Баран М.М., Васькович И.М. **Зависимость энергии электронных состояний, локализированных на краевой дислокации, от концентрации доноров**

Исследован энергетический спектр электронных состояний, локализированных на краевой дислокации в модели, которая учитывает как электростатическое, так и деформационное взаимодействия между заряженною краевой дислокацией и свободными электронами. Показано, что увеличение концентрации доноров n_d приводит к понижению локальных электронных уровней, а энергетическое расстояние при этом между соответственными электронными уровнями увеличивается.

Ключевые слова: электрон-деформационный потенциал, концентрация электронов проводимости, зоны проводимости, краевая дислокация, доноры.

Baran M.M., Vaskovich I.M. **Energy Dependence of electron positions located on the edged dislocation from the concentration of donors**

Energy spectrum of electron positions located on the edged dislocation in the model which takes into consideration both electrostatic and deformational interactions between charged edged dislocation and free electrons has been researched. It is shown that the increase of concentration of donor n_d results in lowering of local electronic levels, and power distance here between corresponding electronic levels grows.

Keywords: electron-deformational potential, concentration of conduction electrons, conduction area, dislocation, donors.

УДК 517.95+534.1

Доц. П.Я. Пукач, канд. фіз.-мат. наук – НУ "Львівська політехніка"

ЯКІСНІ МЕТОДИ ДОСЛІДЖЕННЯ КОРЕКТНОСТІ РОЗВ'ЯЗКУ В МАТЕМАТИЧНІЙ МОДЕЛІ НЕЛІНІЙНИХ КОЛИВАНЬ НАПІВНЕОБМЕЖЕНИХ ПРУЖНИХ ТІЛ

Викладено методику якісного дослідження розв'язку математичної моделі коливань напівнеобмежених пружних тіл. Розглянута система узагальнює систему нелінійних хвильових рівнянь, яка вивчається в теорії пружності. Отримано класи коректності узагальненого розв'язку – вагові соболевські простори функцій з якісною поведінкою на нескінченності.

Ключові слова: нелінійні коливання, нелінійна крайова задача, метод Гальоркіна, метод монотонності, необмежена область.

Актуальність проблеми та огляд основних результатів. Активізація теоретичних досліджень вивчення динамічних явищ у нелінійних коливальних конструкціях за дії різного роду збурень (силових, інерційних, кінематичних) зумовлена як логікою розвитку динаміки коливальних систем, так й інтересами різноманітних практичних застосувань. Цю проблему достатньо досліджено у випадку коливальних систем, що моделюються лінійними диференціальними рівняннями (див. для прикладу [1]). Зазвичай, такі розрахунки не приводять до цілком адекватного відображення динамічних явищ, оскільки процеси в реальних системах не може бути описано в термінах виключно лінійної теорії. Усе це призводить до зниження цінності отриманих результатів дослідження та до визнання необхідності проведення розрахунків на основі нелінійної теорії.

Асимптотичні методи нелінійної механіки дали змогу дослідити широкий клас механічних коливальних систем для випадку малої залежності ам-

плітуди коливань від нелінійних пружних сил та сил опору [2, 3]. У випадку нелінійного закону пружності матеріалу, істотно нелінійної залежності амплітуди коливань від пружних сил та сил опору задача пов'язана з принциповими математичними труднощами, оскільки відсутні загальні аналітичні методи розв'язування такого класу задач. Якісні методи загальної теорії нелінійних крайових задач дають змогу для широкого класу нелінійних коливальних систем отримати результати коректності розв'язку. Вказана методика дає змогу обґрунтувати коректність розв'язку моделі та надалі для її дослідження застосовувати різноманітні наближені методи. Отож, проблеми якісних методів дослідження нелінійних коливальних систем є актуальними.

