi} – елементи тензора диференціального питомого магнітного опору середовища

$$\nu = \frac{d\bar{H}}{d\bar{B}} = \begin{Bmatrix} \dfrac{\partial H_x}{\partial B_x} & \dfrac{\partial H_x}{\partial B_y} \\ \dfrac{\partial H_y}{\partial B_x} & \dfrac{\partial H_y}{\partial B_y} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \nu_{xx} & \nu_{xy} \\ \nu_{yx} & \nu_{yy} \end{Bmatrix}, \tag{31}$$

обчислювані в i-му вузлі m-го КЕ.

Для безгістерезисного середовища на основі теореми взаємності $\nu_{xy} = \nu_{yx}$, тому $\nu_{xymi} = \nu_{yxmi}$.

Нелінійну систему рівнянь (11) розв'язуються, зазвичай, ітераційним методом Ньютона. Для визначення внеску кожного m-го КЕ у вектор нев'язок $\vec{\varphi}_*$, якщо він не має жодного вузла на границі області розрахунку D, то необхідно на кожній ітерації:

- знайти вектор $\vec{\varphi}_{m*}$ за формулою (25);
- за таблицею відповідності локальної і сіткової нумерації встановити номери r вузлів, які збігаються з вузлами $m_1, ..., m_p$;
- кожний елемент вектора $\vec{\varphi}_{m*}$, який відповідає r-му внутрішньому вузлу, внести відповідно в r-й елемент вектора $\vec{\varphi}_*$.

Викладену вище процедуру використовуємо на етапі формування вектора нев'язок. Більш трудомісткою операцією є складання для векторної функції $\vec{\varphi}_* = (\varphi_1, ..., \varphi_R)_*$ матриці Якобі ϕ розмірності $R \times R$. Для того, щоб визначити внесок кожного m-го КЕ у матрицю Якобі ϕ, який не має жодного вузла на границі області розрахунку D, необхідно на кожній ітерації обчислити матрицю ϕ_m за формулою (30) і підсумувати всі її елементи з відповідними елементами матриці ϕ за таким правилом: елемент ϕ_{mij} належить cs-й клітині матриці ϕ, де c, s – сіткові номери вузлів з локальними номерами відповідно mi і mj.

Уздовж границі області D потрібно задати граничні умови Дирихле (значення потенціалу A) або однорідні граничні умови Неймана

$$B_\tau = -\frac{\partial A}{\partial n} = 0 , \tag{32}$$

де B_τ – проекція магнітної індукції $\bar{B}$ на одиничний вектор $\bar{\tau}$ дотичної до границі області D, напрямлений під прямим кутом проти годинникової стрілки відносно одиничного вектора $\bar{n}$ зовнішньої нормалі.

Для визначення внеску кожного m-го КЕ у вектор нев'язок $\vec{\varphi}_*$ і матрицю Якобі ϕ, якщо він має один чи декілька граничних вузлів з граничними умовами Дирихле, необхідно на кожній ітерації для кожного вузла mD з граничними умовами Дирихле враховувати, що значення A_{mD} задане і постійне, тому

$$\varphi_{mD} = \frac{\partial F_m}{\partial A_{mD}} = 0 ; \tag{33}$$

$$\phi_{mDu} = \frac{\partial \varphi_{mD}}{\partial A_{mp}} = 0 , \; p = \overline{1,6} ; \tag{34}$$

$$\phi_{muD} = \frac{\partial \varphi_{mp}}{\partial A_{mD}} = 0, \; p = \overline{1,6} . \tag{35}$$

Розглянемо визначення внеску кожного m-го КЕ у вектор нев'язок $\vec{\varphi}_*$ і матрицю Якобі ϕ, який межує своєю стороною з границею області D і має лише два граничних вузла з граничними умовами Неймана, оскільки для КЕ n-го порядку кількість P_N таких вузлів визначаємо за формулою

$$P_N = n . \tag{36}$$

Умова Неймана на границі області D набуде вигляду

$$B_\tau = \bar{B}\bar{\tau} = B_x\tau_x + B_y\tau_y = 0 , \tag{37}$$

де τ_x, τ_y – проекції одиничного вектора $\bar{\tau}$ дотичної до границі області D.