У роботі математичну модель нелінійних коливань напівнеобмеженого каната під дією нелінійних сил опору. Подібні задачі виникають в різноманітних технічних застосуваннях – щодо коливань трубопроводів, залізничних колій, довгих мостів, електричних ліній, оптичних волокон тощо [4-6]. Розглянуто математичну модель нелінійних коливань, яку описано системою рівнянь другого порядку

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{\partial}{\partial x}\left(A(x)\frac{\partial u}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial x}\left(B(x,t)\frac{\partial u}{\partial t}\right) + B_1(x,t)\frac{\partial u}{\partial x} + C(x,t)u +$$

$$+G(x,t)\left|\frac{\partial u}{\partial t}\right|^{p-2}\frac{\partial u}{\partial t} = F(x,t)\,,\; p>2 \tag{1}$$

в необмеженій за просторовою змінною області. Система (1) моделює коливні процеси у конвеєрних лініях стрічкового (канатного) типу для випадку рухомої стрічки [3]. Рівняння та системи вигляду (1), які моделюють коливні процеси у середовищі з опором, вивчають у теорії пружності (див. для прикладу [7-9]). Задачі для нелінійних рівнянь та систем $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{\partial}{\partial x}\left(A(x)\frac{\partial u}{\partial x}\right) + Q(u) = F(x,t)$ (Q – нелінійний оператор) у необмежених областях розглядали у працях [10-14]. Деякі результати коректності розв'язку у цих працях отримано в припущенні певної якісної поведінки розв'язку, початкових даних та правої частини рівняння (системи) на нескінченності, інші результати – без таких припущень. У цій статті класи коректності розв'язку мішаної задачі є ваговими соболєвськими просторами функцій, що описують якісну поведінку розв'язку на нескінченності. Ця поведінка залежить від правої частини системи та початкових даних задачі. Отримані результати певним чином доповнюють [15].

Постановка задачі. Формулювання результату. В області $Q_T = (0,+\infty)\times(0,T)$, $0<T<\infty$ розглядаємо для системи (1) мішану задачу з початковими умовами

$$u(x,0) = \varphi_0(x)\,, \tag{2}$$

$$\frac{\partial u(x,0)}{\partial t} = \varphi_1(x) \tag{3}$$

та крайовою умовою $$u(x,0) = 0\,. \tag{4}$$

У системі (1) квадратні матриці A, B, B_1 та матриця C є дійсно значними і мають порядок $m\in\mathbf{N}$, $u=col(u_1,...,u_m)$, $G=col(G_1,...,G_m)$, $F=col(F_1,...,F_m)$, $\varphi_0=col(\varphi_{01},...,\varphi_{0m})$, $\varphi_1=col(\varphi_{11},...,\varphi_{1m})$. Розглянемо далі функцію ψ з такими властивостями: (Ψ) функція $\psi:[0,+\infty)\to(0,+\infty)$ є монотонною при $\xi\to+\infty$, неперервно диференційовною функцією, $|\psi'(\xi)|\le C\psi(\xi)$, $C>0$. У цій праці використовуємо простори з ваговою функцією ψ. Зокрема,

$$L^{r,\psi}(0,+\infty)=\left\{u:\int_0^{+\infty}|u|^r\psi(x)dx<+\infty\right\},\ r\in(1,+\infty),\ \|u\|_{L^{r,\psi}(0,+\infty)}=\left(\int_0^{+\infty}|u|^r\psi(x)dx\right)^{\frac{1}{r}},$$

$H_0^{1,\psi}(0,+\infty)$ – замикання простору $C_0^{\infty}(0,+\infty)$ функцій з компактними носіями за нормою $\|u\|_{H_0^{1,\psi}(0,+\infty)}=\left(\int_0^{+\infty}\left(\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2+u^2\right)\psi(x)dx\right)^{1/2}$. Всюди далі через V' позначено функціональний простір, спряжений до простору V, $\|\cdot\|$ позначає евклідову норму. Стосовно коефіцієнтів, правих частин системи (1) та початкових даних припускатимемо виконання таких умов.

(A) Елементи $a^{kl}\,(k,l=1,...,m)$ матриці A – неперервні на $[0,+\infty)$ функції, для довільного вектора $\xi_l=(\xi_1,...,\xi_m)\in R^m$ та для майже всіх $x\in(0,+\infty)$ виконуємо умову $\left(A(x)\xi,\xi\right)\ge a_0|\xi|^2$, $a_0>0$.

(B) Елементи b^{kl} матриці B та елементи $\frac{\partial b^{kl}}{\partial x}$ матриці $\frac{\partial B}{\partial x}$ належать до простору $L^{\infty}(Q_T)$, $k,l=1,...,m$.

(B_1) Елементи b_1^{kl} матриці B_1 належать до простору $L^{\infty}(Q_T)$ для довільних $k,l=1,...,m$.

(C) Елементи c^{kl} матриці C належать до $L^{\infty}(Q_T)$, $k,l=1,...,m$.

(G) Для функцій $G_i(x,t)\,(i=1,...,m)$ та для майже всіх $(x,t)\in(0,+\infty)\times(0,T)$ виконуються умови: $G_i(x,t)\ge g_0$, $g_0=const>0$, $|G_i(x,t)|\le g_1$, $g_1=const>0$.

(F) $F_i\in L^{p'}\left((0,T);L_{loc}^{p'}(0,+\infty)\right)$, $p'=p/(p-1)$, ($i=1,...,m$).

(Φ) $\varphi_{0i}\in H_0^{1,\psi}(0,+\infty)$, $\varphi_{1i}\in L^{2,\psi}(0,+\infty)$, ($i=1,...,m$).

Розв'язком задачі (1)-(4) називаємо таку функцію $u_i\in C([0,T];H_0^{1,\psi}(0,+\infty))$,

де $\frac{\partial u_i}{\partial t}\in C\left([0,T];\left(H_0^{1,\psi}(0,+\infty)\cap L^{p,\psi}(0,+\infty)\right)'\right)\cap L^p((0,T);L^{p,\psi}(0,+\infty))$ ($i=1,...,m$),

яка задовольняє умови (2), (4) та інтегральну тотожність

$$\int_{Q_\tau}\left[-\left(\frac{\partial u}{\partial t},\frac{\partial v}{\partial t}\psi(x)\right)+\left(A(x)\frac{\partial u}{\partial x},\frac{\partial}{\partial x}(v\psi(x))\right)-\left(B(x,t)\frac{\partial u}{\partial t},\frac{\partial}{\partial x}(v\psi(x))\right)\right]dxdt\ -$$

$$-\int_{Q_\tau}\left[\left(B_1(x,t)\frac{\partial u}{\partial x},v\psi(x)\right)+\left(C(x,t)u+G(x,t)\left|\frac{\partial u}{\partial t}\right|^{p-2}\frac{\partial u}{\partial t}-F,v\psi(x)\right)\right]dxdt\ +$$

$$+\int_0^{+\infty}\left(\frac{\partial u}{\partial t}(x,\tau),v(x,\tau)\psi(x)\right)dx-\int_0^{+\infty}\left(\varphi_1(x),v(x,0)\psi(x)\right)dx=0 \qquad (5)$$

для довільного $\tau\in(0,T]$ і для довільної функції $v=col(v_1,...,v_m)$ такої, що $v_i\in L^2((0,T);H_0^{1,\psi}(0,+\infty))\cap L^p((0,T);L^{p,\psi}(0,+\infty))$, $\frac{\partial v_i}{\partial t}\in L^2((0,T);L^{2,\psi}(0,+\infty))$ ($i=1,...,m$).

Головний результат роботи: при виконанні умов (Ψ), (A), (B), (B_1), (C), (G), (F), (Φ). Тоді існує єдиний узагальнений розв'язок u задачі (1)-(4) в області Q_T, для якого

$$\int_0^{+\infty}\left[\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2\right]\psi(x)dx+\int_{Q_\tau}\left|\frac{\partial u}{\partial t}\right|^p\psi(x)dxdt\le$$

$$\le C_0\sum_{i=1}^m\left(\|F_i\|^{p'}_{L^{p'}((0,T);L^{p',\psi}(0,+\infty))}+\|\varphi_{0i}\|^2_{H_0^{1,\psi}(0,+\infty)}+\|\varphi_{1i}\|^2_{L^{2,\psi}(0,+\infty)}\right) \qquad (6)$$

для довільного $\tau\in(0,T]$, де C_0 – додатна стала, яка залежить від p, ψ та коефіцієнтів A, , B_1, C, G системи (1).