З урахуванням (19), (20) запишемо (37) для кожного з двох вузлів із граничними умовами Неймана m-го КЕ

$$(\tau_x K_{mN*}^{(y)} - \tau_y K_{mN*}^{(x)})\vec{A}_{m*} = 0 , \tag{38}$$

де:

$$K_{mN*}^{(x)} = \begin{Vmatrix} \vec{K}_{mN_1}^{(x)} \\ \vec{K}_{mN_2}^{(x)} \end{Vmatrix}; K_{mN*}^{(y)} = \begin{Vmatrix} \vec{K}_{mN_1}^{(y)} \\ \vec{K}_{mN_2}^{(y)} \end{Vmatrix} \tag{39}$$

– прямокутні матриці розмірності 2×6, рядками яких є вектори-рядки, визначені за виразами (21) для вузлів з граничними умовами Неймана m-го КЕ; N_1, N_2 – відповідно початкове і кінцеве значення локальних номерів вузлів із граничними умовами Неймана m-го КЕ.

Представимо (38) у вигляді

$$k_{m\tau}\vec{A}_{m*} = 0 , \tag{40}$$

де

$$k_{m\tau} = \tau_x K_{mN*}^{(y)} - \tau_y K_{mN*}^{(x)} \tag{41}$$

– прямокутна матриця розмірності 2×6.

Утворимо вектор-стовпець значень потенціалу у вузлах m-го КЕ з умовами Неймана

$$\vec{A}_{mN*} = (A_{mN_1}, A_{mN_2})_* \tag{42}$$

і вектор-стовпець значень потенціалу в інших вузлах, які не ввійшли до складу $\vec{A}_{mN*}$, (внутрішніх вузлах і вузлах з умовами Дирихле)

$$\vec{A}_{mL*} = (A_{mL_1}, ..., A_{mL_4})_*, \tag{43}$$

де: L_1, L_4 – відповідно початкове і кінцеве значення локальних номерів внутрішніх вузлів і вузлів з умовами Дирихле m-го КЕ.

У виразах (42), (43) потенціали вузлів розташовуємо в порядку зростання їх локальних номерів. З урахуванням (42) і (43) вираз (40) можна представити як

$$k_{mL}\vec{A}_{mL*} + k_{mN}\vec{A}_{mN*} = 0, \tag{44}$$

де: k_{mL} – прямокутна матриця розмірності 2×4, утворена із тих стовпців матриці $k_{m\tau}$, номери яких збігаються з локальними номерами елементів вектора $\vec{A}_{mL*}$; k_{mN} – квадратна матриця розмірності 2×2, утворена із тих стовпців матриці $k_{m\tau}$, номери яких збігаються з локальними номерами елементів вектора $\vec{A}_{mN*}$. З рівняння (44) визначаємо

$$\vec{A}_{mN*} = -k_{mN}^{-1}k_{mL}\vec{A}_{mL*} = -G_m\vec{A}_{mL*}, \tag{45}$$

де

$$G_m = k_{mN}^{-1}k_{mL} \tag{46}$$

– прямокутна матриця розмірності 2×4, що зв'язує значення потенціалу у вузлах із граничними умовами Неймана з його значеннями в інших вузлах m-го КЕ.

Виконавши транспонування у виразі (45), одержимо

$$\vec{A}_{mN} = -\vec{A}_{mL}G_{m*}. \tag{47}$$

Вектор-стовпець $\vec{A}_{m*}$ значень потенціалу у вузлах m-го КЕ визначаємо через вектори-стовпці $\vec{A}_{mL*}$, $\vec{A}_{mN*}$ у вигляді

$$\vec{A}_{m*} = G_{mN}\vec{A}_{mN*} + G_{mL}\vec{A}_{mL*} \tag{48}$$

або у випадку транспонованих векторів

$$\vec{A}_m = \vec{A}_{mN}G_{mN*} + \vec{A}_{mL}G_{mL*}, \tag{49}$$

де: G_{mN}, G_{mL} – прямокутні матриці розмірності відповідно 6×2 і 6×4, елементами яких є постійні числа 0 або 1; G_{mN*}, G_{mL*} – матриці, транспоновані відносно матриць G_{mN}, G_{mL}.