Обґрунтування методики. Існування. Виберемо довільне фіксоване число $R>1$. Розглянемо в обмеженій області Q_T^R для системи (1) допоміжну задачу з правою частиною F^R і умовами

$$u(0,t)=u(R,t)=0, \qquad (7)$$

$$u(0,t)=\varphi_0^R(x),\quad \frac{\partial u(0,t)}{\partial t}=\varphi_1^R(x),\quad x\in(0,R), \qquad (8)$$

де: $\varphi_0^R(x)=\varphi_0(x)\xi_R(x)$, $\varphi_1^R(x)=\varphi_1(x)\xi_R(x)$, $\xi_R\in C^1(\mathrm{R})$, $0\le\xi_R(x)\le1$, $\xi_R(x)=1$ при $x\le R-1$, $\xi_R(x)=0$ при $x\ge R$, $F^R(x,t)=F(x,t)$ при $(x,t)\in Q_T^R$, $F^R(x,t)=0$ при $(x,t)\in Q_T\setminus Q_T^R$. Для доведення існування розв'язку допоміжної задачі (1), (7), (8) використаємо методику [16, с. 234]. Розглянемо в Q_T^R послідовність гальоркінських наближень $u_i^N(x,t)=\sum_{k=1}^N C_k^N(t)\omega_k(x)$, $N=1,2,...$, $i=1,...,m$, $\{\omega_k\}$ – база в $H_0^1(0,R)\cap L^p(0,R)$, ортонормована в $L^2(0,R)$, причому функції C_k^N визначають як розв'язки задачі Коші для системи звичайних диференціальних рівнянь

$$\int_0^R\left[\left(\frac{\partial^2u^N}{\partial t^2},\omega_k\psi(x)\right)+\left(A(x)\frac{\partial u^N}{\partial x},\omega_k{}'\psi(x)\right)+\left(A(x)\frac{\partial u^N}{\partial x},\psi'(x)\omega_k\right)\right]dx-$$

$$-\int_0^R\left[\left(B(x,t)\frac{\partial u^N}{\partial t},\omega_k{}'\psi(x)\right)+\left(B(x,t)\frac{\partial u^N}{\partial t},\psi'\omega_k\right)\right]dx+$$

$$+\int_0^R\left(B_1(x,t)\frac{\partial u^N}{\partial x}+C(x,t)u^N+G(x,t)\left|\frac{\partial u^N}{\partial t}\right|^{p-2}\frac{\partial u^N}{\partial t}-F^R(x,t),\omega_k\psi(x)\right)dx=0, \qquad (9)$$

$$C_k^N(0)=\varphi_{0,k}^{R,N},\quad C_{k,t}^N(0)=\varphi_{1,k}^{R,N},\quad k=1,...,N, \qquad (10)$$

$$\varphi_0^{R,N}(x)=\sum_{k=1}^N\varphi_{0,k}^{R,N}\omega_k(x),\quad \varphi_1^{R,N}(x)=\sum_{k=1}^N\varphi_{1,k}^{R,N}\omega_k(x),$$

$$\left\|\varphi_0^{R,N}-\varphi_0^R\right\|_{H_0^1(0,R)}\to 0,\quad \left\|\varphi_1^{R,N}-\varphi_1^R\right\|_{L^2(0,R)}\to 0,\quad N\to+\infty.$$

На підставі теореми Каратеодорі [17, с. 54] існує неперервний розв'язок задачі Коші (9), (10), який має абсолютно неперервну похідну, визначений на деякому проміжку $[0,\tau_0]$, $\tau_0\le T$. З отриманих далі оцінок випливатиме, що $\tau_0=T$. Помножимо кожне рівняння системи (9) на $\frac{\partial C_k^N}{\partial t}$, підсумуємо усі рівняння за k від 1 до N та проінтегруємо результат по проміжку $[0,\tau]$, $\tau\le T$. Тоді

$$\frac{1}{2}\int_0^R\left[\left(\frac{\partial u^N}{\partial t}(x,\tau)\right)^2+\left(A(x)\frac{\partial u^N}{\partial x}(x,\tau),\frac{\partial u^N}{\partial x}(x,\tau)\right)\right]\psi(x)dx++\int_{Q_\tau^R}\left(A(x)\frac{\partial u^N}{\partial x},\frac{\partial u^N}{\partial t}\right)\psi'dxdt-$$
$$-\frac{1}{2}\int_{Q_\tau^R}\left(B(x,t)\frac{\partial u^N}{\partial t},\frac{\partial u^N}{\partial t}\right)\psi'dxdt+\frac{1}{2}\int_{Q_\tau^R}\left(\frac{\partial B(x,t)}{\partial x}\frac{\partial u^N}{\partial t},\frac{\partial u^N}{\partial t}\right)\psi(x)dxdt+$$
$$+\int_{Q_\tau^R}\left(B_1(x,t)\frac{\partial u^N}{\partial x},\frac{\partial u^N}{\partial t}\right)\psi(x)dxdt\int_{Q_\tau^R}\left(C(x,t)u^N,\frac{\partial u^N}{\partial t}\right)\psi(x)dxdt-$$
$$-\frac{1}{2}\int_0^R\left(A(x)\frac{\partial\varphi_0^{R,N}(x)}{\partial x},\frac{\partial\varphi_0^{R,N}(x)}{\partial x}\right)\psi(x)dx-\frac{1}{2}\int_0^R\left(\varphi_1^{R,N}(x)\right)^2\psi(x)dx+$$
$$+\int_{Q_\tau^R}\left(F^R,\frac{\partial u^N}{\partial t}\right)\psi(x)dxdt-\int_{Q_\tau^R}\left(G(x,t)\left|\frac{\partial u}{\partial t}\right|^{p-2}\frac{\partial u}{\partial t},\frac{\partial u}{\partial t}\right)\psi(x)dxdt=0. \qquad (11)$$

Враховуючи наведені умови та проводячи оцінки інтегралів рівності (11), подібно до того, як це зроблено в [15], можна отримати

$$\int_0^R\left(\frac{\partial u^N}{\partial t}(x,\tau)\right)^2\psi(x)dx+M_1\int_0^R\left(\frac{\partial u^N}{\partial x}(x,\tau)\right)^2\psi(x)dx+M_2\int_{Q_\tau^R}\left|\frac{\partial u^N}{\partial t}\right|^p\psi(x)dxdt\le$$
$$\le M_3\int_{Q_\tau^R}\left(\frac{\partial u^N}{\partial x}\right)^2\psi(x)dxdt+M_4\int_{Q_\tau^R}\left(\frac{\partial u^N}{\partial t}\right)^2\psi(x)dxdt+M_5\int_{Q_\tau^R}\left|F^R\right|^{p'}\psi(x)dxdt+$$
$$+M_6\int_0^R\left[\left(\frac{\partial\varphi_{0_i}^{R,N}(x)}{\partial x}\right)^2+\left(\varphi_0^{R,N}(x)\right)^2+\left(\varphi_1^{R,N}(x)\right)^2\right]\psi(x)dx$$

для всіх $\tau\in(0,T]$, додатні сталі $M_1 - M_6$ не залежать від N. На підставі леми Гронуола з (12) отримуємо оцінку

$$\int_0^R\left(\frac{\partial u^N}{\partial t}(x,\tau)\right)^2\psi(x)dx+M_1\int_0^R\left(\frac{\partial u^N}{\partial x}(x,\tau)\right)^2\psi(x)dx+M_2\int_{Q_\tau^R}\left|\frac{\partial u^N}{\partial t}\right|^p\psi(x)dxdt\le M_3 \qquad (12)$$

для всіх $0<\tau\le T$, M_3 – додатна стала, яка не залежить від N. З нерівності (12) випливає існування підпослідовності $\{u^{N_k}\}\subset\{u^N\}$ такої, що $u^{N_k}\to u^R$ *- слабко в $L^\infty((0,T);H_0^1(0,R))$, $\frac{\partial u^{N_k}}{\partial t}\to\frac{\partial u^R}{\partial t}$ слабко в $L^p((0,T);L^p(0,R))$,