Представляючи функціонал m-го КЕ у вигляді складної функції $F_m = F_m[\vec{A}_m]$ або $F_m = F_m[\vec{A}_{mN}, \vec{A}_{mL}]$ і враховуючи (47), (49), одержимо

$$\vec{\varphi}_{mL*} = \frac{dF_m}{d\vec{A}_{mL}} = \frac{\partial\vec{A}_m}{\partial\vec{A}_{mL}}\frac{dF_m}{d\vec{A}_m} + \frac{d\vec{A}_{mN}}{d\vec{A}_{mL}}\frac{\partial\vec{A}_m}{\partial\vec{A}_{mN}}\frac{dF_m}{d\vec{A}_m} = G_{mL*}\frac{dF_m}{d\vec{A}_m} - G_{m*}G_{mN*}\frac{dF_m}{d\vec{A}_m} =$$

$$= (G_{mL*} - G_{m*}G_{mN*})\frac{dF_m}{d\vec{A}_m} = Q_m\frac{dF_m}{d\vec{A}_m} = Q_m\vec{\varphi}_{m*}, \tag{50}$$

де

$$Q_m = G_{mL*} - G_{m*}G_{mN*} \tag{51}$$

– прямокутна матриця розмірності 4×6, що забезпечує виконання умов Неймана при переході від вектора-стовпця $\vec{\varphi}_{m*}$ до вектора-стовпця $\vec{\varphi}_{mL*}$ розмірності 4.

Аналогічно, представляючи вектор-стовпець $\vec{\varphi}_{m*}$ у вигляді $\vec{\varphi}_{m*} = \vec{\varphi}_{m*}[\vec{A}_{m*}]$ або $\vec{\varphi}_{m*} = \vec{\varphi}_{m*}[\vec{A}_{mN*}, \vec{A}_{mL*}]$ і враховуючи (45), (48), (50), одержимо квадратну матрицю розмірності 4×4

$$\vec{\phi}_{mL} = \frac{d\vec{\varphi}_{mL*}}{d\vec{A}_{mL*}} = \frac{d(Q_m\vec{\varphi}_{m*})}{d\vec{A}_{mL*}} = Q_m\frac{d\vec{\varphi}_{m*}}{d\vec{A}_{mL*}} = Q_m\frac{d\vec{\varphi}_{m*}}{d\vec{A}_{m*}}\frac{\partial\vec{A}_{m*}}{\partial\vec{A}_{mL*}} + Q_m\frac{d\vec{\varphi}_{m*}}{d\vec{A}_{m*}}\frac{\partial\vec{A}_{m*}}{\partial\vec{A}_{mN*}}\frac{d\vec{A}_{mN*}}{d\vec{A}_{mL*}} =$$

$$= Q_m\frac{d\vec{\varphi}_{m*}}{d\vec{A}_{m*}}G_{mL} - Q_m\frac{d\vec{\varphi}_{m*}}{d\vec{A}_{m*}}G_{mN}G_m = Q_m\frac{d\vec{\varphi}_{m*}}{d\vec{A}_{m*}}(G_{mL} - G_{mN}G_m) = Q_m\phi_m Q_{m*}, \tag{52}$$

де

$$Q_{m*} = G_{mL} - G_{mN}G_m \tag{53}$$

– матриця, транспонована відносно матриці Q_m.

Матриці Q_m, Q_{m*} у виразі (52) забезпечують виконання граничних умов Неймана при переході від матриці ϕ_m до матриці ϕ_{mL} за наявності в m-му КЕ вузлів з граничними умовами Неймана.

Оскільки матриця ϕ_m симетрична, то, згідно з (52), матриця ϕ_{mL} також симетрична.