$\frac{\partial u^{N_k}}{\partial t}\to\frac{\partial u^R}{\partial t}$ *- слабко в $L^\infty((0,T);L^2(0,R))$, при $N_k\to\infty$ для довільного $R>1$. Отже, u^R – розв'язок задачі (1), (7), (8) в області Q_T^R для довільного фіксованого $R>1$. Розглянемо послідовність обмежених областей Q_T^k ($k=2,3,..$) для системи (1) та допоміжні задачі з правими частинами F^k і умовами (7), (8), в кожній з цих областей відповідно. На підставі отриманих збіжностей можна стверджувати: для довільного $k=2,3,...$ існує узагальнений розв'язок u^k такої задачі в Q_T^k. Покладемо $u^k(x,t)=0$ при $(x,t)\in Q_T\setminus Q_T^k$. Отриману послідовність розв'язків задачі (1)-(4) в Q_T для зручності знову позначимо $\{u^k\}$. В області Q_T розглянемо різницю u^l-u^m, $l,m\in N$, $l>m>k$ та врахуємо, що $F^l-F^m\equiv 0$ в Q_T^k. Здійснивши процедуру регуляризації, описану в [16, с. 238-239], після граничного переходу при $s\to\infty$, $k\to\infty$ одержимо, подібно до (12), що

$$\int_o^{+\infty}\left(\frac{\partial u^l(x,\tau)}{\partial t}-\frac{\partial u^m(x,\tau)}{\partial t}\right)^2\psi(x)dx+\int_o^{+\infty}\left(\frac{\partial u^l(x,\tau)}{\partial x}-\frac{\partial u^m(x,\tau)}{\partial x}\right)^2\psi(x)dx+$$
$$+\int_{Q_\tau}\left|\frac{\partial u^l}{\partial t}-\frac{\partial u^m}{\partial t}\right|^p\psi(x)dxdt\le+\int_{Q_\tau}\left|\frac{\partial u^l}{\partial t}-\frac{\partial u^m}{\partial t}\right|^p\psi(x)dxdt\le C_1\int_{Q_T\setminus Q_T^k}\sum_{i=1}^m\left|F_i^l-F_i^m\right|^{p'}\psi(x)dxdt+$$
$$+C_2\sum_{i=1}^m\left\|\varphi_{0i}^l-\varphi_{0i}^m\right\|_{H_0^{1,\psi}(0,+\infty)}+C_3\sum_{i=1}^m\left\|\varphi_{1i}^l-\varphi_{1i}^m\right\|_{L^{2,\psi}(0,+\infty)}, \qquad (13)$$

де C_1, C_2, C_3 – деякі додатні сталі, що не залежать від k. Враховуючи фундаментальність послідовностей $\{F_i^k\}$, $\{\varphi_{0i}^k\}$ і $\{\varphi_{1i}^k\}$ у просторах $L^{p'}((0,T)$, $L^{p',\psi}(0,+\infty))$, $H_0^{1,\psi}(0,+\infty)$, $L^{2,\psi}(0,+\infty)$ відповідно, з нерівності (13) можна отримати, що послідовність $\{u^k\}$ – фундаментальна в $C([0,T];H_0^{1,\psi}(0,+\infty))$, а $\left\{\frac{\partial u^k}{\partial t}\right\}$ є фундаментальною в $C([0,T];(H_0^{1,\psi}(0,+\infty)\cap L^{p,\psi}(0,+\infty))'\cap\ L^p((0,T);L^{p,\psi}(0,+\infty))$. Отже, $u^k\to u$ сильно в $C\left([0,T];H_0^{1,\psi}(0,+\infty)\right)$, $\frac{\partial u^k}{\partial t}\to\frac{\partial u}{\partial t}$ сильно в

$$C\left([0,T];\left(H_0^{1,\psi}(0,+\infty)\cap L^{p,\psi}(0,+\infty)\right)'\right)\cap\ L^p\left((0,T);L^{p,\psi}(0,+\infty)\right).$$

При цьому функція u задовольняє інтегральну тотожність (5), виконуються умови (2), (4). Зауважимо, що зі сильної збіжності $\frac{\partial u^k}{\partial t}\to\frac{\partial u}{\partial t}$ в просторі $L^p((0,T);L^{p,\psi}(0,+\infty))$ випливає, що $\left|\frac{\partial u^k}{\partial t}\right|^{p-2}\frac{\partial u^k}{\partial t}\to\left|\frac{\partial u}{\partial t}\right|^{p-2}\frac{\partial u}{\partial t}$ слабко в просторі $L^{p'}((0;T);L^{p',\psi}(0,+\infty))$. Правильність оцінювання (6) для u доводиться так само, як отримано нерівність (13).