Внесок кожного m-го КЕ, який має вузли з граничними умовами Неймана, у вектор нев'язок $\vec{\varphi}_*$ і матрицю Якобі ϕ на кожній ітерації визначаємо відповідно до $\vec{\varphi}_{mL*}$ і ϕ_{mL} за правилами, встановленими раніше для внутрішніх КЕ.

Література

1. Карашецький В.П. Розрахунок тривимірних вихрових магнітних полів методом кінцевих елементів / В.П. Карашецький // Науковий вісник НЛТУ України : зб. наук.-техн. праць. – Львів : РВВ НЛТУ України. – 2011. – Вип. 21.9. – С. 327-332.
2. Карашецький В.П. Кубатурні формули чисельного інтегрування за площею трикутника на основі інтерполяційних повних поліномів / В.П. Карашецький // Науковий вісник НЛТУ України : зб. наук.-техн. праць. – Львів : РВВ НЛТУ України. – 2007. – Вип. 17.7. – С. 275-280.

***Карашецкий В.П.* Особенности расчета двумерных вихревых магнитных полей методом конечных элементов**

Выведены основные формулы метода конечных элементов для расчета двумерных статических вихревых магнитных полей в областях, заполненных нелинейными безгистерезисными анизотропными средами с использованием лагранжевых треугольников, кубатурных формул численного интегрирования и учетом граничных условий Неймана и Дирихле.

Ключевые слова: вихревое магнитное поле, магнитная характеристика, лагранжевый треугольник, метод конечных элементов, кубатурные формулы, граничные условия.

Karashetskyy V.P. **Features of calculation of two-dimensional eddy magnetic fields of the method finite element**

Basic formulas of the finite element method for calculating of two-dimensional static eddy magnetic fields filled with nonlinear without hysteresis anisotropic environments with using Lagrangian triangles, cubature formulas of numerical integration and with considering of boundary conditions of Neumann and Dirichlet were obtained.

Keywords: eddy magnetic field, magnetic characteristic, Lagrangian triangle, finite element method, cubature formula, boundary conditions.

УДК 330.4:336.71

Доц. Б.Ю. Кишакевич, д-р екон. наук – Дрогобицький державний педагогічний університет ім. Івана Франка

ЗАДАЧІ БАГАТОКРИТЕРІАЛЬНОЇ ОПТИМІЗАЦІЇ ПОРТФЕЛЯ АКТИВІВ БАНКУ

Розглянуто сучасні постановки задач багатокритеріальної оптимізації банківського портфеля активів на основі класичної портфельної теорії Марковіца та методи їх узагальнення на випадок кредитного портфеля. Проаналізовано методи вирішення проблеми нормальності розподілу дохідності портфеля через застосування різних мір кредитного ризику.

Ключові слова: багатокритеріальна оптимізація, кредитний портфель, портфельна теорія, міри ризику, кредитний ризик, ефективний портфель.

Актуальність проблеми. Формування кредитно-інвестиційного портфеля банку є непростим завданням, оскільки вимагає узгодження суперечливих критеріїв: максимізації норми прибутку та мінімізації ризику. Постановка задач оптимізації кредитного портфеля нерозривно пов'язана із кредитною політикою банку – у разі більш агресивної кредитної політики прибутковість портфеля буде превалювати над питаннями безпеки, і навпаки, для консервативної політики на перший план виходить завдання мінімізації ризику. Свідченням того, наскільки важливим є питання формування збалансованого кредитного портфеля банку можуть бути наслідки фінансової кризи 2008-2009 рр. Відомо, що однією із головних причин безпрецедентних фінансових потрясінь останніх років було передусім фокусування практично усіх банківських установ на прибутковості портфеля, тоді як автоматично відбувалась недооцінка його сукупного ризику. Раніше, до 2008 р., в умовах доступності до кредитних ресурсів на міжнародних ринках, та їх дешевизни через існування на цих же ринках величної "мильної бульбашки" фіктивних фінансових ресурсів, банки не приділяли особливої уваги якості своїх кредитних портфелів. Сьогоднішня ситуація істотно відрізняється і виклики, які поставила фінансова криза, актуалізують проблему коректного вибору моделі оптимізації банківського портфеля.