Єдиність. Якщо $u^{(1)}$ та $u^{(2)}$–два довільних розв'язки задачі (1)-(4), то аналогічно до того, як отримано нерівність (14), можна отримати

$$\int_{o}^{+\infty}\left(\frac{\partial u^{l}(x,\tau)}{\partial t}-\frac{\partial u^{m}(x,\tau)}{\partial t}\right)^{2}\psi(x)dx+\int_{o}^{+\infty}\left(\frac{\partial u^{l}(x,\tau)}{\partial x}-\frac{\partial u^{m}(x,\tau)}{\partial x}\right)^{2}\psi(x)dx+$$

$$+\int_{Q_{\tau}}\left|\frac{\partial u^{l}}{\partial t}-\frac{\partial u^{m}}{\partial t}\right|^{p}\psi(x)dxdt\le 0$$

для всіх $0<\tau\le T$. Отже, $u^{(1)}=u^{(2)}$ майже скрізь в Q_T.

Отримані класи існування та єдиності розв'язку задачі (1)-(4) є ваговими соболєвськими просторами функцій з якісною поведінкою при $x\to+\infty$. Прикладами вагової функції можуть бути $\psi(x)=(1+x)^{\alpha}$, $\psi(x)=e^{\beta x}$, $\alpha,\beta=\text{const}$ тощо.

Висновки. Отримано умови коректності розв'язку в математичній моделі нелінійних слабко зв'язаних коливальних систем. Вказана методика може бути застосована також й у випадках коливань під дією комбінованих нелінійних сил пружності та опору. Отримані якісні результати, які обґрунтовують застосування до вказаної задачі методу Гальоркіна, надалі при дослідженні динамічних характеристик розв'язків розглянутих математичних моделей коливань дають змогу застосовувати різноманітні наближені методи.

Література

1. Коломиец В.Г. Случайные колебания упругих нелинейных систем с распределенными параметрами / В.Г. Коломиец, Л.М. Порхун // Математическая физика : респ. межвед. сб. науч. тр. – 1968. – Вып. 5. – С. 103-108.
2. Митропольский Ю.О. Асимптотические решения уравнений в частных производных / Ю.О. Митропольский, Б.И. Мосеенков. – К. : Вид-во "Вища шк.", 1976. – 596 с.
3. Сокіл Б.І. Дослідження нелінійних коливань стрічок конвеєрів / Б.І. Сокіл // Оптимізація виробничих процесів і технологічний контроль у машинобудуванні та приладобудуванні. – 2000. – № 394. – С. 101-104.
4. Santee D.M. Oscillations of a beam on a non-linear elastic foundation under periodic loads / D.M. Santee, P.B. Goncalves // Shock and Vibrations. – 2006. – Vol. 13. – Pp. 273-284.
5. Demeio L. Forced nonlinear oscillations of semi-infinite cables and beams resting on a unilateral elastic substrate" / L. Demeio, S. Lenci // Nonlinear Dynamics. – 2007. – Vol. 49. – Pp. 203-215.
6. Demeio L. Second-order solutions for the dynamics of a semi-infinite cable on a unilateral substrate" / L. Demeio, S. Lenci // J. Sound Vibr. – 2008. – Vol. 315. – Pp. 414-432.
7. Astaburuaga M. Scattering frequencies for a perturbed system of elastic wave equations / M. Astaburuaga, Coimbra R. Charao, C. Fernandez, Perla G. Menzala // J. Math. Anal. And Appl. – 1998. – Vol. 219. – P. 52-75.
8. Duvaut G. Les inequations en mecanique et en physique / G. Duvaut, J.L. Lions. – Paris: Dunod, 1972. – 236 p.
9. Gurtin M. An introduction to continuum Mechanics / M. Gurtin. – New York : Academic Press, 1981. – 128 p.
10. Agre K. Global solutions to boundary value problems for a nonlinear wave equation in high space dimensions / K. Agre, M.A. Rammaha // Diff. And Integr. Equat. – 2001. – Vol. 14. – P. 1315-1331.
11. Majdoub M. Qulitative study of the critical wave equation with a subcritical perturbation / M. Majdoub // J. Math. Anal. And Appl. – 2005. – Vol. 301. – P. 354-365.
12. Pecher H. Sharp existence results for self – similar solutions of semilinear wave equations / H. Pecher // Nonlin. Diff. Equat. And Appl. – 2000. – Vol. 7. – P. 323-341.
13. Ryo Ikehata. Two dimensional exterior mixed problem for semilinear damped equation / Ikehata. Ryo // J. Math. Anal. And Appl. – 2005. – Vol. 301. – P. 366-377.
14. Todorova G. Critical exponent for a nonlinear wave equations with damping / G. Todorova, B. Yordanov // J. Diff. Equat. – 2001. – Vol. 174. – P. 464-489.

15. Пукач П.Я. Змішана задача в необмеженій області для слабко нелінійного гіперболічного рівняння зі зростаючими коефіцієнтами // Математичні методи та фізико-механічні поля : наук. журнал. – Львів : Вид-во ІППММ. – 2004. – Вип. 47. – № 4. – С. 149-154.
16. Лионс Ж.Л. Некоторые методы решения нелинейных краевых задач / Ж.Л. Лионс. – М. : Изд-во "Эдиториал" УРСС, 2002. – 587 с.
17. Коддингтон Э.А. Теория обыкновенных дифференциальных уравнений / Э.А. Коддингтон, Н. Левинсон. – М. : Изд-во иностр. лит., 1958. – 475 с.

***Пукач П.Я.* Качественные методы исследования корректности решения в математической модели нелинейных колебаний полуограниченных упругих тел**

Изложена методика качественного исследования решения математической модели колебаний полунеограниченных упругих тел. Рассмотренная система обобщает систему нелинейных волновых уравнений, изучаемую в теории упругости. Получены классы корректности обобщенного решения – весовые соболевские пространства функций с качественным поведением на бесконечности.

Ключевые слова: нелинейные колебания, нелинейная краевая задача, метод Галеркина, метод монотонности, неограниченная область.

***Pukach P.Ya.* Qualitative research methods of investigation of solution correctness in the mathematical model of nonlinear oscillations of semi-infinite elastic bodies**

The technique of qualitative research solution mathematical model of vibrations of semi-infinite elastic bodies is given. The system generalizes the system of nonlinear wave equations, which is studied in the theory of elasticity. Correctness classes of a solution – weighted Sobolev spaces of functions with qualitative behavior at infinity are obtained.

Keywords: nonlinear vibrations, nonlinear boundary value problem, Galerkin method, method of monotony, unbounded domain.

УДК 634.0.377
Викл. І.В. Бичинюк – Львівський ДУВС

КОМП'ЮТЕРНЕ МОДЕЛЮВАННЯ ТА АНАЛІЗ НАПРУЖЕНО-ДЕФОРМОВАНОГО СТАНУ Г-ПОДІБНОЇ ПРОМІЖНОЇ ОПОРИ КАНАТНОЇ ЛІСОТРАНСПОРТНОЇ УСТАНОВКИ

Розроблено програму математичного моделювання просторової конструкції проміжної опори на базі системи MSC/NASTRAN для Windows. Оцінено напружено-деформований стан Г-подібної проміжної опори просторової конструкції. Представлений аналіз дав змогу встановити небезпечні перерізи та вузли опори. Визначено внутрішні зусилля, які виникають в елементах опори, та наведено рекомендації для вибору розмірів їх поперечних перерізів.

Ключові слова: комп'ютерне моделювання; напружено-деформований стан; просторова конструкція; Г-подібна опора; основні елементи; геометричні параметри.

Канатні лісотранспортні установки є основним засобом механізації первинного транспортування деревини в гірських умовах [1, 2], а для умов українських Карпат це багатопрогінні канатні установки. Багатопрогінні канатні лісотранспортні установки оснащують проміжними опорами, які, зазвичай, виготовляють з використанням ростучих дерев [1-3]. Однак під час доглядових рубаннях та і у стиглих деревостанах не завжди вдається на трасі установки знайти ростучі дерева, які за міцністю, висотою та діаметром стовбу-