Аналіз останніх наукових досліджень та публікацій. Крім вимірювання та моніторингу ризику, важливим елементом ризик-менеджменту є вивчення джерел портфельного ризику та ефективних методів побудови портфеля із мінімальним ризиком та максимальною дохідністю. Проте незважаючи на те, що значні зусилля науковців та практиків були спрямовані на удосконалення методологій вимірювання кредитного ризику, розроблення

інструментарію оптимізації портфельного кредитного ризику, як правило, залишалось недостатньо висвітленим. Найпопулярніший на сьогодні через свою простоту інструментарій ризик менеджменту для ринкового ризику в основному ґрунтується на сучасній портфельній теорії (Марковіц 1952, Шарп 1964) і побудований на припущенні про існування нормального розподілу дохідності портфеля, що не цілком відповідає дійсності. Сучасна портфельна теорія бере свій початок з 1950-х р. Перший період представлений широко відомою дисертацією Л. Башельє "Теорія спекуляцій" (1950 р.) [1], а також основоположними роботами І. Фішера з теорії процентної ставки. Другий період починається у 1951 році після появи статтей Г. Марковіца "Вибір портфеля" [2, 3] та В. Шарпа [4], у яких вперше було запропоновано математичну модель вибору оптимального портфеля цінних паперів та було наведено методи побудови таких портфелів за певних умов. У 1990 р. Г. Марковіц разом із В. Шарпом та М. Мертоном були нагородженні Нобеліською премією з економіки за розробку теорії прийняття рішень на основі оцінки ризику в інвестиційних і корпоративних фінансах.

Проблемі подальшого удосконалення портфельної теорії Марковіца присвячено наукові праці Дж. Тобіна [5], Pavlo Krokhmal, Stanislav Uryasev, Jonas Palmquist [6], Х. Комо Х. Шіракава та Х. Ямазакі [7], Сперанза [8], М. Юнг [9], А. Клементе та К. Романо [10], Кишакевича Б. [11] та інших. Незважаючи на значну кількість досліджень, присвячених формуванню ефективних портфелів активів банку, невирішеними залишаються проблеми вибору коректних мір ризику, побудови моделей оцінювання кореляції активів, узагальнення класичної задачі портфельної оптимізації на випадок кредитного портфеля тощо.

Мета роботи – аналіз сучасних підходів до формування оптимальних портфелів активів банку на основі портфельної теорії Марковіца та методів її узагальнення на випадок кредитного портфеля.

Виклад основного матеріалу. Головною заслугою Г. Марковіца вважається ймовірнісне тлумачення дохідності та ризику, що дало змогу зробити проблему формування оптимального портфеля суто математичною задачею. Як наслідок, було отримано задачу квадратичної оптимізації із лінійними обмеженнями. Спочатку робота Г. Марковіца не знайшла належної оцінки у фінансистів, оскільки у 1950-ті роки застосування теорії ймовірності у банківській діяльності було незвичним явищем, і крім того, запропоновані Г. Марковіцем складні на цей час обчислювальні алгоритми потребували відповідної обчислювальної техніки.

Г. Марковіц у своїй моделі ввів очікувану норму прибутку і очікуваний ризик. Він показав, що зміна норми прибутку є мірою ризику портфеля. Відповідно до моделі Г. Марковіца визначають показники, що характеризують обсяг інвестицій і ризик. Це дає змогу порівнювати між собою різні альтернативи вкладення капіталу.

Класична модель Марковіца оптимального портфеля полягає в такому. Нехай cov_{ij} – коефіцієнт коваріації дохідності i-го та j-го активу. Необхідно знайти частки (ваги) $(x_1,\dots, x_n)$ капіталу, вкладеного в n можливих інструментів і таких, що мінімізують дисперсію дохідності портфеля: